ThS. Lê Văn Đoàn

Tư duy sáng tạo tìm tòi lời giải

PHƯƠNG TRÌNH
BẤT PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ
VÔ TỶ

- **DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI THPT QUỐC GIA**
- **BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI 10, 11, 12**
- **THAM KHẢO CHO GIÁO VIÊN**



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Phần 1. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ



§1. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ CƠ BẢN

I. Phương trình bậc bốn quy về bậc hai

1. Dạng: $\boxed{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0}$ với $\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2\neq 0.$

Phương pháp giải: Chia hai vế cho $x^2\neq 0,$ rồi đặt $t=x+\frac{\alpha}{x}$ với $\alpha=\frac{d}{b}\cdot$

2. Dạng: $\boxed{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e}$ với $a+c=b+d.$

Phương pháp giải: Viết lại $\left[(x+a)(x+c)\right]\cdot\left[(x+b)(x+d)\right]=e$

$\Leftrightarrow\left[x^2+(a+c)x+ac\right]\cdot\left[x^2+(b+d)x+bd\right]=e$ và đặt $t=x^2+(a+c)x.$

3. Dạng: $\boxed{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=ex^2}$ với $a.b=c.d.$

Phương pháp giải: Đặt $t=x^2+ab+\frac{a+b+c+d}{2}\cdot x$ thì phương trình

$\Leftrightarrow\left(t+\frac{a+b-c-d}{2}\cdot x\right)\cdot\left(t-\frac{a+b-c-d}{2}\cdot x\right)=ex^2$ (có dạng đẳng cấp)

4. Dạng: $\boxed{(x+a)^4+(x+b)^4=c}$

Phương pháp giải: Đặt $x=t-\frac{a+b}{2}\Rightarrow(t+\alpha)^4+(t-\alpha)^4=c$ với $\alpha=\frac{a-b}{2}\cdot$

5. Dạng: $\boxed{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0}$, với $b^3+8a^2d=4abc.$

Phương pháp giải: Đặt $x=t-\frac{b}{4a}\cdot$

6. Dạng: $\boxed{x^4=ax^2+bx+c}$ (1)

Phương pháp giải: Tạo ra dạng $A^2=B^2$ bằng cách thêm hai vế cho một lượng $2k.x^2+k^2$, tức phương trình (1) tương đương:

$(x^2)^2+2kx^2+k^2=(2k+a)x^2+bx+c+k^2\Leftrightarrow(x^2+k)^2=(2k+a)x^2+bx+c+k^2.$

Cần vế phải có dạng bình phương $\Rightarrow\begin{cases}2k+a>0\\ \Delta_{VP}=b^2-4(2k+a)(c+k^2)=0\end{cases}\Rightarrow k=?$

7. Dạng: $\boxed{x^4+ax^3=bx^2+cx+d}$ (2)

Phương pháp giải: Tạo $A^2=B^2$ bằng cách thêm ở vế phải 1 biểu thức để tạo ra dạng bình phương: $\left(x^2+\frac{a}{2}x+k\right)^2=x^4+ax^3+\left(2k+\frac{a^2}{4}\right)x^2+kax+k^2.$

Do đó ta sẽ cộng thêm hai vế của phương trình (2) một lượng:

$\left(2k+\dfrac{a^2}{4}\right)x^2+kax+k^2$, thì $\left(x^2+\dfrac{a}{2}x+k\right)^2=\left(2k+\dfrac{a^2}{4}+b\right)x^2+(ka+c)x+k^2+d.$

Lúc này cần số k thỏa: $\begin{cases} 2k+\dfrac{a^2}{4}+b>0 \\ \Delta_{VP}=(ka+c)^2-4\left(2k+\dfrac{a^2}{4}+b\right)(k^2+d)=0 \end{cases} \Rightarrow k=?$

II. Phương trình vô tỷ cơ bản

- $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B^2 \end{cases}.$
- $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \text{ hay } B\ge 0 \\ A=B \end{cases}.$
- $A\sqrt{B}=0 \Leftrightarrow B=0$ hoặc $\begin{cases} B\ge 0 \\ A=0 \end{cases}.$
- $\sqrt[3]{A}=B \Leftrightarrow A=B^3.$

III. Một số phương trình vô tỷ cơ bản thường gặp

1. Dạng: $\boxed{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}=0}$ (1)

Bước 1. Đặt điều kiện.

Bước 2. Chuyển vế để hai vế đều dương, tức $(1)\Leftrightarrow \sqrt{A}+\sqrt{C}=\sqrt{B}$

Bước 3. Bình phương hai vế $A+C+2\sqrt{AC}=B \Leftrightarrow 2\sqrt{AC}=B-A-C.$

2. Dạng: $\boxed{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}}$ (2)

Bước 1. Lũy thừa: $(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})^3=(\sqrt[3]{C})^3 \Leftrightarrow A+B+3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})=C$ $(2')$

Bước 2. Thế $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$, thì $(2')\Rightarrow A+B+3\sqrt[3]{ABC}=C.$

3. Dạng: $\boxed{\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D}}$ (3) với $A+C=B+D$ hoặc $AC=BD.$

Bước 1. Đặt điều kiện.

Bước 2. Biến đổi $(3)\Leftrightarrow \sqrt{A}-\sqrt{C}=\sqrt{B}-\sqrt{D}$ và bình phương hai vế.

❖ **Lưu ý**: Biến đổi của 3 dạng trên là biến đổi hệ quả, do đó khi giải xong cần thay thế nghiệm lại đề bài và kiểm tra nhằm tránh thu nghiệm ngoại lai

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ (*)

Đại học khối D – 2006

Phân tích. *Phương trình có dạng tổng quát:* $\sqrt{mx+n}=ax^2+bx+c,\ (m,\ a\ne 0)$ *ta đều giải được theo dạng* $\sqrt{A}=B.$ *Nếu sau khi lũy thừa ra được nghiệm hữu tỷ thì sẽ tiến hành chia Hoócner để phân tích thành tích số (đầu rơi, nhân tới, cộng chéo). Còn nếu ra nghiệm vô tỷ ta sẽ tiến hành sử dụng chức năng table của máy tính bỏ túi để tìm lượng nhân tử chung bậc hai, sau đó chia đa thức để đưa về dạng tích số bậc hai nhân bậc hai mà dễ dàng tìm được nghiệm.*

✍ ***Lời giải 1***. Xem đây là phương trình dạng $\sqrt{A}=B.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2+3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = (-x^2+3x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ x^4-6x^3+11x^2-8x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2(x^2-4x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1,\ x=2-\sqrt{2}$.

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình gần đối xứng loại II.

Đặt $y=\sqrt{2x-1} \geq 0$, suy ra: $\begin{cases} y^2=2x-1 \\ y+x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2x+1=0 \\ x^2-3x+y+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (y^2-x^2)+(x-y)=0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x-1)=0 \Leftrightarrow y=x$ hoặc $y=1-x$.

- Với $y=x$, suy ra: $\sqrt{2x-1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.
- Với $y=1-x$, suy ra: $\sqrt{2x-1}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2-\sqrt{2}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1,\ x=2-\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$ (*)

Phân tích. *Để kiểm tra phương trình có nghiệm hữu tỉ hay vô tỷ, ta nhập vào casio:* $X^2-4X-3-\sqrt{X+5}$ *và bấm* ***shift solve 1*** *(1 là số nguyên bất kỳ nằm trong khoảng điều kiện) được kết quả* $X=5.192582404$ *là vô tỷ. Khi đó định hướng tìm lượng nhân tử bậc hai bằng chức năng table. Trước tiên ta lưu biến* $X \to A$, *bằng cách nhập* ***alpha) shift RCL (–)****. Kế đến ta chuyển về chế độ table bằng cách bấm* ***mode setup 7*** *và nhập* $f(X)=A^2-AX$ *bằng cách bấm:* ***alpha () x² – alpha (–) anpha)****, rồi bấm = . Nếu casio fx – 570 VN plus hoặc vina calc, ta sẽ bấm tiếp tục dấu =, còn fx – 570 ES thì không cần (tức không nhập* $g(X)$ *), cho Start là -9, End là 9, Step là 1 thì casio cho ta bảng giá trị*

	X	F(X)
14	4	6.1925
15	5	1

và ta chỉ quan tâm đến dòng có giá trị là số nguyên, tức dòng 15 có $X=5,\ F(X)=1$, *đó chính là hệ số b, c của nhân tử* x^2-bx-c, *tức có* x^2-5x-1. *Lúc này ta sẽ quyết định lũy thừa 2 vế theo công thức* $\sqrt{A}=B$ *được phương trình bậc bốn, sau đó lấy phương trình bậc bốn này chia cho lượng* x^2-5x-1 *sẽ thu được bậc 2 và viết lại tích của 2 bậc hai.*

Lời giải 1. Xem đây là phương trình dạng $\sqrt{A}=B$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-3 \geq 0 \\ (x^2-4x-3)^2=x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2-\sqrt{7} \ \vee \ x \geq 2+\sqrt{7} \\ x^4-8x^3+10x^2+23x+4=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2-\sqrt{7} \ \vee \ x \ge 2+\sqrt{7} \\ (x^2-5x-1)\cdot(x^2-3x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \text{ hoặc } x=-1.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=-1,\ x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\cdot$

Lời giải 2. Đặt một ẩn phụ đưa về hệ đối xứng.

Đặt: $y-2=\sqrt{x+5}\ge 0,$ suy ra: $\begin{cases}(y-2)^2=x+5\\ x^2-4x-3=y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y-x-1=0\\ x^2-4x-y-1=0\end{cases}$

$$\Rightarrow (y^2-x^2)-3(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x\\ y=3-x\end{array}\right.\cdot$$

- Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{x+5}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\cdot$
- Với $y=3-x,$ suy ra: $\sqrt{x+5}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x^2-3x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=-1,\ x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\cdot$

Bình luận. *Trong lời giải 1, để nâng lũy thừa, ta thường sử dụng hằng đẳng thức 3 số dạng $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2.(ab+bc+ca)$ để khai triển. Tuy cách giải 1 giúp chúng ta tách các đa thức bậc cao thành tích số, nhưng tính toán khá phức tạp, dễ dẫn đến những sai lầm và mất nhiều thời gian. Do đó người giải toán thường tìm những phương pháp đơn giản, ngắn gọn hơn và điển hình đó là lời giải 2 của 2 ví dụ. Phương pháp đặt ẩn phụ sẽ tìm hiểu kỹ bài học sau với dấu hiệu nhận dạng nhất định.*

Ví dụ 3. Giải phương trình: $2(x^2-x+6)=5\sqrt{x^3+8}$ (*)

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An

Phân tích. *Khác với hai ví dụ trên, biểu thức trong căn thức là bậc 3, ta vẫn giải theo công thức $\sqrt{A}=B,$ để thu được phương trình bậc bốn. Lúc đó với sự hỗ trợ của máy tính casio, ta sẽ phân tích được thành tích số dạng bậc 2 nhân bậc 2.*

Lời giải 1. Điều kiện: $x^3+8\ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -2.$

$$(*) \Leftrightarrow 8.(x^2-x+6)^2=25(x^3+8) \Leftrightarrow 8x^4-41x^3+104x^2-96x+88=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-6x-4)(8x^2-18x+28)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x-4=0\\ 8x^2-18x+28=0: VN\end{array}\right. \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=3\pm\sqrt{13}.$

Lưu ý: Ta có thể giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ sau khi biến đổi phương trình về dạng: $2(x+2)+2(x^2-2x+4)=5\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}$ (1)

Lời giải 2. Đặt $u=\sqrt{x+2}\ge 0,\ v=\sqrt{x^2-2x+4}\ge\sqrt{3}.$

$(1) \Leftrightarrow 2u^2 + 2v^2 = 5uv \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\cdot\frac{u}{v} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} = 2$ hoặc $\frac{u}{v} = \frac{1}{2}\cdot$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} u = 2v \\ 2u = v \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-2x+4} \\ 2\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2-2x+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 9x + 14 = 0 \\ x^2 - 6x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}.$

Lời giải 3. Chia hai vế cho lượng dương: $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \geq 3.$

$$(1) \Leftrightarrow 2\cdot\frac{x+2}{x^2-2x+4} - 5\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}} = 2 \\ \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = 4(x^2-2x+4) \\ 4(x+2) = x^2 - 2x + 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\sqrt{7 - x^2 + x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ (*)

Phân tích. *Phương trình có dạng cơ bản:* $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ hay } B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$*, khi đó có 2 phương án chọn* $A \geq 0$ *hay* $B \geq 0$*. Dựa vào đặc điểm của bài toán, ta nên chọn phương án nào đơn giản nhất, tức chọn* $B = 3 - 2x - x^2 \geq 0$ *và có lời giải như sau:*

Lời giải. Phương trình $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x - x^2 \geq 0 \\ 7 - x^2 + x\sqrt{x+5} = 3 - 2x - x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+5} = -\dfrac{x+2}{x} \end{cases}$ (do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{x+2}{x} \geq 0 \\ x^2(x+5)^2 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -2 \leq x < 0 \\ x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \pm 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1.$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $2\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2\sqrt{2x-1}$ (*)

Phân tích. *Phương trình có dạng cơ bản* $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{C}$*, ta sẽ đặt điều kiện, chuyển vế sao cho 2 vế đều dương và bình phương hai vế để đưa về dạng* $\sqrt{A} = B.$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1.$ Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1} = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow 4(3x+1) = x - 1 + 4(2x-1) + 4\sqrt{(x-1)(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2x^2-3x+1}=3x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 23x^2-102x-65=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=5.$

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-7x-2}=2\sqrt{x^2-x+1}-1 \qquad (*)$

Phân tích. *Phương trình có dạng giống ví dụ trên, ta dám lựa chọn hướng bình phương 2 vế lên là do sau khi lũy thừa, bậc cao nhất $4x^2$ sẽ triệt tiêu và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\le -\dfrac{1}{4}$ hoặc $x\ge 2.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-7x-2}+1=2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow (\sqrt{4x^2-7x-2}+1)^2=4(x^2-x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2-7x-2}=3x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5\ge 0 \\ 7x^2-58x-33=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{29\pm 4\sqrt{67}}{7}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{29\pm 4\sqrt{67}}{7}\cdot$

Ví dụ 7. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-x}-2\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+2x}=0 \qquad (*)$

Phân tích. *Phương trình có dạng tương tự như ví dụ trên, nhưng khi bình phương lên thì sẽ không triệt tiêu được bậc cao nhất. Nhận thấy rằng **biểu thức trong các căn thức có chung một nghiệm** $x=0$ nên ta **sẽ dùng phương pháp chia khoảng và tách căn**. Nghĩa là đi tìm điều kiện, dựa vào các khoảng điều kiện để áp dụng các công thức tách căn hợp lý, tức: $\sqrt{A.B}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$ khi $A\ge 0,\ B\ge 0$ và $\sqrt{A.B}=\sqrt{(-A)\cdot(-B)}$ $=\sqrt{-A}.\sqrt{-B}$ khi $A<0,\ B<0$. Từ đó, ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x\ge 0,\ x^2\ge 0 \\ x^2+2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$ hoặc $\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -2 \end{array}\right.\cdot$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2} \qquad (1)$

- Trường hợp 1. Nếu $x=0$ thì (1) luôn đúng nên $x=0$ là 1 nghiệm của (1).
- Trường hợp 2. Nếu $x\ge 1$ thì $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+2}=2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$

  $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})^2=(2\sqrt{x})^2$

  $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-2}=2x-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{8},\ (\text{do}: x\ge 1).$

- Trường hợp 3. Nếu $x\le -2 \Rightarrow x-1<0;\ x+2\le 0$ nên:

  $(1) \Leftrightarrow \sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x+1}+\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x-2}=2\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x} \Leftrightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{-x-2}=2\sqrt{-x}$

  $\Leftrightarrow (\sqrt{1-x}+\sqrt{-x-2})^2=(2\sqrt{-x})^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-2}=1-2x:$ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=0;\ x=\dfrac{9}{8}\cdot$

Ví dụ 8. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$ (*)

Phân tích. *Phương trình có dạng cơ bản* $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$, *khi đó hướng xử lý là lập phương hai vế và thường sử dụng hằng đẳng thức* $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, *rồi thay thế* $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ *vào phương trình thu được sau khi lập phương và giải phương trình hệ quả dạng* $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\left[g(x)\right]^3$. *Từ đó có lời giải sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1})^3=(\sqrt[3]{x-1})$

$\Leftrightarrow 4x+2+3.\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\cdot(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1})=x-1$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}.(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1})=-(x+1)$ (1)

Thế: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$ vào (1), suy ra: $\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)}=-(x+1)$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3\Leftrightarrow (x+1).\left[(3x+1)(x-1)+(x+1)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+1)4x^2=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=0$.

- Với $x=-1$ thì phương trình $(*)$ sai nên loại nghiệm $x=-1$.
- Với $x=0$ thì phương trình $(*)$ đúng nên nhận nghiệm $x=0$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Ví dụ 9. Giải phương trình: $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$ (*)

Phân tích. *Phương trình có dạng:* $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D}$ *với* $A+C=B+D$, *cụ thể:* $(10x+1)+(2x-2)=(9x+4)+(3x-5)=12x-1$, *nên ta sẽ chuyển vế đưa về dạng:* $\sqrt{A}-\sqrt{C}=\sqrt{D}-\sqrt{B}$ *và bình phương hai vế. Nhưng do khi chuyển vế và bình phương là ta đã giải phương trình hệ quả, vì vậy khi giải xong ta cần thay thế nghiệm vào phương trình đầu đề bài nhằm nhận, loại nghiệm thích hợp.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{5}{3}$, thì $(*)\Leftrightarrow\sqrt{10x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{9x+4}-\sqrt{3x-5}$

$\Rightarrow(\sqrt{10x+1}-\sqrt{2x-2})^2=(\sqrt{9x+4}-\sqrt{3x-5})^2$

$\Leftrightarrow 12x-1-2\sqrt{(10x+1)(2x-2)}=12x-1-2\sqrt{(9x+4)(3x-5)}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(10x+1)(2x-2)}=\sqrt{(9x+4)(3x-5)}\Leftrightarrow 7x^2-15x-18=0\Leftrightarrow x=3, x=-\frac{6}{7}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$, phương trình có nghiệm $x=3$.

Ví dụ 10. Giải phương trình: $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7}=2\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}$ (*)

Phân tích. *Nếu biến đổi* $2\sqrt{2x-3}=\sqrt{8x-12}$ *thì phương trình đã cho đưa về giống như thí dụ trên với* $(8x-12)+(x+7)=(5x-6)+(4x+1)=9x-5$ *và có lời giải sau:*

Điều kiện: $2x-3\ge 0.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow \sqrt{x+7}-\sqrt{8x-12}=\sqrt{5x-6}-\sqrt{4x+1}$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+7}-\sqrt{8x-12})^2=(\sqrt{5x-6}-\sqrt{4x+1})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+7)(8x-12)}=\sqrt{(5x-6)(4x+1)}\Leftrightarrow 12x^2-63x+78=0\Leftrightarrow x=\frac{13}{4},\ x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$, phương trình có nghiệm $x=\dfrac{13}{4}\cdot$

Ví dụ 11. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-x+1}$ $\quad(*)$

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa

Phân tích. *Phương trình có dạng* $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}+\sqrt{D}$ *với* $A.C=B.D,$ *cụ thể ta có* $\dfrac{x^3+1}{x+3}\cdot(x+3)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1,$ *nên sẽ viết về dạng* $\sqrt{A}-\sqrt{C}=\sqrt{D}-\sqrt{B}$ *và bình phương để giải phương trình hệ quả. Từ đó có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1.$

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x+3}+x+3-2\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}\cdot\sqrt{x+3}=x^2-x+1+x+1-2\sqrt{x^2-x+1}\cdot\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^3+1=(x+3)(x^2-x+1)\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}\ \text{ hoặc }\ x=1+\sqrt{3}.$$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$ nghiệm cần tìm là $x=1\pm\sqrt{3}.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}.$

BT 2. Giải phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}.$

BT 3. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2-42x+49}-1=3\sqrt{x^2-6x+6}.$

BT 4. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+10x+8}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$

BT 5. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x^2-4x+1}.$

BT 6. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0.$

BT 7. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}.$

BT 8. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}.$

BT 9. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-4x+3}.$

BT 10. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{8x^3-1}{2x+3}}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{4x^2+2x+1}-\sqrt{2x+3}.$

§2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ TÍCH

☆☆☆

I. Sử dụng phép biến đổi tương đương

Dùng các phép biến đổi , đồng nhất kết hợp với việc tách , nhóm, ghép thích hợp để đưa phương trình đã cho về dạng tích số đơn giản hơn và biết cách giải, chẳng hạn như: $A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ hoặc $B = 0...$

Một số biến đổi thường gặp:

- $f(x) = ax^2 + bx + c = a.(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $f(x) = 0$.
- Dùng các hằng đẳng thức cơ bản, lưu ý các biến đổi thường gặp sau:
  + $u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u-1) - v(u-1) = 0 \Leftrightarrow (u-1)(1-v) = 0 \Leftrightarrow u = v = 1$.
  + $au + bv = ab + vu \Leftrightarrow a(u-b) - v(u-b) = 0 \Leftrightarrow (u-b)(a-v) = 0$.

Ví dụ 12. Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$ (*)

Phân tích. *Thấy vế phải phân tích được thành tích số:* $x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$ *dựa vào* $f(x) = ax^2 + bx + c = a.(x - x_1)(x - x_2)$ *với* x_1, x_2 *là 2 nghiệm của phương trình* $f(x) = 0$, *nên sẽ có nhân tử* $x + 3$ *với vế trái và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $10 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10}$.

$$(*) \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10-x^2} = (x+3)(x-4) \Leftrightarrow (x+3).\left[\sqrt{10-x^2} - (x-4)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ \sqrt{10-x^2} = x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } \begin{cases} x \ge 4 \\ 2x^2 - 10x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3$.

Ví dụ 13. Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x} = 1$ (*)

Phân tích. *Với điều kiện* $x \ge 0$ *thì phương trình* $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$ *và có dạng* $u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0 \Leftrightarrow u = v = 1$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 - \sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \text{ hoặc } \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 0.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 0$, $x = 1$.

Ví dụ 14. Giải phương trình: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$ (*)

Phân tích. *Sử dụng phân tích* $\sqrt{-x^2+8x-7} = \sqrt{(x-1)(7-x)}$ *và ghép từng cặp lại với nhau sẽ xuất hiện nhân tử chung và đưa được về tích số.*

Lời giải. Điều kiện: $1 \le x \le 7$.

$$(*) \Leftrightarrow \left[(x-1)-2\sqrt{x-1}\right]+\left[2\sqrt{7-x}-\sqrt{(x-1).(7-x)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2)+\sqrt{7-x}(2-\sqrt{x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-2).(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=2\\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=4\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=4,\ x=5.$

Ví dụ 15. Giải phương trình: $x+2\sqrt{5-x}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{10+3x-x^2}-2 \qquad (*)$

Học sinh giỏi tỉnh Kiên Giang năm 2014 – 2015

Phân tích. *Tương tự thí dụ trên, thấy* $\sqrt{10+3x-x^2}=\sqrt{(x+2)(5-x)}$ *nên ghép các biểu thức thích hợp với nhau sẽ đưa được về phương trình tích số và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-2\le x\le 5.$

$$(*) \Leftrightarrow \left[(x+2)-\sqrt{(x+2)(5-x)}\right]+\left[2\sqrt{5-x}-2\sqrt{x+2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x})-2(\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x})=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x})(\sqrt{x+2}-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=\sqrt{5-x}\\ \sqrt{x+2}=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=2\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\dfrac{3}{2},\ x=2.$

Ví dụ 16. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\dfrac{6}{x}+5} \qquad (*)$

Phân tích. *Nếu quy đồng và phân tích* $\sqrt{x+\dfrac{6}{x}+5}=\sqrt{\dfrac{x^2+5x+6}{x}}=\sqrt{\dfrac{(x+2)(x+3)}{x}},$ *rồi nhóm với cụm* $\sqrt{x^2+3x}=\sqrt{x(x+3)}$ *sẽ xuất hiện nhân tử và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x>0.$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}}\right]+(2\sqrt{x+2}-2x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x+2}{x}}\right)+2(\sqrt{x+2}-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\cdot\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}+2(\sqrt{x+2}-x)=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-x)\left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=x\\ \sqrt{x+3}=2\sqrt{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\ x+3=4x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\pm 1\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm $x=1,\ x=2.$

_Ví dụ 17._ Giải: $x\sqrt{2x+3}+3(\sqrt{x+5}+1)=3x+\sqrt{2x^2+13x+15}+\sqrt{2x+3}$ (*)

Phân tích. *Nếu quan sát kỹ, phương trình chỉ chứa 2 căn thức* $\sqrt{2x+3},\ \sqrt{x+5}$ *sau khi phân tích* $\sqrt{2x^2+13x+15}=\sqrt{(2x+3)(x+5)}$ *và nhóm nhân tử chung phù hợp sẽ xuất hiện phương trình tích số và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $3x+2\geq 0$.

$$(*)\Leftrightarrow (x\sqrt{2x+3}-3x)=\left[\sqrt{(2x+3)(x+5)}+\sqrt{2x+3}\right]-3(\sqrt{x+5}+1)$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{2x+3}-3)=\sqrt{2x+3}(\sqrt{x+5}+1)-3(\sqrt{x+5}+1)$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{2x+3}-3)=(\sqrt{x+5}+1)(\sqrt{2x+3}-3)\Leftrightarrow(\sqrt{2x+3}-3)(x-\sqrt{x+5}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+3}=3\\ \sqrt{x+5}=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=4\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=3,\ x=4$.

_Ví dụ 18._ Giải phương trình: $3x^2+3x+2=(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}$ (*)

Phân tích. *Do biểu thức trong và ngoài dấu căn cùng là bậc hai, nên ta nghĩ đến việc phân tích biểu thức ngoài dấu căn theo biểu thức trong dấu căn, cụ thể ở đây tôi viết:* $3x^2+3x+2=(3x^2-2x-3)+5(x+1)$ *và xuất hiện thêm hạng tử có chứa* $(x+1)$, *nên phân tích:* $(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}=\left[(x+1)+5\right]\cdot\sqrt{3x^2-2x-3}$, *rồi phân phối và ghép hạng tử phù hợp sẽ đưa được về phương trình dạng tích, từ đó có lời giải 1.*

Điều kiện: $-6<x<\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ hoặc $x>\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải 1. Tách ghép đưa về phương trình tích số.

$$(*)\Leftrightarrow(3x^2-2x-3)+5\cdot(x+1)=(x+1)\cdot\sqrt{3x^2-2x-3}+5\cdot\sqrt{3x^2-2x-3}$$

$$\Leftrightarrow\left[(\sqrt{3x^2-2x-3})^2-5\sqrt{3x^2-2x-3}\right]+\left[5(x+1)-(x+1)\sqrt{3x^2-2x-3}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3x^2-2x-3}(\sqrt{3x^2-2x-3}-5)+(x+1)(5-\sqrt{3x^2-2x-3})=0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{3x^2-2x-3}-5)(\sqrt{3x^2-2x-3}-x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x^2-2x-3}=5\\ \sqrt{3x^2-2x-3}=x+1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2x-28=0\\ \begin{cases}x\geq-1\\ 2x^2-4x-4=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{85}}{3}\vee x=\dfrac{1-\sqrt{85}}{3}\\ x=1+\sqrt{3}\vee x=1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1\pm\sqrt{3},\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{85}}{3}$.

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Đặt $t=\sqrt{3x^2-2x-3}>0 \Rightarrow t^2=3x^2-2x-3 \Leftrightarrow 3x^2=t^2+2x+3.$ Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow t^2+2x+3+3x+2=(x+6).t \Leftrightarrow t^2-(x+6).t+5(x+1)=0 \qquad (1)$

Xem (1) là phương trình bậc 2 với ẩn là t và có biệt số:

$\Delta_t=(x+6)^2-20(x+1)=x^2-8x+16=(x-4)^2,$ suy ra: $t=x+1$ hoặc $t=5.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x^2-2x-3}=5\\ \sqrt{3x^2-2x-3}=x+1\end{array}\right.$ và giải tương tự như cách giải 1.

Bình luận. *Phương trình có dạng* $ax^2+bx+c=(mx+n).\sqrt{ax^2+px+q},$ *ta sẽ giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn nếu biệt số Δ là số chính phương. Bản chất của phương pháp cũng là một hình thức đưa về tích số.*

Lời giải 3. Liên hợp sau khi sử dụng casio tìm được nhân tử chung của phương trình là $3x^2-2x-28.$

$(*) \Leftrightarrow (x+6)(\sqrt{3x^2-2x-3}-5)=3x^2-2x-28$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+6)(3x^2-2x-28)}{\sqrt{3x^2-2x-3}+5}=3x^2-2x-28 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-2x-28=0\\ \dfrac{x+6}{\sqrt{3x^2-2x-3}+5}=1\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-2x-28=0\\ \sqrt{3x^2-2x-3}=x+1\end{array}\right.$ và giải tương tự như cách 1.

Nhận xét. *Đối với bài toán trên, tôi không tìm được lượng nhân tử chung bằng chức năng table của casio. Khi đó ta sẽ tìm hai nghiệm và dựa vào định lý Viét để tìm ra nhân tử chung như sau: nhập* $3X^2+3X+2-(X+6)\sqrt{3X^2-2X-3}$ *và bấm shift solve* -100 *được nghiệm là* $X=-2{,}739848152,$ *gán nghiệm này vào biến A, tức bấm* $Ans \to A,$ $(Ans / shift / RCL / (-)).$ *Tìm nghiệm thứ hai bằng cách nhập lại phương trình và bấm shift solve* 100 *ta được nghiệm* $X=3.406514819,$ *rồi cũng lưu nghiệm này vào biến B:* $Ans \to B,$ $(Ans / shift / RCL / \circ,,,).$ *Khi đó ta tính tổng, tích của A và B được* $A+B=0{,}6666666667=\dfrac{2}{3}$ *và* $AB=-\dfrac{28}{3}$ *nên theo Viét thì* $A,$ B *là 2 nghiệm của* $X^2-SX+P=0,$ *tức có nhân tử* $x^2-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{28}{3}$ *hay* $3x^2-2x-28.$

Ví dụ 19. Giải phương trình: $x^2-4x+(x-3)\sqrt{x^2-x-1}-1=0 \qquad (*)$

Phân tích. *Do biểu thức trong và ngoài dấu căn cùng là bậc hai, nên ta nghĩ đến việc phân tích biểu thức ngoài dấu căn theo biểu thức trong dấu căn, cụ thể ở đây tôi viết:* $x^2-4x-1=(x^2-x-1)-3x$ *và xuất hiện thêm hạng tử có chứa* $3x,$ *nên sẽ phân tích:* $(x-3)\sqrt{x^2-x-1}=x\sqrt{x^2-x-1}-3\sqrt{x^2-x-1}$ *và ghép hạng tử phù hợp sẽ xuất hiện nhân tử chung và đưa được về phương tình tích số. Từ đó có lời giải 1.*

Điều kiện: $x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải 1. Tách ghép đưa về tích số.

$$(*) \Leftrightarrow \left[(x^2 - x - 1) + x\sqrt{x^2 - x - 1}\right] - (3x + 3\sqrt{x^2 - x - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{x^2 - x - 1})^2 + x\sqrt{x^2 - x - 1}\right] - 3(x + \sqrt{x^2 - x - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1}(\sqrt{x^2 - x - 1} + x) - 3(x + \sqrt{x^2 - x - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - x - 1} + x)\cdot(\sqrt{x^2 - x - 1} - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2 - x - 1} = -x \\ \sqrt{x^2 - x - 1} = 3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x \geq 0 \\ -x - 1 = 0\end{cases} \\ x^2 - x - 1 = 9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2}\end{array}\right.$$: thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = -1,\ x = \dfrac{1-\sqrt{41}}{2},\ x = \dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$.

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x - 1} \geq 0$, suy ra: $t^2 = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^2 = t^2 + x + 1$. Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow t^2 + x + 1 - 4x + (x-3).t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + (x-3).t - 3x = 0 \qquad (1)$

Xem (1) là phương trình bậc hai với ẩn là t và có biệt số:

$$\Delta_t = (x-3)^2 + 12x = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2,\ \text{suy ra: } \left[\begin{array}{l}t = -x \\ t = 3\end{array}\right..$$

Với $t = \sqrt{x^2 - x - 1}$ và giải ra cũng được kết quả như trên.

Lời giải 3. Ghép để liên hợp sau khi tìm nhân tử $x^2 - x - 10$ bằng casio.

$$(*) \Leftrightarrow (x^2 - x - 10) + (x-3)\left[\sqrt{x^2 - x - 1} - 3\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 10) + \frac{(x-3).(x^2 - x - 10)}{\sqrt{x^2 - x - 1} + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 - x - 10 = 0 \\ 1 + \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2 - x - 1} + 3} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 - x - 10 = 0 \\ \sqrt{x^2 - x - 1} = -x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \\ x = -1\end{array}\right..$$

Ví dụ 20. Giải phương trình: $2x^2 - 6x + 10 - 5.(x-2)\sqrt{x+1} = 0 \qquad (*)$

Phân tích. *Khác với các thí dụ trên, biểu thức trong căn thức là bậc nhất và có dạng tổng quát là* $ax^2 + bx + c = (dx + e).\sqrt{\alpha x + \beta}$. *Khi đó sẽ phân tích biểu thức ngoài dấu căn theo biểu thức tích mang dấu căn bằng đồng nhất thức, nghĩa là biểu diễn* $2x^2 - 6x + 10 = m.(x-2)^2 + n.(\sqrt{x+1})^2 = mx^2 + (n - 4m).x + (n + 4m)$ *và so sánh hệ*

số trước x^2, x và hệ số tự do được $m = n = 2$. Khi đó, ta có 2 hướng xử lý thường gặp là tách ghép đưa về tích số hoặc đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp, hoặc chia cho lượng dương để đưa về phương trình bậc 2.

Điều kiện: $x \geq -1$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 2(x-2)^2 + 2(\sqrt{x+1})^2 - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0 \quad (1)$

➢ ***Lời giải 1***. Tách ghép đưa về tích số.

$$(1) \Leftrightarrow \left[2(x-2)^2 - (x-2)\sqrt{x+1}\right] + \left[2(\sqrt{x+1})^2 - 4(x-2)\sqrt{x+1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[2(x-2) - \sqrt{x+1}\right] + 2\sqrt{x+1}\left[\sqrt{x+1} - 2(x-2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2(x-2) - \sqrt{x+1}\right]\cdot\left[(x-2) - 2\sqrt{x+1}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1} = 2(x-2)\\ 2\sqrt{x+1} = x-2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 2\\ x+1 = 4(x^2-4x+4)\end{cases}\\ \begin{cases}x \geq 2\\ 4(x+1) = x^2-4x+4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 2\\ 4x^2-17x+15 = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x \geq 2\\ x^2-8x = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3\\ x = 8\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 3,\ x = 8$.

➢ ***Lời giải 2***. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp.

Đặt $a = x-2,\ b = \sqrt{x+1} \geq 0$. Do $x = -1$ là nghiệm nên $b = \sqrt{x+1} > 0$, thì:

$$(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 5ab = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\cdot\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = 2b\\ 2a = b\end{array}\right..$$

Thế vào và giải tương tự như trên cũng được nghiệm là $x = 3,\ x = 8$.

➢ ***Lời giải 3***. Chia cho lượng dương đưa về phương trình bậc 2.

Do $x = -1$ là nghiệm nên chia hai vế cho $(\sqrt{x+1})^2 > 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}\right)^2 - 5\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+1}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+1}} = 2 \text{ hoặc } \frac{x-2}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\cdot$$

Giải tương tự như trên cũng được $x = 3,\ x = 8$.

➢ ***Lời giải 4***. Ghép bậc nhất $ax+b$ với căn thức để nhân lượng liên hợp sau khi sử dụng casio nhẩm được 2 nghiệm $x = 3,\ x = 8$.

$$(*) \Leftrightarrow (x-2).\left[(x+7) - 5\sqrt{x+1}\right] + x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2-11x+24)}{5\sqrt{x+1} + x + 7} + (x^2 - 11x + 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-11x+24)\cdot\left(\frac{x-2}{5\sqrt{x+1}+x+7} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-11x+24 = 0\\ 5\sqrt{x+1} + x + 7 = 2 - x\end{array}\right.$$

Giải tương tự như trên, ta cũng được kết quả $x = 3,\ x = 8$.

II. Kỹ thuật nhân lượng liên hợp để đưa về tích số

Nhân lượng liên hợp là một hình thức trục căn thức bằng hằng đẳng thức để sau khi liên hợp xuất hiện nhân tử chung và kết thúc bằng việc giải phương trình tích số. Ta thường bắt gặp những loại cơ bản sau:

Biểu thức	Biểu thức nhân liên hợp	Thu được
$\sqrt{A}\mp\sqrt{B}$	$\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$	$\dfrac{A-B}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}$
$\sqrt{A}\mp B$	$\sqrt{A}\pm B$	$\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}\pm B}$
$\sqrt[3]{A}\mp\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2}\pm\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$	$\dfrac{A\mp B}{\sqrt[3]{A^2}\pm\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}$
$\sqrt[3]{A}\mp B$	$\sqrt[3]{A^2}\pm B\sqrt[3]{A}+B^2$	$\dfrac{A\mp B^3}{\sqrt[3]{A^2}\pm B\sqrt[3]{A}+B^2}$

Phân tích bài toán và hướng tư duy đi đến lời giải (tương tự cho $\sqrt[3]{f(x)}$)

Giả sử phương trình có dạng: $\boxed{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}+h(x)=0}$ xác định trên D.

- **<u>Hướng 1</u>**. Nếu lấy $f(x)-g(x)$ và phân tích biểu thức $h(x)$ thành nhân tử mà có nhân tử chung với $f(x)-g(x)$ thì ta tiến hành ghép hai căn thức lại với nhau và liên hợp. Chẳng hạn đề thi học sinh giỏi tỉnh Quảng Nam 2014 có câu giải: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3,$ ta sẽ ghép: $(3x-2)-(x+1)=2x-3$ và phân tích $2x^2-x-3=(2x-3)(x+1)$ có nhân tử chung $2x-3$ nên sẽ tiến hành nhân lượng liên hợp. Trong trường hợp ghép $f(x)-g(x)$ không xuất hiện nhân tử chung với $h(x),$ ta sẽ tư duy sang một trong những hướng sau:
- **<u>Hướng 2</u>**. Nếu chỉ nhẩm được một nghiệm $x=x_o \xrightarrow{PP}$ ghép hằng số.

  Sử dụng máy tính bỏ túi, nhập: $\sqrt{f(X)}-\sqrt{g(X)}+h(X)$ và bấm shift solve, để tìm nghiệm $x=x_o$. Để kiểm tra phương trình còn nghiệm hay không, ta sửa lại cấu trúc: $(\sqrt{f(X)}-\sqrt{g(X)}+h(X)):(X-x_o)$ và bấm shift solve, nếu máy tính báo Can't Solve thì chứng tỏ phương trình không còn nghiệm. Còn nếu phương trình có thêm một nghiệm nữa, ta sẽ chuyển sang hướng 3.

  Khi đã nhẩm được duy nhất một nghiệm $x=x_o$ thì ta sẽ ghép căn với hằng số m, n để liên hợp và hai số này tìm bằng cách cho $x=x_o$ vào hai căn thức, với: $m=\sqrt{f(x_o)}, n=\sqrt{g(x_o)}$ (giá trị của căn thức tại $x=x_o$). Lúc này, sẽ ghép: $[\sqrt{f(x)}-m]+[n-\sqrt{g(x)}]+h(x)+m-n=0$ và liên hợp từng cụm sẽ xuất hiện nhân tử chung với $h(x)+m-n.$ Chẳng hạn như đề thi Đại học

khối B năm 2010 có câu: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0.$ Nếu ghép từng căn thức lại với nhau để liên hợp thì sẽ không xuất hiện nhân tử chung với biểu thức ngoài dấu căn. Ta sẽ sử dụng máy tính và dự đoán được nghiệm là $x=5$ nên sẽ ghép hai hằng số $m=\sqrt{3.5+1}=4$ dạng: $(\sqrt{3x+1}-4)$ và $n=\sqrt{6-5}=1$ dạng: $(1-\sqrt{6-x})$ rồi liên hợp sẽ xuất hiện nhân tử $x-5.$ Biểu thức ngoài căn là: $3x^2-14x-5=(x-5)(3x-1)$: cũng có nhân tử $x-5.$

➢ **<u>Hướng 3</u>**: Nhẩm được hai nghiệm đẹp $x=x_1,\ x=x_2 \xrightarrow{PP}$ ghép $ax+b.$

Để liên hợp triệt để, ta sẽ ghép căn với biểu thức bậc nhất $ax+b$ cho từng căn thức để liên hợp. Hai số hằng số $a,\ b$ của bậc nhất này tìm bằng cách giải hệ: Đối với căn $\sqrt{f(x)}$ ta sẽ giải hệ: $\begin{cases}\sqrt{f(x_1)}=ax_1+b\\ \sqrt{f(x_2)}=ax_2+b\end{cases}\Rightarrow a,\ b$ và sẽ làm tương tự với căn thức $\sqrt{g(x)}.$ Thí dụ giải: $2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13.$ Do ta đã nhẩm được hai nghiệm: $x=0,\ x=-1$ nên sẽ ghép bậc nhất $ax+b$ cho từng căn và liên hợp. Cụ thể tìm $ax+b$ để ghép với căn $\sqrt{3x+4}$ bằng cách giải hệ: $\begin{cases}\sqrt{3.0+4}=a.0+b\\ \sqrt{3.(-1)+4}=a.(-1)+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ a=1\end{cases}$ nên ghép: $2\left[\sqrt{3x+4}-(x+2)\right]$ và tương tự đối với $\sqrt{5x+9}$ sẽ tìm được lượng ghép: $3.\left[\sqrt{5x+9}-(x+3)\right].$

Xử lý sau khi nhân lượng liên hợp

Mong muốn của việc nhân lượng liên hợp là tạo ra phương trình tích số dạng $(x-x_o)\cdot f(x)=0$ hoặc dạng $(ax^2+bx+c).f(x)=0.$ Một vướng mắc mà học sinh thường vấp phải là khi nào giải phương trình $f(x)=0,$ khi nào đánh giá $f(x)$ luôn dương hoặc luôn âm và sử dụng phương pháp nào để đánh giá ?!

Để trả lời câu hỏi đó, ta cùng tham khảo một số ý tưởng sau:

- Đối với phương trình $f(x)=0,$ ta nên kiểm tra xem còn nghiệm hay không bằng nhập $f(x)$ vào máy tính và bấm shift solve. Nếu phương trình có nghiệm $x\notin$ tập xác định hoặc vô nghiệm, thì khi đó ta tìm cách chứng minh vô nghiệm dựa vào các phương pháp thông thường như sau:
  + Tìm miền giá trị (tìm GTLN, GTNN của hàm $f(x)$), suy ra $f(x)$ luôn dương hoặc luôn âm trên tập xác định của bài toán.
  + Sử dụng các đánh giá cơ bản hoặc bất đẳng thức cổ điển…
- Đối với phương trình $f(x)=0$ còn nghiệm, thường giải bằng phương pháp:
  + Đưa về phương trình vô tỷ $(\sqrt{A}=B,\ \sqrt{A}=\sqrt{B},...)$ nếu $f(x)=0$ đơn giản.
  + Kết hợp đề bài tạo hệ tạm (đề dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=k$) và giải hệ này tìm $x.$
  + Kết hợp với các phương pháp khác để giải (đặt ẩn phụ, hàm số,…).

1. Liên hợp với phương trình có nghiệm hữu tỷ hoặc dễ xác định nhân tử.

★ **<u>Nhóm I</u>: Ghép hai căn thức để liên hợp và phân tích biểu thức còn lại**

<u>Ví dụ 21.</u> Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Quảng Nam năm 2014

<u>Lời giải</u>. Điều kiện: $x \ge \frac{2}{3}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}=2x^2-x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}-(2x-3)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}-(x+1)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}=x+1 \quad (1) \end{array}\right.$$

Ta có: $\forall x \ge \frac{2}{3}$ thì $f(x)=x+1 \ge \frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}>1$ (2)

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}$ có: $g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0,\ \forall x>\frac{2}{3}\cdot$

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ nên $h(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}$

nghịch biến trên $\left[\frac{2}{3};+\infty\right) \Rightarrow \max\limits_{\left[\frac{2}{3};+\infty\right)} h(x)=h\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{15}}{5}<1$ hay $h(x)<1$ (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra phương trình $f(x)=h(x)$ vô nghiệm hay (1) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3/2$.

<u>Bình luận</u>. *Sau khi liên hợp, để xử lý $f(x)$ trong $(2x-3).f(x)=0$ tôi đã nhập vào máy tính casio $\frac{1}{\sqrt{3X-2}+\sqrt{X+1}}-(X+1)$ và bấm shift calc, thấy casio hiển thị can't solve. Chứng tỏ rằng phương trình này vô nghiệm nên tìm cách chứng minh bằng cách tìm miền giá trị của hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ như trên. Hiển nhiên 2 hàm này không có chung miền giá trị nên sẽ vô nghiệm, phù hợp với dự đoán bằng casio. Câu hỏi đặt ra là khi nào sử dụng hàm số để đánh giá phương trình vô nghiệm ?!!*

→ *Khi tính đạo hàm $f'(x)$ dễ dàng hoặc tách ra dạng $g(x)=h(x)$ mà việc tìm miền giá trị của hai hàm không mấy khó khăn thì ta nên sử dụng phương pháp hàm số.*

<u>Ví dụ 22.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$ (*)

Đề thi thử Đại học khối D năm 2013 – THPT Lê Xoay – Vĩnh Phúc

Phân tích. *Khi ghép hiệu hai biểu thức trong căn* $3x-(x+1)=2x-1$ *và biểu thức* $4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$ *thì thấy có nhân tử chung, do đó tiến hành ghép 2 căn thức lại với nhau để liên hợp theo hằng đẳng thức:* $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\cdot$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\ge 0.$

$$(*)\Leftrightarrow(4x^2-1)+(\sqrt{3x}-\sqrt{x+1})=0\Leftrightarrow(2x-1)(2x+1)+\frac{2x-1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow(2x-1)\cdot\underbrace{\left(2x+1+\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right)}_{>\,0,\ \forall x\ge 0}=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\cdot$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Ví dụ 23. Giải phương trình: $3.(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6}$ (*)

Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự

Phân tích. *Rút gọn được* $(*)\Leftrightarrow 2.(3-x)=\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}=\sqrt{x+6}-\sqrt{9x-18}$ *và ghép* $(x+6)-(9x-18)=-8x+24=8.(3-x)$ *sẽ có nhân tử* $3-x$ *với vế trái nên sẽ ghép 2 căn thức lại với nhau để liên hợp và có lời giải sau:*

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $\begin{cases}x-2\ge 0\\ x+6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2.$ Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow 2.(3-x)=\sqrt{x+6}-\sqrt{9x-18}\Leftrightarrow 2.(3-x)=\frac{8.(3-x)}{\sqrt{x+6}+\sqrt{9x-18}}$$

$$\Leftrightarrow(3-x)\cdot\left(1-\frac{4}{\sqrt{x+6}+\sqrt{9x-18}}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\ \text{(TM)}\\ \sqrt{x+6}+\sqrt{9x-18}=4\qquad(1)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow 10x-12+2\sqrt{(x+6)(9x-18)}=16\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+36x+108}=14-5x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{14}{5}\\ 9x^2+36x+108=(14-5x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{14}{5}\\ 16x^2-176x+304=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{11-3\sqrt{5}}{2}\ \text{(TM)}$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=3,\ x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}\cdot$

Ví dụ 24. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$ (*)

Phân tích. *Do biểu thức trong hai căn thức luôn dương nên vế trái là tổng của các số dương. Để phương trình có nghiệm thì vế phải cũng phải luôn dương, tức điều kiện là* $x+4>0\Leftrightarrow x>-4$ *và đây được gọi là điều kiện kéo theo mà ta hay thường bỏ sót.*

Nhận thấy: $(2x^2+x+9)-(2x^2-x+1)=2(x+4)$ *nên ta sẽ ghép hai căn thức lại với nhau để liên hợp sẽ có cùng nhân tử* $x+4$ *với vế phải và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1})(\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1})}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4$$

$$(\text{do}: \sqrt{2x^2+x+9} \neq \sqrt{2x^2-x+1} \Leftrightarrow 2x \neq -8 \Leftrightarrow x \neq -4,\ \forall x>-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+4)}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2 \quad (1)$$

Kết hợp (1) với $(*)$, được hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases}$

Cộng lại vế theo vế, suy ra: $2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6 \Leftrightarrow 4(2x^2+x+9)=(x+6)^2$

$\Leftrightarrow 7x^2-8x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{8}{7}$: thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0,\ x=\dfrac{8}{7}\cdot$

Bình luận. *Nếu không tìm chính xác điều kiện thì vô tình nhận thêm nghiệm* $x=-4$, *mà nghiệm này không thỏa phương trình. Ngoài ra, khi liên hợp thu được phương trình* $f(x)=0$ *và kết hợp với đề bài được hệ phương trình, tôi gọi đây là phương pháp* ***đưa về hệ tạm*** *để giải phương trình vô tỷ. Vấn đề đặt ra là khi nào ta sử dụng hệ tạm sau khi liên hợp?!* $\xrightarrow{TL}$ *Thường thì đề bài có dạng* $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=ax+b.$

Một điều cần lưu ý nữa là khi nhân thêm dạng $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$, *(hay* $ax+b\pm\sqrt{f(x)}$*) ta cần xét lượng này có khác 0 hay chưa hoặc đối với bất phương trình thì xét xem nó dương hay âm để khi nhân cần đổi dấu của bất phương trình thích hợp (nhân âm đổi dấu, nhân dương không đổi dấu). Còn nếu không biết cần chia ra hai trường hợp.*

Ví dụ 25. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x \qquad (*)$

Phân tích. *Nhận thấy* $(6x^2-59x+149)-(x^2-9x+24)=5x^2-50+125=5(x-5)^2$ *sẽ có nhân tử chung* $x-5$ *nên sẽ ghép 2 căn thức lại với nhau để liên hợp.*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{6x^2-59x+149}-\sqrt{x^2-9x+24}=x-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{5.(x-5)^2}{\sqrt{6x^2-59x+149}+\sqrt{x^2-9x+24}}=x-5$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\cdot\left[\frac{5.(x-5)}{\sqrt{6x^2-59x+149}+\sqrt{x^2-9x+24}}-1\right]=0$$

$\Leftrightarrow x=5$ hoặc $\sqrt{6x^2-59x+149}+\sqrt{x^2-9x+24}=5.(x-5)$ (1)

Kết hợp $(*)$, (1), có hệ: $\begin{cases}\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x & (2)\\ \sqrt{6x^2-59x+149}+\sqrt{x^2-9x+24}=5.(x-5) & (3)\end{cases}$

Lấy $(2)+(3)$, suy ra: $\sqrt{x^2-9x+24}=2x-10\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 5\\ 3x^2-31x+76=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{19}{3}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=5,\ x=\dfrac{19}{3}\cdot$

Ví dụ 26. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-x-1}+x^2+2=\sqrt[3]{2x-3}+3x$ $(*)$

Phân tích. *Nhận thấy* $(x^2-x-1)-(2x-3)=x^2-3x+2$ *nên sẽ ghép hai căn này lại để liên hợp:* $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})\cdot(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})}{(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})}=\dfrac{A-B}{(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})}$ *thì sẽ xuất hiện nhân tử chung* x^2-3x+2, *từ đó có lời giải sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $a=\sqrt[3]{x^2-x-1};\ b=\sqrt[3]{2x-3}$

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x^2-x-1}-\sqrt[3]{2x-3})+(x^2-3x+2)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{(x^2-x-1)^2}+\sqrt[3]{(x^2-x-1)(2x-3)}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}}+(x^2-3x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-3x+2)\cdot\left(\frac{1}{a^2+ab+b^2}+1\right)=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$$

Nhận xét. *Trong phép nhân liên hợp của căn bậc ba, để đơn giản bài toán, ta nên đặt* $a=\sqrt[3]{A},\ b=\sqrt[3]{B}$. *Nguyên nhân của việc đặt này là dựa vào hằng đẳng thức quen thuộc:* $(a\pm b).(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$ *mà lượng:* $a^2\mp ab+b^2=\left(a\mp\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}\ge 0.$

Ví dụ 27. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$ $(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{x+1})+(\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{x+2})=0$ (1)

Đặt $a=\sqrt[3]{2x^2},\ b=\sqrt[3]{x+1},\ m=\sqrt[3]{2x^2+1},\ n=\sqrt[3]{x+2}$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-1}{a^2+ab+b^2}+\frac{2x^2-x-1}{m^2+mn+n^2}=0$$

$$\Leftrightarrow(2x^2-x-1)\cdot\left(\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{m^2+mn+n^2}\right)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=-\frac{1}{2}\cdot$$

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-0,5$ và $x=1$.

Ví dụ 28. Giải phương trình: $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})(x^2+\sqrt{x^2+4x+3})=2x$ (*)

Nhận xét. *Mục đích cuối cùng của nhân lượng liên hợp là xác định lượng nhân tử chung để đưa được về phương trình tích số. Nhưng trong một số trường hợp, ta liên hợp để độc lập đi biến x nhằm chuyển bài toán từ tình thế phức tạp, sang tình thế đơn giản hơn. Cụ thể đối với bài này, thấy $(x+3)-(x+1)=2$ đã độc lập được biến x nên sẽ liên hợp, tức nhân hai vế cho $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}\neq 0$ và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x>0$?!

$$(*)\Leftrightarrow x^2+\sqrt{(x+1)(x+3)}=x.(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1})$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x\sqrt{x+3})+\left[\sqrt{(x+1)(x+3)}-x\sqrt{x+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-\sqrt{x+3})+\sqrt{x+1}(\sqrt{x+3}-x)=0\Leftrightarrow (x-\sqrt{x+3})(x-\sqrt{x+1})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=x\\ \sqrt{x+1}=x\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 29. Giải: $(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+1}).(\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1})=3x^2$ (*)

Phân tích. *Nhận thấy $(5x^2+1)-(2x^2+1)=3x^2$ có nhân tử chung với vế phải nên ta tiến hành liên hợp và có lời giải sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

- Nhận thấy $x=0$ là một nghiệm của phương trình.
- Với $x\neq 0$, ta có: $(*)\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+1}}{\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}}\cdot 3x^2=3x^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{2x^2+1} \quad (1)$$

Do $x\neq 0$ thì $\sqrt{x^2+x+1}\neq\sqrt{4x^2+x+1}$ và $\sqrt{5x^2+1}\neq\sqrt{2x^2+1}$ nên:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{3x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{3x^2}{\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1} \quad (2)$$

Kết hợp (1), (2), suy ra: $\begin{cases}\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{2x^2+1} & (3)\\ \sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1} & (4)\end{cases}$

Lấy $(3)+(4)\Rightarrow \sqrt{4x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+1}\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x=0$ (loại) hoặc $x=1$ (TM)

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$, $x=1$.

Ví dụ 30. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\dfrac{5.(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}}$ (*)

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương

Phân tích. *Có* $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{16-4x}$ *và* $(x+1)-(16-4x)=5.(x-3)$ *nên sẽ ghép 2 căn thức với nhau để liên hợp và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 4$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+18}.(\sqrt{x+1}-\sqrt{16-4x})=5.(x-3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{5.(x-3)\sqrt{2x^2+18}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x}}=5.(x-3)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3:\ \text{TMĐK} \\ \sqrt{2x^2+18}=\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x} \quad (1)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow 2x^2+3x+1=4\sqrt{(x+1)(4-x)}\Leftrightarrow 4\sqrt{-x^2+3x+4}=2x^2+3x+1 \quad (2)$

Nhận xét. *Sử dụng casio dò được 2 nghiệm của phương trình là* $x=-1,\ x=\dfrac{3}{2},$ *hay luôn có nhân tử* $(x+1).(2x-3)=2x^2-x-3,$ *nên ta có ba hướng xử lý như sau:*

Hướng 1. Xem đây là dạng $\sqrt{A}=B$ và bình phương được phương trình bậc bốn, lúc đó sẽ chia Hoócner khi biết trước 2 nghiệm.

$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3x+1\ge 0 \\ 4x^4+12x^3+29x^2-42x-63=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \ \vee\ x\ge -\dfrac{1}{2} \\ (x+1)(2x-3)(2x^2-7x+21)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=\dfrac{3}{2}:$ thỏa mãn điều kiện.

Hướng 2. Tách ghép và liên hợp dựa vào nhân tử $2x^2-x-3$.

$(2)\Leftrightarrow (2x^2-x-3)+4.\left[(x+1)-\sqrt{-x^2+3x+4}\right]=0 \quad (3)$

Xét $x+1+\sqrt{-x^2+3x+4}=0\Leftrightarrow x=-1$ và thế vào (3) thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình (3).

Xét $x+1+\sqrt{-x^2+3x+4}\ne 0\Leftrightarrow x\ne -1,$ tức $x\in(-1;4]$. Khi đó:

$(3)\Leftrightarrow (2x^2-x-3)+\dfrac{4.(2x^2-x-3)}{x+1+\sqrt{-x^2+3x+4}}=0$

$\Leftrightarrow (2x^2-x-3)\cdot\underbrace{\left(1+\dfrac{4}{x+1+\sqrt{-x^2+3x+4}}\right)}_{>0,\forall x\in(-1;4].}=0\Leftrightarrow 2x^2-x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$

Hướng 3. Đưa về tổng các số không âm hoặc dạng $a^n=b^n$ với dấu hiệu là có hằng số chẵn trước căn thức.

$(2)\Leftrightarrow 4+2.2.\sqrt{-x^2+3x+4}+(-x^2+3x+4)=x^2+6x+9$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{-x^2+3x+4})^2=(x+3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+\sqrt{-x^2+3x+4}=x+3 \\ 2+\sqrt{-x^2+3x+4}=-x-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2+3x+4}=x+2 \\ \sqrt{-x^2+3x+4}+x+5=0 : VN_o \ \forall x\in\left[-1;4\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{3}{2}\cdot$$

Ví dụ 31. Giải phương trình: $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$ (*)

Phân tích. *Nhận thấy* $(2x-4)-(8-4x)=6x-4$ *có nhân tử chung với vế phải nên ta sẽ tiến hành ghép 2 căn thức với nhau để liên hợp và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-2\le x\le 2$.

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}.(\sqrt{2x+4}-\sqrt{8-4x})=6x-4 \Leftrightarrow \frac{(6x-4)\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{8-4x}}=6x-4$$

$$\Leftrightarrow (6x-4)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{8-4x}}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ \sqrt{2x+4}+\sqrt{8-4x}=\sqrt{x^2+4} \quad (1) \end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow -2x+12+2\sqrt{(2x+4)(8-4x)}=x^2+4 \Leftrightarrow 4\sqrt{8-2x^2}=x^2+2x-8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\le -4 \ \vee \ x\ge 2 \\ f(x)=x^4+4x^3+20x^2-32x-64=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ f(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\dfrac{2}{3}$, $x=2$.

Nhận xét. *Qua những ví dụ từ 20 đến 31, nhận thấy rằng nếu ghép hiệu hai biểu thức trong căn thức lại với nhau mà có nhân tử chung với biểu thức bên ngoài căn. Khi đó hướng xử lý là ghép các căn tương ứng và liên hợp theo hằng đẳng thức. Sau đây ta sẽ tìm hiểu hướng giải quyết đối với phương trình có nghiệm duy nhất.*

★ **Nhóm II: Sử dụng casio, tìm nghiệm duy nhất $x=x_o \xrightarrow{PP}$ ghép hằng số.**

Ví dụ 32. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ (*)

Đại học khối B năm 2010

Phân tích. *Khi ghép hiệu của hai biểu thức trong căn với nhau thì sẽ không có nhân tử chung với biểu thức bên ngoài căn. Khi đó sử dụng casio để dự đoán nghiệm của phương trình bằng cách nhập:* $\sqrt{3X+1}-\sqrt{6-X}+3X^2-14X-8$ *và bấm shift solve 2 = (2 số nguyên trong khoảng điều kiện) thì cho ta nghiệm* $X=5$. *Để kiểm tra còn nghiệm hay không ta sửa lại cấu trúc* $(\sqrt{3X+1}-\sqrt{6-X}+3X^2-14X-8):(X-5)$ *và tiếp shift solve 2 = thì cho kết quả Can't solve, chứng tỏ phương trình đã hết nghiệm.*

Từ đó, ta có thể khẳng định phương trình có 1nghiệm nên ghép hằng số với căn để liên hợp. Tức ghép: $(\sqrt{3x+1}-m)+(n-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-8+m-n=0$ *với 2 số m, n là giá trị của căn thức tương ứng tại* $x=5$, *nghĩa là* $\begin{cases} m=\sqrt{3x+1}=\sqrt{3.5+1}=4 \\ n=\sqrt{6-x}=\sqrt{6-5}=1 \end{cases}.$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0$ *và liên hợp các biểu thức trong dấu* $(\cdots)$ *sẽ có nhân tử* $(x-5)$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ 6-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\le x\le 6.$

$$(*)\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0\Leftrightarrow x=5.$$

Do $x\in\left[-\dfrac{1}{3};6\right]$, suy ra: $\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Ví dụ 33. Giải phương trình: $3x^2+10x+\sqrt{3x+3}=x^3+26+\sqrt{5-2x}$ (*)

Phân tích. *Sử dụng chức năng shift solve của casio, thấy* $x=2$ *là nghiệm duy nhất của phương trình nên sẽ ghép căn thức với hằng số:* $(\sqrt{3x+3}-m)$, $(\sqrt{5-2x}-n)$ *với m, n xác định* $m=\sqrt{3x+3}=\sqrt{3.2+3}=3,\ n=\sqrt{5-2x}=\sqrt{5-2.2}=1$ *và có lời giải:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 3x+3\ge 0 \\ 5-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x\le \dfrac{5}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow (\sqrt{3x+3}-3)+(1-\sqrt{5-2x})-x^3+3x^2+10x-24=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}}-(x-2)(x^2-x-12)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-(x^2-x-12)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}=x^2-x-12 \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^2-x-12$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]$ có $f'(x)=2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Mà $f(-1)=-10, f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{33}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{49}{2}\cdot$ Suy ra: $\max\limits_{\left[-1;\frac{5}{2}\right]} f(x)=-10.$

Do đó: $VP_{(1)} = f(x) \le -10,$ mà $VT_{(1)} = \dfrac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \dfrac{2}{\sqrt{5-2x}+1} > 0,\ \forall x \in \left[-1; \dfrac{5}{2}\right],$

nên phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2.$

<u>Ví dụ 34.</u> Giải: $\sqrt{3x^2-4x+2} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-1} + 6x^3 - 7x^2 - 3 = 0$ (*)

<u>Phân tích</u>. *Sử dụng casio, nhận thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$ nên sẽ ghép hằng số để liên hợp và những hằng số này là giá trị của các căn thức tại vị trí $x = 1,$ tương ứng và có lời giải sau:*

<u>Lời giải</u>. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1 \ge 0;\ 3x+1 \ge 0 \\ 3x^2-4x+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{3x^2-4x+2}-1) + (\sqrt{3x+1}-2) + (\sqrt{2x-1}-1) + 6x^3 - 7x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-4x+1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1} + \frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{2x-2}{\sqrt{2x+1}+1} + 6x^3 - 7x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(3x-1)}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+1}+1} + (x-1)(6x^2+6x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} + 6x^2 + 6x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1} + \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1} + 6x^2 + 6x - 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x) = 6x^2 + 6x - 1$ trên $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ có $f'(t) = 12x + 6 > 0,\ \forall x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right),$ suy ra: $f(x) \ge f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{2}\cdot$

Mà $g(x) = \dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}+1} + \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1} > 0,\ \forall x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

Do đó $VT_{(1)} = f(x) + g(x) > 0,$ suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

<u>Ví dụ 35.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x^2+15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2+8}$ (*)

<u>Phân tích</u>. *Sử dụng casio nhận thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1,$ do đó sẽ ghép hằng số để liên hợp như các ví dụ trên. Để ý: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} = 3x - 2$ và có $\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} > 0,\ \forall x$ nên để $(*)$ có nghiệm thì $3x - 2 > 0.$ Việc tìm điều kiện chính xác như thế này sẽ làm cho việc đánh giá sau khi liên hợp dễ dàng.*

Điều kiện: $x > \frac{2}{3}\cdot$

Lời giải 1. Sử dụng liên hợp.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+15} - 4 = \sqrt{x^2+8} - 3 + 3x - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3} + 3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } \frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} = 3 \qquad (1)$$

$$VT_{(1)} = (x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} - \frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}\right) = (x+1)\cdot\frac{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+15}-1}{(\sqrt{x^2+15}+4)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

Mà với $x > \frac{2}{3}$, suy ra: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+15} - 1 < 0 \end{cases}$ nên $VT_{(1)} < 0 < 3 = VP_{(1)}$

Do đó phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2. Phương pháp hàm số. Có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} - 3x + 2 = 0$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} - 3x + 2$ với $x > \frac{2}{3}$ có:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+15}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} - 3 = x.\left[\frac{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+15}}{\sqrt{(x^2+8)(x^2+15)}}\right] - 3 < 0,\ \forall x > \frac{2}{3}\cdot$$

Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ và có $f(1) = 0$, nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 36. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-9} + 2x^2 + 3x = \sqrt{5x-1} + 1 \qquad (*)$

Học sinh giỏi Tp. Hà Nội 2013

Phân tích. *Sử dụng casio, nhận thấy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất* $x = 1$. *Do đó ta sẽ ghép hằng số để liên hợp và có lời giải 1 như sau:*

Điều kiện: $5x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{5}\cdot$

Lời giải 1. Nhân lượng liên hợp thông thường.

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-9} + 2) + (2 - \sqrt{5x-1}) + 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x-9})^2 - 2\sqrt[3]{x-9} + 4} - \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2} + (x-1)(2x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5\right]=0 \Leftrightarrow x=1:\ \text{TMĐK.}$$

Do $\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5\ge -\frac{5}{2}+\frac{2}{5}+5>0,\ \forall x\ge \frac{1}{5}\cdot$

Nhận xét. *Khi phương trình vô tỷ có nghiệm duy nhất, ta ghép thêm hằng số để liên hợp tạo ra $(x-x_o).f(x)$ với $f(x)$ luôn dương mà dễ nhìn nhận thì bài toán được giải quyết nhanh chóng.* ***Đối với loại ghép hằng số*** *này, để khắc phục việc đánh giá phức tạp $f(x)$ sau liên hợp, ta có thể sử dụng* ***phương pháp truy ngược dấu*** *nhằm đảm bảo $f(x)$ luôn dương* ***đối với phương trình có nghiệm duy nhất*** *như sau*:

- ***Bước 1***. *Chuyển vế sao cho hệ số bậc cao nhất của đa thức là dương*

  $(*)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-9}-\sqrt{5x-1}+2x^2+3x-1=0$

- ***Bước 2***. *Xác định biểu thức ngược dấu (dấu x bị âm dạng $-ax$ khi bỏ căn): Ghép và liên hợp cụm:* $\sqrt[3]{x-9}+2=(x-1)\cdot\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9})^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}$, *hiển nhiên cụm*

$\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9})^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}$ *luôn dương nên không thay đổi thứ tự. Còn đối với cụm:*

$2-\sqrt{5x-1}=\frac{5(1-x)}{2+\sqrt{5x-1}}=(x-1)\cdot\frac{-5}{2+\sqrt{5x-1}}$, *bị ngược dấu nên sẽ truy ngược lại (đổi $(m-\sqrt{A})$ thành $\sqrt{A}(\sqrt{A}-m)$), tức:* $\sqrt{5x-1}\cdot(\sqrt{5x-1}-2)=\frac{5(x-1)\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}$

với cụm vừa thu được luôn dương. Khi đó $\sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}-2)=5x-1-2\sqrt{5x-1}$ *xuất hiện thêm số 2 trước $\sqrt{5x-1}$ nên sẽ nhân hai vế cho 2 và có lời giải 2 như sau:*

Lời giải 2. Ta có: $(*)\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x-9}-2\sqrt{5x-1}+4x^2+6x-2=0$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{x-9}+2)+\sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}-2)+4x^2+x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x-9})^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}+\frac{5(x-1)\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(4x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}+\frac{5\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2}+(4x+5)\right]=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Ví dụ 37. Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$ $(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai – Sóc Trăng

Điều kiện: $\frac{5}{2}\le x\le 4.$

Phân tích và lời giải 1. *(Liên hợp thông thường): Sử dụng casio, tìm được $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình, nên sẽ ghép thêm hằng số với căn thức dạng:*

$(\sqrt{x-2}-m),\ (\sqrt{4-x}-n),\ (\sqrt{2x-5}-p)$ *để liên hợp với* $m,\ n,\ p$ *là giá trị của các căn thức tương ứng tại* $x=3,$ *tức*

$$m=\sqrt{x-2}=1,\ n=\sqrt{4-x}=1,\ p=\sqrt{2x-5}=1.$$

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt{x-2}-1)+(\sqrt{4-x}-1)+(\sqrt{2x-5}-1)=2x^2-5x-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2(x-3)}{\sqrt{2x-5}+1}=(x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-(2x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}\qquad(1)\end{array}\right.$$

(1) vô nghiệm do $\forall x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]$ có $\begin{cases}VT_{(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}\le\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{1}=3\\ VP_{(1)}=2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}>2x+1\ge 2.\dfrac{5}{2}+1=6\end{cases}$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3.$

☙ ***Phân tích và lời giải 2***. *(Truy ngược dấu): Sau khi chuyển vế sao cho hệ số đa thức luôn dương thì* $(*)\Leftrightarrow 2x^2-5x-\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}-\sqrt{2x-5}=0$ *nếu ghép và liên hợp bình thường thì* $(1-\sqrt{x-2})=\dfrac{3-x}{1+\sqrt{x-2}}$ $(a),$ $(1-\sqrt{4-x})=\dfrac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}$ (b) *và* $(1-\sqrt{2x-5})=\dfrac{2(3-x)}{1+\sqrt{2x-5}}$ (c) *thấy biểu thức* $(a),\ (c)$ *bị ngược dấu so với biểu thức* (b) *do đó ta sẽ truy ngược lại theo dạng* $m-\sqrt{A}=\sqrt{A}(\sqrt{A}-m)$ *và có lời giải 2.*

$$(*)\Leftrightarrow 2x^2-5x-\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}-\sqrt{2x-5}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-1)+(1-\sqrt{4-x})+\sqrt{2x-5}(\sqrt{2x-5}-1)+2x^2-8x+6=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-3)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{2(x-3)\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}+2(x-3)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\cdot\left[\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{2\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}+2(x-1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ 0<\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\dfrac{2\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}+2(x-1)=0:VN_o\ \ \forall x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right].\end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3.$

Ví dụ 38. Giải phương trình: $x^3+5x^2+6x=(x+2)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x})$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Sở Giáo Dục & Đào Tạo tỉnh Bạc Liêu

Điều kiện: $-1\le x\le 5$.

$(*)\Leftrightarrow x(x^2+5x+6)=(x+2)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x})$

$\Leftrightarrow x(x+2)(x+3)=(x+2)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x})$

$\Leftrightarrow x(x+3)=\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}$ (1) (do: : $x+2>0,\ \forall x\in\left[-1;5\right]$)

Lời giải 1. Liên hợp thông thường khi dùng casio tìm nghiệm $x=1$.

$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{2x+2}-2)+(\sqrt{5-x}-2)-(x^2+3x-4)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+2}+2}+\frac{1-x}{2+\sqrt{5-x}}-(x-1)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } \frac{2}{\sqrt{2x+2}+2}=\frac{1}{2+\sqrt{5-x}}+x+4 \qquad (2)$$

Ta có: $\forall x\in\left[-1;5\right]\Rightarrow\begin{cases}VT_{(2)}=\dfrac{2}{\sqrt{2x+2}+2}\le\dfrac{2}{2}=1\\ VP_{(2)}=\dfrac{1}{2+\sqrt{5-x}}+x+4>x+4\ge 3\end{cases}$ nên (2) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2. Truy ngược dấu để sau liên hợp thu $(x-1).f(x)=0$ có $f(x)>0$.

$(1)\Leftrightarrow x^2+3x-\sqrt{2x+2}-\sqrt{5-x}=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x+2}(\sqrt{2x+2}-2)+2(2-\sqrt{5-x})+2x^2+4x-6=0$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+2}+2}+\frac{(x-1)}{2+\sqrt{5-x}}+(x-1)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } 0<\frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+2}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{5-x}}+x+3=0 \text{ vô nghiệm } \forall x\in\left[-1;5\right].$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 39. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$ (*)

Điều kiện: $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Lời giải 1. Sử dụng casio tìm được nghiệm duy nhất $x=2$, nên liên hợp.

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+6}-2)+(\sqrt{x-1}-1)=x^2-4$

$$\Leftrightarrow\frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2.\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-x-2\right]=0 \qquad (1)$$

Do $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-x-2<\dfrac{1}{3}+1-x-2=-\dfrac{2}{3}-x<0,\ \forall x\ge 1$ nên:

$(1)\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

- Để khắc phục việc đánh giá khó khăn này, ta xét việc truy ngược căn bậc 3:

Phân tích và lời giải 2. *Chuyển vế thì* $(*)\Leftrightarrow 4x^2-4-4\sqrt[3]{x+6}-4\sqrt{x-1}=0$ *và nhận thấy cả 2 căn thức đều ngược dấu. Do tích chất nghiệm duy nhất của phương trình nên đối với căn thức bậc ba ta truy ngược dấu dạng* $\sqrt[3]{A}(\sqrt[3]{A^2}-m^2)$ *thay thế cho việc liên hợp thông thường là* $m-\sqrt[3]{A}$ *và có lời giải 2 như sau:*

$(2)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

$\Leftrightarrow 4x^2-5x+6+\sqrt[3]{x+6}\cdot\left[\sqrt[3]{(x+6)^2}-4\right]+4\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(4x+3)+\dfrac{(x-2)(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+4\sqrt[3]{x+6}+16}+\dfrac{4(x-2)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left[4x+3+\dfrac{(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{(\sqrt[3]{x+6}+2)^2+12}+\dfrac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right]}_{>0,\ \forall x\ge 1}=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

Ví dụ 40. Giải phương trình: $x^3-2x^2-\sqrt{x^2-2x+5}=2\sqrt{4x+5}-5x-4\quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-2x+5\ge 0\\ 4x+5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{5}{4}\cdot$

Phân tích và lời giải 1. *Sử dụng casio sẽ tìm được nghiệm duy nhất* $x=1$, *do đó sẽ ghép hằng số để liên hợp và có lời giải 1 như sau:*

$(*)\Leftrightarrow x^3-2x^2+5x-4+(2-\sqrt{x^2-2x+5})+2(3-\sqrt{4x+5})=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x+4)+\dfrac{-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}+2}+2\cdot\dfrac{-4x+4}{\sqrt{4x+5}+3}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\underbrace{\left(x^2-x+4-\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}+2}-\dfrac{8}{\sqrt{4x+5}+3}\right)}_{f(x)}=0\qquad (1)$

Ta có: $\sqrt{(x-1)^2+4}+2>\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|\ge x-1\Rightarrow -\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+4}+2}>-1\quad (2)$

Mặt khác: $\forall x\ge -\dfrac{5}{4}$, suy ra $\dfrac{8}{\sqrt{4x+5}+3}\le\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{8}{\sqrt{4x+5}+3}\ge -\dfrac{8}{3}\qquad (3)$

Từ (2), (3), suy ra: $f(x) > x^2 - x + 4 - \dfrac{11}{3} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{12} > 0,\ \forall x \ge -\dfrac{5}{4}$ (4)

$(1) \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Phân tích và lời giải 2.

Truy ngược $2\sqrt{4x+5}(\sqrt{4x+5}-3) = \dfrac{8(x-1)\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3}$ *thì* $\dfrac{8\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3} \ge 0,\ \forall x \ge -\dfrac{5}{4}$ *và có* $2\sqrt{4x+5}(\sqrt{4x+5}-3) = 2(4x+5) - 3.2\sqrt{4x+5}$ *dư đi* $3\sqrt{4x+5}$ *so với đề nên sẽ nhân hai vế cho 3. Còn với* $(2 - \sqrt{x^2-2x+5})$ *sẽ đổi thành* $\left[(ax+b) - \sqrt{x^2-2x+5}\right]$ *và liên hợp cần tạo ra lượng* $m.(x-1)$ *nên sẽ chọn* $a = 1$ *để khi liên hợp mất* x^2. *Khi đó* $\left[(x+b) - \sqrt{x^2-2x+5}\right] = \dfrac{(2b+2)x + b^2 - 5}{x + b + \sqrt{x^2-2x+5}}$ *và mong muốn tạo ra* $m.(x-1)$ *nên đồng nhất hệ số được hệ* $\begin{cases} m = 2b+2 \\ -m = b^2 - 5 \end{cases}$ *và giải hệ này tìm được* $b = 1$ *hoặc* $b = -3$.

Để đơn giản tôi chọn $b = 1$ *và có lời giải 2 như sau:*

$$(*) \Leftrightarrow 3x^3 - 6x^2 + 15x + 12 - 3\sqrt{x^2-2x+5} - 6\sqrt{4x+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1-\sqrt{x^2-2x+5}) + 2\sqrt{4x+5}(\sqrt{4x+5}-3) + 3x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(x-1)}{x+1+\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{8(x-1)\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3} + (x-1)(3x^2-3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{12}{x+1+\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{8\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3} + 3x^2 - 3x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 41. Giải phương trình: $(5x-4)\sqrt{2x-3} - (4x-5)\sqrt{3x-2} = 2$ (*)

Chọn đội tuyển VMO năm 2015 – Tỉnh Đồng Nai

Phân tích. *Sử dụng casio tìm được phương trình có nghiệm duy nhất* $x = 6$. *Nếu liên hợp trực tiếp thì phương trình thu được sẽ phức tạp, khó đánh giá. Nhưng biến đổi phương trình thành* $\sqrt{(2x-3)(5x-4)^2} - \sqrt{(3x-2)(4x-5)^2} = 2$ *thì nó có dạng cơ bản* $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{C}$ *và chuyển vế sao cho hai vế đều dương rồi lũy thừa, lúc đó chỉ còn lại 1 căn thức. Hiển nhiên việc tách ghép để liên hợp sẽ dễ dàng hơn và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{3}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (5x-4)\sqrt{2x-3} = 2 + (4x-5)\sqrt{3x-2}$ và bình phương hai vế thì

$$\Leftrightarrow 50x^3 - 155x^2 + 152x - 48 = 48x^3 - 152x^2 + 155x - 46 + 4(4x-5)\sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x - 2 - 4(4x-5)\sqrt{3x-2} = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (4x-5)\sqrt{3x-2}.(\sqrt{3x-2}-4) + 2x^3 - 15x^2 + 20x - 12 = 0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-6)(4x-5)\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+4} + (x-6)(2x^2-3x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)\cdot\left[\frac{3(4x-5)\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+4} + 2x^2 - 3x + 2\right] = 0 \Leftrightarrow x = 6\cdot$$

Do $\dfrac{3(4x-5)\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+4} + 2x^2 - 3x + 2 > 0,\ \forall x \ge \dfrac{3}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 6.$

Bình luận. *Trong biến đổi từ (1) sang (2), tôi đã sử dụng kỹ thuật truy ngược dấu của biểu thức $4(4x-5)(4-\sqrt{3x-2})$ thành $(4x-5)\sqrt{3x-2}.(\sqrt{3x-2}-4)$ để thu biểu thức luôn dương sau liên hợp.*

Ví dụ 42. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12 \qquad (*)$

Điều kiện: $x \ge -2.$

Phân tích và lời giải 1. *Sử dụng casio sẽ tìm được nghiệm duy nhất $x = 2,$ do đó sẽ ghép hằng số để liên hợp. Nhưng lưu ý, biểu thức (hoặc hằng số) tích trước căn thức sẽ không tham gia vào liên hợp, tức ghép $(x+1).(\sqrt{x+2}-m),\ (x+6).(\sqrt{x+7}-n).$*

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2}-2) + (x+6)(\sqrt{x+7}-3) - (x^2+2x-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x+6)\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} - (x-2)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+2}+3} - x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Do $x \ge -2,$ suy ra: $x+2 \ge 0,\ x+6 > 0$ và lúc này, ta luôn có:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 = \left(\frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{x+2}{2}\right) + \left(\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{x+6}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < \frac{x+2}{2} - \frac{x+2}{2} + \frac{x+6}{3} - \frac{x+6}{2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = -\frac{x+6}{6} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < 0$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2.$

Phân tích và lời giải 2. *Nếu liên hợp dạng $(x+1)(\sqrt{x+2}-2) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}$ với $x+1$ chưa xác định được dấu khi $x \ge -2$ nên sẽ suy nghĩ đến việc tạo ra lượng luôn dương $(x-2)(x+1)^2$ sau khi liên hợp. Để làm được điều đó, tức cụm này phải có nhân tử $(x-2)(x+1)$ khi liên hợp và ta xem cụm này có hai nghiệm $x=-1,\ x=2$ nên sẽ ghép vào biểu thức liên hợp bậc nhất dạng $\left[(ax+b)-\sqrt{x+2}\right]$ để liên hợp (sau*

khi liên hợp ra bậc hai mới có khả năng xuất hiện 2 nhân tử $(x-2)(x+1)),$ *với hai số a, b thỏa hệ* $\begin{cases} khi\ x=2 \Rightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{2+2}=2=ax+b=2a+b \\ khi\ x=-1 \Rightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{-1+2}=1=ax+b=-a+b \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{4}{3}\cdot$ *Do đó ghép* $(x+1)\cdot\left[\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}\right)-\sqrt{x+2}\right]$ *và để đơn giản, ta nên nhân hai vế cho 3 sẽ biến thành* $(x+1)\left[(x+4)-3\sqrt{x+2}\right]=\dfrac{(x+1)(x^2-x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}=\dfrac{(x-2)(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}$ *đảm bảo được lượng:* $\dfrac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}\geq 0,\ \forall x\geq -2.$ *Còn với:* $(x+6)(3-\sqrt{x+7})=-\dfrac{(x+6)(x-2)}{3+\sqrt{x+7}}$ *có lượng* $x+6>0$ *với* $x\geq -2,$ *nên truy ngược lại bằng cách đổi:* $(x+6)(3-\sqrt{x+7})$ *thành* $(x+6)\sqrt{x+7}(\sqrt{x+7}-3)=\dfrac{(x-2)(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}$ *có* $\dfrac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}>0, \forall x\geq -2.$

Từ những phân tích này, ta có lời giải 2 như sau:

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(x+4-3\sqrt{x+2})+(x+6)\sqrt{x+7}(\sqrt{x+7}-3)+x^2+3x-10=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+(x+6)\sqrt{x+7}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}+(x-2)(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left[\frac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+x+5\right]}_{>0,\ \forall x>-2}=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2.$

Ví dụ 43. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}=3x^2+14x+13\ \ (*)$

Điều kiện: $4x+5\geq 0.$

Lời giải 1. Liên hợp thông thường khi biết $x=1$ là nghiệm duy nhất.

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{4x+5}-3)+2(x+5)(\sqrt{x+3}-2)=3x^2+7x-10$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x+1).(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\frac{2(x+5)(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}-(x-1)(3x+10)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\frac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-(3x+10)\right]=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Do $\forall x\geq -\dfrac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} 4x+5\geq 0 \\ x+5>0 \end{cases}\cdot$ Khi đó: $\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\dfrac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-(3x+10)$

$$=\left(\frac{4x+5}{\sqrt{4x+5}+3}-\frac{4x+5}{3}\right)+\frac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{5x+25}{3}-\frac{5}{\sqrt{4x+5}+3}$$

$$\leq \frac{4x+5}{3}-\frac{4x+5}{3}+\frac{2(x+5)}{2}-\frac{5x+25}{3}-\frac{5}{\sqrt{4x+5}+3}=-\frac{2x+10}{3}-\frac{5}{\sqrt{4x+5}+3}<0$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

__Lời giải 2__. Truy ngược dấu.

$$(*)\Leftrightarrow 2(x+1).\left[(x+2)-\sqrt{4x+5}\right]+2(x+5)\sqrt{x+3}.(\sqrt{x+3}-2)+2x^2+6x-8=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)^2(x-1)}{x+2+\sqrt{4x+5}}+\frac{2(x+5)(x-1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+2(x-1)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{2(x+1)^2}{x+2+\sqrt{4x+5}}+\frac{2(x+5)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+2(x+4)\right]=0\Leftrightarrow x=1.$$

Do $\dfrac{2(x+1)^2}{x+2+\sqrt{4x+5}}+\dfrac{2(x+5)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+2(x+4)>0,\ \forall x\geq -\dfrac{5}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

__**Sai lầm thường gặp**__: Đối với cách giải 1, sai lầm thường gặp của học sinh là đánh giá $\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\dfrac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-(3x+10)\leq \dfrac{4}{3}(x+1)+\dfrac{2}{2}\cdot(x+5)-(3x+10)$ $=-\dfrac{2x+23}{3}<0,\ \forall x\geq -\dfrac{5}{4}\cdot$ Bởi lẽ với $x\geq -\dfrac{5}{4}$ thì dấu của $x+1$ chưa xác định âm hay dương nên đánh giá như vậy là chưa chặt.

__Ví dụ 44.__ Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+2}+x\sqrt{3x-2}=2\sqrt{2x^2+1}$ (*)

__Lời giải__. Điều kiện: $x\geq \dfrac{2}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+2}-2)+2+x(\sqrt{3x-2}-2)+2x=2\sqrt{2x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+2}-2)+x(\sqrt{3x-2}-2)+2\left[(x+1)-\sqrt{2x^2+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}+\frac{3x(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2}-\frac{2x(x-2)}{x+1+\sqrt{2x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}+\frac{3x}{\sqrt{3x-2}+2}-\frac{2x}{x+1+\sqrt{2x^2+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{3}{(\sqrt[3]{3x+2}+1)^2+3}+\frac{x(3\sqrt{2x^2+1}-2\sqrt{3x-2}+3x-1)}{(\sqrt{3x-2}+2)(x+1+\sqrt{2x^2+1})}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\underbrace{\frac{3}{(\sqrt[3]{3x+2}+1)^2+3}+\frac{x\cdot\left(\dfrac{18x^2-12x+17}{3\sqrt{2x^2+1}+2\sqrt{3x-2}}+3x-1\right)}{(\sqrt{3x-2}+2)(x+1+\sqrt{2x^2+1})}}_{f(x)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.\ \text{Do}\ \forall x\geq \frac{2}{3}\Rightarrow \begin{cases}\bullet\ 18x^2-12x+17>0\\ \bullet\ 3x-1>0\end{cases}\ \text{nên}\ f(x)>0.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

_Ví dụ 45._ Giải phương trình: $x^2 - x - 18 + (2x+9)\sqrt{x+3} - 2\sqrt{5x-1} = 0 \quad (*)$

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{5}\cdot$

Lời giải 1. Liên hợp thông thường.

$$(*) \Leftrightarrow (2x+9)(\sqrt{x+3}-2) + 2(2-\sqrt{5x-1}) + x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+9)\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{10.(1-x)}{\sqrt{5x-1}+2} + (x-1)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{2x+9}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{10}{\sqrt{5x-1}+2} + x + 4\right) = 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x+9}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{10}{\sqrt{5x-1}+2} + x + 4$ trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$ có:

$$f'(x) = \frac{2x+3+8\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+2)^2} + \frac{5}{\sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}+2)^2} + 1 > 0,\ \forall x \geq \frac{1}{5}\cdot$$

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$, suy ra $f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{227-94\sqrt{5}}{10} > 0 \quad (2)$

Từ (1), (2), suy ra: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2. Truy ngược dấu.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}(4x+18-11\sqrt{x+3}) + 2\sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}-2) + (x-1)(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\cdot\frac{(x-1)(16x+39)}{4x+18+11\sqrt{x+3}} + \frac{10(x-1)\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2} + (x-1)(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{(16x+39)\sqrt{x+3}}{4x+18+11\sqrt{x+3}} + \frac{10\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2} + (2x+1)\right] = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do $\forall x \geq \frac{1}{5}$, suy ra: $\frac{(16x+39)\sqrt{x+3}}{4x+18+11\sqrt{x+3}} + \frac{10\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2} + 2x + 1 > 0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

★ **Nhóm III: Có 2 nghiệm đẹp $x = x_1$, $x = x_2 \xrightarrow{PP}$ ghép bậc nhất $ax + b$.**

_Ví dụ 46._ Giải phương trình: $x^2 - x + \sqrt{2x^2 - x + 3} = \sqrt{21x - 17} \quad (*)$

Phân tích. *Sử dụng casio nhập $X^2 - X + \sqrt{2X^2 - X + 3} - \sqrt{21X - 17}$ và bấm shift solve thì cho ta $X = 2$. Để kiểm tra phương trình còn nghiệm hay không, ta sửa lại cấu trúc $(X^2 - X + \sqrt{2X^2 - X + 3} - \sqrt{21X - 17}):(X-2)$ và bấm shift solve, cho ta thêm được một nghiệm nữa $X = 1$. Do đó phương trình sẽ có 2 nghiệm với nhân tử chung*

dạng $(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$ *nên sẽ ghép bậc nhất cho từng căn để liên hợp. Cụ thể:* $\left[\sqrt{2x^2-x+3}-(ax+b)\right]$, $\left[(cx+d)-\sqrt{21x-17}\right]$ *với* a, b, c, d *thỏa các hệ:*

$$\begin{cases} khi\ x=1 \Rightarrow \sqrt{2x^2-x+3}=\sqrt{2.1^2-1+3}=2=ax+b=a+b \\ khi\ x=2 \Rightarrow \sqrt{2x^2-x+3}=\sqrt{2.2^2-2+3}=3=ax+b=2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ và}$$

$$\begin{cases} khi\ x=1 \Rightarrow \sqrt{21x-17}=\sqrt{21.1-17}=2=cx+d=c+d \\ khi\ x=2 \Rightarrow \sqrt{21x-17}=\sqrt{21.2-17}=5=cx+d=2c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+d=2 \\ 2c+d=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ d=-1 \end{cases}.$$

Khi đó có tách ghép và có lời giải như sau:

☙ ***Lời giải***. Điều kiện: $21x-17 \ge 0.$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\sqrt{2x^2-x+3}-(x+1)\right]+\left[(3x-1)-\sqrt{21x-17}\right]+(x^2-3x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9(x^2-3x+2)}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+(x^2-3x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1\right)=0 \qquad (1)$$

Do $\forall x \ge \frac{17}{21}$, suy ra: $\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1>0$ nên:

$(1) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm $x=1,\ x=2.$

Ví dụ 47. Giải phương trình: $2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13 \qquad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} 3x+4 \ge 0 \\ 5x+9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{4}{3}.$

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được hai nghiệm là:* $x=0,\ x=-1$. *Khi đó ta cần ghép hai căn thức với bậc nhất dạng* $2.\left[\sqrt{3x+4}-(ax+b)\right]$, $3.\left[\sqrt{5x+9}-(cx+d)\right]$, *trong đó:*

$$\begin{cases} khi\ x=0 \Rightarrow \sqrt{3x+4}=\sqrt{3.0+4}=2=ax+b=a.0+b=b \\ khi\ x=-1 \Rightarrow \sqrt{3x+4}=\sqrt{3.(-1)+4}=1=ax+b=a.(-1)+b=-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ và}$$

$$\begin{cases} khi\ x=0 \Rightarrow \sqrt{5x+9}=\sqrt{5.0+9}=3=cx+d=c.0+d=d \\ khi\ x=-1 \Rightarrow \sqrt{5x+9}=\sqrt{5.(-1)+9}=2=cx+d=c.(-1)+d=-c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ d=3 \end{cases}.$$

☙ ***Lời giải***. Ta có: $(*) \Leftrightarrow 2\left[\sqrt{3x+4}-(x+2)\right]+3\left[\sqrt{5x+9}-(x+3)\right]=x^2+x$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x^2+x)}{\sqrt{3x+4}+x+2}-\frac{3(x^2+x)}{\sqrt{5x+9}+x+3}-(x^2+x)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)\left(\frac{2}{\sqrt{3x+4}+x+2}+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3}+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Do $\forall x \ge -\frac{4}{3}$, suy ra: $\frac{2}{\sqrt{3x+4}+x+2}+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3}+1>0.$

Kết luận: So với điều kiện, các nghiệm cần tìm là $x=-1,\ x=0.$

Ví dụ 48. Giải phương trình: $3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}=4x^2$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Bình Long – Bình Phước

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được 2 nghiệm* $x=\frac{1}{2},\ x=1$ *nên ghép bậc nhất để liên hợp. Với* $\sqrt{2x-1}$ *thì* $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sqrt{2x-1}=\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}-1}=0=ax+b=\frac{1}{2}a+b \\ x=1\Rightarrow \sqrt{2x-1}=\sqrt{2.1-1}=1=ax+b=1.a+b \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$

Với $\sqrt{5-4x^2}$ *thì* $\begin{cases} khi\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sqrt{5-4x^2}=\sqrt{5-1}=2=ax+b=\frac{1}{2}a+b \\ khi\ x=1\Rightarrow \sqrt{5-4x^2}=\sqrt{5-4.1^2}=1=ax+b=a+b \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}.$

Lời giải. Điều kiện: $\frac{1}{2}\le x\le \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot$ (a)

- Nhận thấy $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình.
- Với $x\ne \frac{1}{2}\Rightarrow \sqrt{2x-1}+2x-1\ne 0$ thì:

$$(*)\Leftrightarrow 3\left[\sqrt{2x-1}-(2x-1)\right]+x.\left[\sqrt{5-4x^2}-(-2x+3)\right]-3(2x^2-3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6(2x^2-3x+1)}{\sqrt{2x-1}+2x-1}-\frac{4x(2x^2-3x+1)}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}-3(2x^2-3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-3x+1)\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{2x-1}+2x-1}+\frac{4x}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{ (loại) hoặc } x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=1,\ x=\frac{1}{2}\cdot$

Nhận xét. *Trong bài toán này, tôi phải xét hai trường hợp, nguyên nhân là do khi liên hợp có biểu thức* $\sqrt{2x-1}+2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\cdot$ *Chính biểu thức dưới mẫu số này làm cho phép biến đổi không xác định, đó là sai lầm thường gặp của học sinh.*

Ví dụ 49. Giải phương trình: $\sqrt{3x-5}+2\sqrt[3]{19x-30}=2x^2-7x+11$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai – Sóc Trăng

Phân tích. *Sử dụng casio tìm được 2 nghiệm $x=2,\ x=3$ của phương trình. Khi đó ta sẽ ghép bậc nhất với từng căn thức tương tự như các ví trên và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $3x-5\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \dfrac{5}{3}\cdot$ $\quad (a)$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\sqrt{3x-5}-(x-1)\right]+2\cdot(\sqrt[3]{19x-30}-x)=2x^2-10x+12$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-5-(x-1)^2}{\sqrt{3x-5}+x-1}+2\cdot\frac{19x-30-x^3}{\sqrt[3]{(19x-30)^2}+x\sqrt[3]{19x-30}+x^2}=2(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{3x-5}+x-1}-2\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x+5)}{\sqrt[3]{(19x-30)^2}+x\sqrt[3]{19x-30}+x^2}=2(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{3x-5}+x-1}+\frac{2(x+5)}{\sqrt[3]{(19x-30)^2}+x\sqrt[3]{19x-30}+x^2}+2\right]}_{>0,\ \forall x\in(a)}=0$$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=3$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=2,\ x=3$.

Ví dụ 50. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{3x+1}+x^3+2x^2+1=2\sqrt{x^2-x+1}+6x \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\ x^2-x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{3}\cdot$

Phân tích và lời giải 1. *Sử dụng casio, tìm được 2 nghiệm $x=0,\ x=1,$ nên phương trình sẽ có nhân tử chung dạng $x(x-1)=x^2-x.$ Do đó sẽ ghép bậc nhất với căn thức để liên hợp dạng: $(x+1).\left[\sqrt{3x+1}-(ax+b)\right],\ 2.\left[(cx+d)-\sqrt{x^2-x+1}\right]$ với a, b thỏa:*

$$\begin{cases}Khi\ x=0\Rightarrow \sqrt{3x+1}=1=ax+b=b\\ Khi\ x=1\Rightarrow \sqrt{3x+1}=2=ax+b=a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$$ *và c, d thỏa mãn hệ:*

$$\begin{cases}Khi\ x=0\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}=1=cx+d=d\\ Khi\ x=1\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}=1=cx+d=c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\ d=1\end{cases}\cdot$$ *Từ đó có lời giải 1 như sau:*

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]+2(1-\sqrt{x^2-x+1})+x^3+3x^2-4x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2+x)}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2(-x^2+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+(x^2-x)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+x)\left(\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}+1}-x-4\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.\cdot$$

Do $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x+1}+1}-x-4<\dfrac{x+1}{x+1}+2-x-4=-x-1<0,\ \forall x\ge -\dfrac{1}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0,\ x=1$.

Phân tích và lời giải 2. *Với mong muốn biểu thức $f(x)$ trong $(x^2-x).f(x)$ sau khi liên hợp luôn dương, ta có thể truy ngược lại như sau: $2.(1-\sqrt{x^2-x+1})$ đổi thành: $2.\sqrt{x^2-x+1}.(\sqrt{x^2-x+1}-1)$ và $\sqrt{3x+1}-(x+1)$ thành $\sqrt{3x+1}.(x+1-\sqrt{3x+1})$ sẽ khắc phục được công đoạn đánh giá $f(x)$ phức tạp. Từ đó có lời giải 2 như sau:*

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+1}(\sqrt{x^2-x+1}-1)+\sqrt{3x+1}(x+1-\sqrt{3x+1})+x^3-x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-x)\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{(x^2-x)\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+(x^2-x)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\cdot\left(\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.\cdot$$

Do $\forall x \geq -\frac{1}{3}$, suy ra: $\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0,\ x=1.$

Ví dụ 51. Giải phương trình: $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}=x^3+x^2-4x-4+|x|+|x-1|$ (*)

Phân tích và lời giải. *Sử dụng casio tìm được hai nghiệm $x=-1,\ x=2$ nên sẽ ghép bậc nhất để liên hợp. Trong bài toán có chứa trị tuyệt đối dạng bậc nhất nên ta sẽ thử ghép trực tiếp căn với trị tuyệt đối để tìm ra nhân tử $(x+1)(x-2)=x^2-x-2.$ Nếu không được như thế thì đây là một bài toán nan giải cho học sinh.*

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 3.$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{3-x}-|x-1|)+(\sqrt{2+x}-|x|)=(x+2)(x^2-x-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{x+2}+|x|}+(x+2)(-x^2+x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+x+2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+|x|}+x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ hoặc } x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-1,\ x=2.$

2. Liên hợp với phương trình có nghiệm vô tỷ hoặc có sự biến đổi

★ **Nhóm I: Đặt ẩn phụ để đơn giản hơn hoặc có sự biến đổi, rồi liên hợp**

Ví dụ 52. Giải phương trình: $(8x+13)\sqrt{4x+7}-2(x+2)\sqrt{2x+3}=12x+35$ (*)

Phân tích. *Sử dụng casio được nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}\cdot$ Nhận thấy trong phương trình đều có hạng tử $2x,$ do đó để giảm độ phức tạp, ta có thể đặt ẩn phụ trước để qui về 1 căn thức, rồi liên hợp sau, cụ thể đặt $t=\sqrt{2x+3} \Rightarrow 2x=t^2-3.$ Khi đó phương*

trình $(*) \Leftrightarrow (4t^2+1)\sqrt{2t^2+1} - t^3 - 6t^2 - t - 17 = 0$ *và lúc đó nghiệm* $t = 2,$ *nên ghép căn thức với hằng số để liên hợp và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $2x+3 \ge 0.$ Đặt $t = \sqrt{2x+3} \ge 0 \Rightarrow 2x = t^2 - 3.$ Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow (4t^2+1)\sqrt{2t^2+1} - t^3 - 6t^2 = t + 17$$

$$\Leftrightarrow (4t^2+1)\left[\sqrt{2t^2+1} - (t+1)\right] + 3t^3 - 2t^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4t^2+1)(t^2-2t)}{\sqrt{2t^2+1}+t+1} + (t-2)(3t^2+4t+8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2t^2+1}+t+1} + 3t^2 + 4t + 8\right)}_{>0,\ \forall t \ge 0} = 0 \Leftrightarrow t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}\cdot$

Bình luận. *Nếu sau khi đặt* $t = \sqrt{2x+3} \ge 0$ *và dự đoán được nghiệm duy nhất của phương trình là* $t = 2 \to$ *ghép hằng số* $(4t^2+1)(\sqrt{2t^2+1} - 3) - (t-2)(t^2 - 4t - 7)$ *và liên hợp thì rất khó đánh giá cụm còn lại hoặc nếu truy ngược dấu lại cũng chẳng giải quyết được cụm còn lại. Hiển nhiên, cả 2 cách này cũng bó tay khi nếu không đặt ẩn phụ ?! (bạn đọc có thể kiểm chứng lại). Để khắc phục điều đó, trong cách giải trên tôi đã đổi* $(4t^2+1)(\sqrt{2t^2+1} - 3)$ *thành* $(4t^2+1).\left[\sqrt{2t^2+1} - (t+1)\right]$ *để đảm bảo sau khi liên hợp dễ đánh giá như trên. Vấn đề đặt ra là tại sao biết được phải trừ đi* $t+1$ *?!*
$\xrightarrow{TL}$ *Mấu chốt là ở điều kiện* $t \ge 0,$ *nếu xem phương trình có nhân tử là* $t.(t-2)$ *(tức ghép bậc nhất* $ax+b$ *khi xem phương trình có 2 nghiệm* $t = 0,\ t = 2$*) sẽ tìm được lượng ghép đó là* $t+1,$ *(dành cho bạn đọc). Hơn nữa, khi làm như vậy, ta đã vô tình trừ đi* $(4t^2+1)(t+1) = 4t^3 + 4t^2 + t + 1$ *nên sẽ cộng thêm chính lượng này được:* $3t^3 - 2t^2 - 16 = (t-2)(3t^2+4t+8)$ *có* $3t^2 + 3t + 8 > 0,\ \forall t,$ $(\text{do}: \Delta < 0, a = 3 > 0).$

Ví dụ 53. Giải phương trình: $(8x^3 - 6x + 1)\sqrt{4x^2+21} + 16x^4 - 12x^2 + 2x = 21$ $(*)$

Chọn đội tuyển VMO năm 2014 – Tỉnh Nghệ An

Phân tích. *Sử dụng casio tìm được nghiệm duy nhất* $x = 1.$ *Nhận thấy trong phương trình đều có hạng tử* $2x,$ *do đó để giảm độ phức tạp, ta có thể đặt ẩn phụ trước, rồi liên hợp sau, cụ thể đặt* $t = 2x$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Đặt $t = 2x.$ Khi đó biến đổi phương trình đã cho về dạng:

$$(*) \Leftrightarrow (t^3 - 3t + 1)\sqrt{t^2+21} + t^4 - 3t^2 + t = 21$$

$$\Leftrightarrow (t^3 - 3t + 1)\sqrt{t^2+21} + t(t^3 - 3t + 1) = 21$$

$$\Leftrightarrow (t^3-3t+1).(\sqrt{t^2+21}+t)=21 \Leftrightarrow \frac{21.(t^3-3t+1)}{\sqrt{t^2+21}-t}=21$$

$$\Leftrightarrow t^3-3t+1=\sqrt{t^2+21}-t \Leftrightarrow (t^3-3t-2)+(t+3-\sqrt{t^2+21})=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+1)^2+\frac{6(t-2)}{t+3+\sqrt{t^2+21}}=0 \Leftrightarrow (t-2)\left[(t+1)^2+\frac{6}{t+3+\sqrt{t^2+21}}\right]=0$$

$\Leftrightarrow t=2,$ suy ra: $t=2x=2 \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 54. Giải phương trình: $(28-4x^3)\sqrt{2x^3-15}=2x^4-3x^3-14x+16$ (*)

Phân tích. $28-4x^3=4(7-x^3)$; $2x^4-14x=2x(x^3-7)$; $\sqrt{2x^3-15}=\sqrt{2(x^3-7)-1}$

nên để đơn giản, ta có thể đặt $t=x^3-7 \Rightarrow x^3=t+7 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{t+7}$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $2x^3-15\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \sqrt[3]{\frac{15}{2}}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 2x(x^3-7)-3(x^3-7)-5=4(7-x^3)\sqrt{2(x^3-1)}$ (1)

Đặt $t=x^3-7 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{t+7}$ và do $2x^3-15\ge 0 \Rightarrow 2t=2x^3-14\ge 1 \Leftrightarrow t\ge \frac{1}{2}\cdot$

$$(1) \Leftrightarrow 2t\sqrt[3]{t+7}+4t\sqrt{2t-1}-3t=5 \Leftrightarrow 2t(\sqrt[3]{t+7}-2)+4t(\sqrt{2t-1}-1)+5(t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t(t-1)}{\sqrt[3]{(t+7)^2}+2\sqrt[3]{t+7}+4}+\frac{8t(t-1)}{\sqrt{2t-1}+1}+5(t-1)=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=2.$$

Do: $\dfrac{2t}{\sqrt[3]{(t+7)^2}+2\sqrt[3]{t+7}+4}+\dfrac{8t}{\sqrt{2t-1}+1}+5>0,\ \forall t>\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Ví dụ 55. Giải $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{\sqrt{x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93}-2}+x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Phân Châu Trinh – Đà Nẵng

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 2 \\ \sqrt{x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93}-2\ge 0 \end{cases}.$

Đặt $t=\sqrt{x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93}\ge 0.$

Suy ra: $t^2=x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93=(x^2+\sqrt{x-2})^2-91.$

Ta đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+\sqrt{x-2})^2=t^2+91 \\ \sqrt{x^2+91}=\sqrt{t-2}+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\sqrt{x-2}=\sqrt{t^2+91} \\ t^2+\sqrt{t-2}=\sqrt{x^2+91} \end{cases}$

$$\Rightarrow (x-t)(x+t)+\frac{x-t}{\sqrt{x-2}+\sqrt{t+2}}+\frac{(x-t)(x+t)}{\sqrt{t^2+91}+\sqrt{x^2+91}}=0 \qquad (x,t\ge 2)$$

$$\Leftrightarrow (x-t)\cdot\left(x+t+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{t+2}}+\frac{x+t}{\sqrt{t^2+91}+\sqrt{x^2+91}}\right)=0 \Leftrightarrow x=t.$$

Suy ra: $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+91}-10)=(\sqrt{x-2}-1)+(x^2-9)$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x^2+91}+10}=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+(x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left[\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-(x+3)\right]=0 \Leftrightarrow x=3: \text{ TMĐK.}$$

Do: $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-(x+3)<\dfrac{x+3}{10}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-(x+3)<0, \forall x\ge 2.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bình luận. *Trong bài giải trên, tôi đã đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình đối xứng loại II, ta sẽ tìm hiểu dấu hiệu nhận dạng và hướng đi cụ thể ở những bài học sau. Hơn nữa, qua bài này tôi muốn gửi một thông điệp rằng: khi gặp hệ phương trình đối xứng loại II chứa căn thức thì sau khi lấy vế trừ vế sẽ liên hợp luôn nhận được* $x=y$, *hoặc có thể sử dụng phương pháp hàm số cũng nhận được lượng nhân tử* $x=y$.

Ví dụ 56. Giải phương trình: $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}=\dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}$ (*)

Phân tích. *Đối với bài toán phương trình có dạng căn thức dưới mẫu, đầu tiên ta nên quan sát xem có mối liên hệ nào giữa các biểu thức dưới mẫu với các căn thức khác hoặc biểu thức trên tử không. Nếu chúng biểu diễn cho nhau được thì ta nên rút gọn lại và dự đoán hướng đi tiếp theo. Trong đó công cụ thường gặp nhất là phân tích tam thức bậc hai thành tích* $f(x)=ax^2+bx+c=a.(x-x_1)(x-x_2)$ *với* x_1, x_2 *là 2 nghiệm của* $f(x)=0$ *hoặc bậc ba thì chia Hoócner, hoặc hằng đẳng thức, hoặc biểu thức liên hợp. Cụ thể:*

$$\begin{cases} \bullet\ 3\sqrt{x+1}+x+3=(\sqrt{x+1})^2+3\sqrt{x+1}+2=(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2) \\ \bullet\ x-3=(\sqrt{x+1})^2-2^2=(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2) \\ \bullet\ x=(\sqrt{x+1})^2-1^2=(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1) \end{cases}$$

và thấy các biểu thức có mối liên hệ với nhau. Từ đó có biến đổi và lời giải sau:

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+1\ge 0;\ 9-x\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 9 \\ x\ne 0 \end{cases} \Rightarrow 3\sqrt{x+1}+x+3>0.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{2\sqrt{9-x}}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}-1)=2\sqrt{9-x} \Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)+2(1-\sqrt{9-x})=0 \Leftrightarrow \frac{(x-8)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\frac{2(x-8)}{1+\sqrt{9-x}}=0$$

$\Leftrightarrow x-8=0 \Leftrightarrow x=8$: thỏa mãn điều kiện.

Do: $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{9-x}}>0,\ \forall x\in\left[-1;9\right]\setminus\left\{0\right\}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$.

Ví dụ 57. Giải phương trình: $\dfrac{(x-6)\sqrt{x-1}+8-2x}{x-3+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$ (*)

Lời giải. Với $x\ge 1$, thì ta có:

$$\begin{cases} \bullet\ x-3+\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1})^2+\sqrt{x-1}-2=(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2) \\ \bullet\ (x-6)\sqrt{x-1}+8-2x=\left[(x-1)-5\right]\sqrt{x-1}-2(x-1)+6 \\ =(\sqrt{x-1})^3-2(\sqrt{x-1})^2-5\sqrt{x-1}+6=(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}-1) \end{cases}.$$

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{x-1}-1\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne 2 \end{cases}\cdot$ Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}-1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{\sqrt{2x-1}-5}{2}\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-3=\frac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$$

Do sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất $x=5$ nên có tách ghép:

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-2=\frac{(\sqrt{2x-1}-3)-2}{2}+1\Leftrightarrow 2(\sqrt{x-1}-2)=(\sqrt{2x-1}-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{2(x-5)}{\sqrt{2x-1}+3}\Leftrightarrow (x-5)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ \sqrt{2x-1}+1=\sqrt{x-1}>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=5\ \vee\ \begin{cases} x>1 \\ 2x+2\sqrt{2x-1}=x-1 \end{cases}:\text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Ví dụ 58. Giải phương trình: $\dfrac{9x^2-14x+25}{3x+3+4\sqrt{2x-1}}=\dfrac{(\sqrt{x-1}-1)(2x-4)}{x}$ (*)

Phân tích và lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$, suy ra: $3x+3+4\sqrt{2x-1}>0$. Ta có:

$$\left[(3x+3)+4\sqrt{2x-1}\right]\left[(3x+3)-4\sqrt{2x-1}\right]=(3x+3)^2-16\sqrt{2x-1}=9x^2-14x+25$$

nên ta luôn có: $(3x+3)-4\sqrt{2x-1}=\dfrac{9x^2-14x+25}{3x+3+4\sqrt{2x-1}}\cdot$ Do đó phương trình:

$$(*)\Leftrightarrow 3x+3-4\sqrt{2x-1}=\frac{(\sqrt{x-1}-1)(2x-4)}{x}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x-4x\sqrt{2x-1}=(2x-4)\sqrt{x-1}-2x+4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+5x-4-4x\sqrt{2x-1}-2(x-2)\sqrt{x-1}=0$$

Do các hằng số trước căn thức đều là những số chẵn, nên ta sẽ định hướng phân tích về dạng tổng các số không âm hoặc $A^n = B^n$ dựa vào hằng đẳng thức:

$$\Leftrightarrow \left[4x^2 - 2.2x.\sqrt{2x-1} + (2x-1)\right] - \left[(x-2)^2 + 2.(x-2).\sqrt{x-1} + (x-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{2x-1})^2 - (x - 2 + \sqrt{x-1})^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{2x-1})^2 = (x - 2 + \sqrt{x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \sqrt{2x-1} = x - 2 + \sqrt{x-1} \\ 2x - \sqrt{2x-1} = 2 - x - \sqrt{x-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = x + 2 & (1) \\ 3x - 2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Do sử dụng casio, nhận thấy phương trình (1) vô nghiệm với mọi $x \ge 1$ nên sẽ tìm cách chứng minh phương trình này vô nghiệm, tức:

$$(1) \Leftrightarrow 3x - 2 + 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} = x^2 + x + 6$$

Do $\forall x \ge 1,$ suy ra: $2\sqrt{(x-1)(2x-1)} < 2\sqrt{x.2x} = 2\sqrt{2}.x \overset{Cauchy}{\le} x^2 + 2 < x^2 + x + 6$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất $x = 1,$ nên tách ghép liên hợp (2) như sau:

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1} - 1) + (x-1) = 0$ (sử dụng kỹ thuật truy ngược)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \frac{2(x-1)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1} + (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \cdot \underbrace{\left[1 + \frac{2\sqrt{(x-1)(2x-1)}}{\sqrt{2x-1}+1} + \sqrt{x-1}\right]}_{>\,0,\ \forall x \ge 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Ví dụ 59. Giải phương trình: $3\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + \sqrt{9x^2 - 4x + 4} = 2x + 2\sqrt{4x^2 - x + 1}$ (*)

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{16x^2 - 4x + 4} - \sqrt{9x^2 - 4x + 4} = 3\sqrt[3]{2x^2 - x^3} - 2x \ge 0$ (1)

Điều kiện: $3\sqrt[3]{2x^2 - x^3} - 2x \ge 0 \Leftrightarrow 35x^3 - 54x^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x \le \dfrac{54}{35} \cdot$

- **TH 1**. Với $x = 0$ thì phương trình (1) luôn đúng nên $x = 0$ là một nghiệm.
- **TH 2**. Với $x \in \left(0; \dfrac{54}{35}\right]$ nên chia hai vế của (1) cho $x > 0,$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{16 - 4\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{9 - 4\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = 3\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{\dfrac{2}{x} - 1},$ suy ra: $t^3 = \dfrac{2}{x} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{t^3+1}{2} \cdot$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{t^6 + 15} - \sqrt{t^6 + 8} = 3t - 2 > 0$ (điều kiện: $3t - 2 > 0$)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{t^6+15} - 4) + (3 - \sqrt{t^6+8}) = 3t - 3 \Leftrightarrow \frac{t^6 - 1}{\sqrt{t^6+15}+4} - \frac{t^6 - 1}{\sqrt{t^6+8}+3} = 3(t-1)$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\cdot\left[\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}-\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}-3\right]=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=1.$$

Do luôn có: $\sqrt{t^6+15}+4>\sqrt{t^6+8}+3 \Rightarrow \dfrac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}<\dfrac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}$

Suy ra: $\dfrac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}-\dfrac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}-3<0,\ \forall t>\dfrac{2}{3}\cdot$

- **<u>TH 3</u>**. Với $x\in(-\infty;0)$, chia hai vế cho $x<0$, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{x}\right)\sqrt{16x^2-4x+4}+\left(-\frac{1}{x}\right)\sqrt{9x^2-4x+4}=\frac{1}{x}3.\sqrt[3]{2x^2-x^3}-2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{16-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=3\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1} \qquad (3)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}-1}$, suy ra: $t^3=\dfrac{2}{x}-1\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{t^3+1}{2}\cdot$ Do $x<0\Rightarrow t^3<-1\Leftrightarrow t<-1.$

$$(3)\Leftrightarrow \sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2=0 \qquad (4)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2$ trên $(-\infty;-1)$, có:

$f'(t)=-3+3t^5\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^6+8}}-\dfrac{1}{\sqrt{t^6+15}}\right)<0,\ \forall t<-1.$ Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$, suy ra: $f(t)=\sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2>\text{f}(-1)=2 \qquad (5)$

Từ (4), (5), suy ra phương trình (4) vô nghiệm.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0,\ x=1.$

<u>Ví dụ 60.</u> Giải phương trình: $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Long An năm 2014

Tập xác định: $D=\mathbb{R}.$

<u>Phân tích và lời giải 1</u>. *Sử dụng casio, thấy phương trình có nghiệm xấu. Khi đó để xuất hiện nhân tử sẽ trừ đi* $a>0:(2x+1)(\sqrt{x^2+2x+3}-a)=x^2+6x+1-2ax-a$ *và liên hợp:* $(2x+1)\cdot\dfrac{x^2+2x+3-a^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+a}=x^2+(6-2a)x+1-a.$ *Đồng nhất hệ số, ta được hệ:* $\begin{cases}2=6-2a\\3-a^2=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\3-4=1-2\end{cases}\Leftrightarrow a=2$ *và có lời giải 1 như sau:*

$$(*)\Leftrightarrow(2x+1)(\sqrt{x^2+2x+3}-2)=x^2+2x-1\Leftrightarrow\frac{(2x+1)(x^2+2x-1)}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}=x^2+2x-1$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-1)\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+3}=2x-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{2} \\ \begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ x^2+2x+3=(2x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{3} \end{array}\right..$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-1\pm\sqrt{2},\ x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải 2.

Do $x=-\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm nên $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}-2=\dfrac{x^2+6x+1}{2x+1}-2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}=\frac{x^2+2x-1}{2x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=0 \\ \sqrt{2x^2+2x+3}=2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{3} \end{array}\right..$$

Bình luận. *Về nguyên tắc tổng quát, ta nên trừ đi hai vế cho $ax+b$ và liên hợp vế trái, quy đồng vế phải, rồi đồng nhất tìm a, b. Nhưng do **hệ số x² bằng nhau nên để đơn giản có thể thêm hằng số a**. Từ nhận định này, ta có lời giải 3 bằng **phương pháp đặt ẩn số phụ không hoàn toàn (nên làm khi Δ là số chính phương)**:*

Lời giải 3. Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+3}\ge\sqrt{2}\Rightarrow x^2=t^2-2x-3$ thì

$(*) \Leftrightarrow t^2-(2x+1)\cdot t+4x-2=0$ có $\Delta_t=(2x-3)^2\Rightarrow t=2$ hoặc $t=2x-1$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+3}=2 \\ \sqrt{x^2+2x+3}=2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$ hoặc $x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}$ là các nghiệm.

> ***Ví dụ 61.*** Giải phương trình: $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2}$ $\quad(*)$

Phân tích. *Nếu biến đổi* $(x^2+2)\left[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right]=x^3+2x^2-(3+a)x+1-b$ *và liên hợp vế trái thì vế trái là bậc 2, vế phải là bậc 3 nên không thể đồng nhất. Nhưng nếu chia đa thức bên vế phải, rồi ghép căn thức với phần nguyên để liên hợp thì xuất hiện nhân tử chung và có lời giải sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=x+2-\frac{5x+3}{x^2+2} \Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2-x+1}-(x+2)\right]=-\frac{5x+3}{x^2+2} \quad (1)$$

- Với $\sqrt{x^2-x+1}+x+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=-x-2$: vô nghiệm.
- Với $\sqrt{x^2-x+1}+x+2\ne 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-(5x+3)}{\sqrt{x^2-x+1}+x+2}+\frac{5x+3}{x^2+2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5} \vee \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+x+2}=\frac{1}{x^2+2} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=x^2-x \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-\frac{3}{5},\ x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}.$

Ví dụ 62. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4 \quad (*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang

Điều kiện: $-2 \le x \le -1$ hoặc $x \ge 1$.

Phân tích và lời giải 1. *Sử dụng casio, tìm được hai nghiệm $x=\pm 1$, tức có nhân tử x^2-1. Do căn thức $\sqrt{x^2-1}$ bản thân có nghiệm $x=\pm 1$, nên sẽ không biến đổi. Lúc đó chỉ còn một phương án là ghép trực tiếp $\sqrt{2x^2+16x+18}-(2x+4)$ để liên hợp. Một điều cần lưu ý ở vế trái là tổng của hai căn bậc chẵn nên là số dương, do đó để phương trình có nghiệm thì điều kiện kéo theo là $2x+4 \ge 0$. Từ đó có lời giải 1:*

$$(*) \Leftrightarrow \left[\sqrt{2x^2+16x+18}-(2x+4)\right]+\sqrt{x^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x^2-1)}{\sqrt{2x^2+16x+18}+2x+4}+\sqrt{x^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(1-\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x^2+16x+18}+2x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \text{ hoặc } \sqrt{2x^2+16x+18}+2x+4=2\sqrt{x^2-1} \quad (1)$$

$$(*),(1) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4 \\ \sqrt{2x^2+16x+18}-2\sqrt{x^2-1}=-2x-4 \end{cases} \Rightarrow 3\sqrt{x^2-1}=4x+8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+8 \ge 0 \\ 9(x^2-1)=(4x+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ 7x^2+64x+73=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-32+3\sqrt{57}}{7}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\pm 1,\ x=\frac{-32+3\sqrt{57}}{7}.$

Phân tích và lời giải 2. *Do tồn tại $a=4,\ b=-1$ khi sử dụng đồng nhất thức cho biểu thức trong căn theo tổng bình phương hai biểu thức ngoài căn, nghĩa là có đồng nhất $2x^2+16x+18=a.(x+2)+b.(x^2-1)$ nên sẽ sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.*

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{4(x+2)^2-2(x^2-1)}=2(x+2)-\sqrt{x^2-1} \quad (1)$$

Do $x=-2$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế $x+2>0$, được:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4 - 2\cdot\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}} = 2 - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$ (2) và đặt $t = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \ge 0$ thì phương trình:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{4-2t^2} = 2 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 2 \\ 4 - 2t^2 = (2-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.\cdot$$

- Với $t = 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1:$ TMĐK.
- Với $t = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-1} = 4(x+2) \Leftrightarrow x = \dfrac{-32+3\sqrt{57}}{7}:$ TMĐK.

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x = \pm 1,\ x = \dfrac{3\sqrt{57}-32}{7}\cdot$

Ví dụ 63. Giải phương trình: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2-2x+2} = 5 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ne 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2-2x+2}\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+2} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}} = 5$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+2} = \sqrt{(x+1)^2+1} + \sqrt{(x-1)^2+1} \ge 2.$

$(1) \Leftrightarrow t + \dfrac{4}{t} = 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (loại) hoặc $t = 4$ (nhận).

Suy ra: $\sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \sqrt{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)} = 8$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4+4} = 6 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6} \\ x^4 + 4 = x^4 - 12x^2 + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6} \\ 12x^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot$$

★ **Nhóm II: Sử dụng chức năng table của casio tìm nhân tử bậc hai, bậc ba**

Việc xác định được nhân tử của phương trình vô tỷ là rất quan trọng, nó sẽ giúp chúng ta định hướng đi cho việc tách ghép phù hợp trong nhân liên hợp. Lúc này, casio là người bạn đồng hành, hổ trợ ta trong việc đó rất hiệu quả.

Ví dụ 64. Giải phương trình: $2.\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (*)$

Phân tích. *Nhập* $2.\sqrt{\dfrac{X^2+X+1}{X+4}}+X^2-4-\dfrac{2}{\sqrt{X^2+1}}$ *và bấm* ***SHIFT*** / ***CACL*** / **9** / = *thì thấy phương trình có nghiệm vô tỷ* $X=1.732050808.$ *Từ đó xác định lượng nhân tử bậc hai bằng chức năng* ***TABLE*** *của casio như sau: (****casio fx – 570 ES PLUS)***

- *Gán biến* $\mathrm{X}\to\mathrm{A}$ *(thao tác trên casio:* ***ALPHA /) / SHIFT / RCL / (–)***
- *Kiểm tra giá trị của hàm* $f(X)=A^2-AX$ *(thao tác:* ***MODE SETUP*** / **7** / ***ALPHA***

/ **(–)** / x^2 / – / ***ALPHA*** / **(–)** / ***ALPHA*** / **)** / = / – / 9 / = / 9 / = / 1 / = *). Khi đó*

màn hình casio cho ta:

	X	F(X)
9	–1	4.732
10	0	3

, và quan tâm đến dòng có giá trị nguyên.

Thấy dòng số 10 chứa 0 | 3 *là các số nguyên nên phương trình có nhân tử là* x^2-3

(0 của cột X là hệ số b, 3 của cột $F(X)$ *là hệ số của c trong nhân tử:* $\boxed{X^2-bX-c}$.

Một điều cần lưu ý nữa, đối với ***casio fx – 570 VN PLUS hoặc Vinacal 570es flus****: ta làm tương tự, nhưng không nhập hàm* $g(x)$ *vào, tức bấm:* ***MODE SETUP*** / **7** / ***ALPHA*** /**(–)** / x^2 /– / ***ALPHA*** / **(–)** / ***ALPHA*** / **)** / = / = / – / 9 / = / 9 / = / 1 / =

Từ định hướng nhân tử này, ta có cách ghép để liên hợp và có lời giải như sau:

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{x^2+x+1}{x+4}\ge 0\Rightarrow x+4>0\Leftrightarrow x>-4.$

$$(*)\Leftrightarrow (x^2-3)+2.\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}-1\right)+\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)+2.\frac{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}-1}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+1}+\frac{\sqrt{x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)+\frac{2.(x^2-3)}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4}+\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+1}.(\sqrt{x^2+1}+2)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)\left[1+\frac{2}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4}+\frac{1}{x^2+1+2\sqrt{x^2+1}}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Do $1+\dfrac{2}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4}+\dfrac{1}{x^2+1+2\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x>-4.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}.$

Bình luận*: Sau khi xác định lượng nhân tử* $x^2-3,$ *tôi thường hay cố định nhân tử này như lời giải, và chọn biểu thức ghép với 1 căn thức sao cho khi liên hợp xuất hiện*

nhân tử x^2-3 và căn còn lại chỉ cần "trả lại" lượng thêm bớt cho phù hợp với đề bài sẽ xuất hiện nhân tử. Cụ thể đối với căn $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}$, tôi sẽ ghép $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}-a$ và sau khi liên hợp được tử số $\dfrac{x^2+x+1}{x+4}-a^2=\dfrac{x^2+(1-a^2)x+1-4a^2}{x+4}\cdot$ Do có nhân tử là x^2-3 nên tôi sẽ chọn $a=1$. Còn đối với căn còn lại, tôi đã "trả lại" lượng mượn và ghép với căn này, sau đó quy đồng, rồi liên hợp sẽ có nhân tử x^2-3 như trên.

Ví dụ 65. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{x+9}{x^2+x+2}}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{x^2+1}{4}$ (*)

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được nhân tử là x^2-7 nên sẽ ghép và liên hợp để xuất hiện nhân tử này. Từ đó có lời giải như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-9\le x<-\sqrt{3}$ hoặc $x>\sqrt{3}$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{(x^2-7)+8}{4}-\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}-\sqrt{\frac{x+9}{x^2+x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-7)+\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{x+9}}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-7)+\frac{\sqrt{x^2-3}-2}{\sqrt{x^2-3}}+\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+9}}{\sqrt{x^2+x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-7)+\frac{x^2-7}{\sqrt{x^2-3}.(\sqrt{x^2-3}+2)}+\frac{x^2-7}{x^2+x+2+\sqrt{(x+9)(x^2+x+2)}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-7)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}.(\sqrt{x^2-3}+2)}+\frac{1}{x^2+x+2+\sqrt{(x+9)(x^2+x+2)}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-7=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{7} \text{ hoặc } x=\sqrt{7}.$$

Do $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}.(\sqrt{x^2-3}+2)}+\dfrac{1}{x^2+x+2+\sqrt{(x+9)(x^2+x+2)}}>0,\ \forall x\in(a).$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=\pm\sqrt{7}$.

Bình luận. *Qua hai thí dụ trên, nhận thấy rằng nếu việc xác định được nhân tử trước bằng casio thì rất dễ dàng cho việc tách ghép các căn thức để liên hợp tạo ra nhân tử đã định sẵn. Ta cùng xét tiếp thí dụ sau:*

Ví dụ 66. Giải phương trình: $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$ (*)

Điều kiện: $x^2+2x-1\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1-\sqrt{2} \\ x\ge \sqrt{2}-1 \end{array}\right.$.

Phân tích. *Bài toán dạng* $ax^2+bx+c=(dx+e).\sqrt{ax^2+fx+g}$ *có rất nhiều cách giải. Ta có thể giải loại này bằng liên hợp khi sử dụng casio tìm được* x^2+2x-5 *như sau:*

Lời giải. Liên hợp sau khi xác định lượng nhân tử x^2+2x-5.

$(*)\Leftrightarrow(x^2+2x-5)+2(x-1)(\sqrt{x^2+2x-1}-2)=0$

$$\Leftrightarrow(x^2+2x-5)+\frac{2(x-1)(x^2+2x-5)}{\sqrt{x^2+2x-1}+2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2+2x-5=0 & (1)\\ \sqrt{x^2+2x-1}=-2x & (2)\end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{6}$ hoặc $x=-1-\sqrt{6}.$

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x-1}=-2x:$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm $x=-1\pm\sqrt{6}.$

Ví dụ 67. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}+x^2-x-3=\sqrt{5x+7}\quad(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Bảo Lộc – Lâm Đồng

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được nhân tử* x^2-x-3 *và có sẵn trong phương trình. Ta không thể ghép 2 căn thức lại với nhau để liên hợp do lệch bậc. Đối với căn* $\sqrt{5x+7}$ *ta cần ghép* $(ax+b)-\sqrt{5x+7}$ *để liên hợp tạo được nhân tử bậc hai dạng:* x^2-x-3. *Về nguyên tắc sẽ đồng nhất thức tìm ra a, b, nhưng có thể nhẩm nhanh* $a=1,\ b=2$ *bằng cách lấy:* $x^2-x-3+(5x+7)=(x+2)^2$. *Hiển nhiên đã cộng* $x+2$ *nên sẽ trừ đi* $x+2$ *và ghép với căn bậc ba còn lại. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-\dfrac{7}{5}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5},\ b=x+2.$

$$(*)\Leftrightarrow(x^2-x-3)+\left[\sqrt[3]{x^3+7x^2+11x+5}-(x+2)\right]+\left[(x+2)-\sqrt{5x+7}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-3+\frac{x^2-x-3}{a^2+ab+b^2}+\frac{x^2-x-3}{x+2+\sqrt{5x+7}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-x-3)\left(\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+7}}+1\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\cdot$$

Do: $\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+7}}+1>0,\ \forall x\ge-\dfrac{7}{5}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\cdot$

Ví dụ 68. Giải phương trình: $\sqrt[3]{12x^2+46x-15}-\sqrt[3]{x^3-5x+1}=2x+2\quad(*)$

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được* $X=2$ *là 1 nghiệm. Để kiểm tra phương trình còn nghiệm hay không, sửa lại* $(\sqrt[3]{12X^2+46X-15}-\sqrt[3]{X^3-5X+1}-2X-2):(X-2)$ *và bấm shift solve 9 = thì phương trình cho nghiệm xấu nên tiếp tục sử dụng chức năng table tìm được nhân tử* x^2+2x-1. *Hiển nhiên phương trình đã cho luôn có*

nhân tử dạng $(x-2)(x^2+2x-1)=x^3-5x+2$ và đây là phương pháp tìm nhân tử bậc ba mà tôi hay thường sử dụng khi liên hợp phương trình vô tỷ.

Lời giải. Đặt $a=\sqrt[3]{12x^2+46x-15}$, $b=2x+1$, $c=\sqrt[3]{x^3-5x+1}$. Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow\left[\sqrt[3]{12x^2+46x-15}-(2x+1)\right]-\left(\sqrt[3]{x^3-5x+1}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-8x^3+40x-16}{a^2+ab+b^2}-\frac{x^3-5x+2}{c^2-c+1}=0\Leftrightarrow\frac{8(x^3-5x+2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{x^3-5x+2}{c^2-c+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(x^3-5x+2)\cdot\underbrace{\left(\frac{8}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{c^2-c+1}\right)}_{>0,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\pm\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2$ hoặc $x=-1\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 69. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}=x^2-7x+36-\dfrac{174}{x+5}\quad(*)$

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được $X=1$ là 1 nghiệm. Để kiểm tra phương trình còn nghiệm hay không, sửa lại $\left(\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}-x^2+7x-36+\dfrac{174}{x+5}\right):(X-1)$ và bấm shift solve 9 = thì phương trình cho nghiệm xấu nên tiếp tục sử dụng chức năng table tìm được nhân tử $x^2-3x-11$. Hiển nhiên phương trình đã cho luôn có nhân tử dạng $(x-1)(x^2-3x-11)=x^3-4x^2-8x+11$, từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\neq-5$.

$$(*)\Leftrightarrow(x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}=x^3-2x^2+x+6$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-8x+11=(x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}-2x^2-9x+5$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-8x+11=(x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}-(x+5)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-8x+11=(x+5).\left[\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}-(2x-1)\right]$$

$$\Leftrightarrow(x^3-4x^2-8x+11)+(x+5).\left[(2x-1)-\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}\right]=0$$

Để đơn giản, đặt $a=2x-1$, $b=\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}$. Khi đó phương trình:

$$\Leftrightarrow(x^3-4x^2-8x+11)+\frac{7(x+5)(x^3-4x^2-8x+11)}{a^2+ab+b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow(x^3-4x^2-8x+11)\cdot\left[1+\frac{7(x+5)}{a^2+ab+b^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(x^3-4x^2-8x+11)\cdot\frac{\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2}{4}+7(x+5)}{\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2}{4}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-4x^2-8x+11)\cdot\frac{\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+7(x+5)}{\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-4x^2-8x+11)\cdot\frac{\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{12x^2+16x+143}{4}}{\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}}=0$$

$\Leftrightarrow x^3-4x^2-8x+11=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\frac{3\pm\sqrt{53}}{2}$.

Vì: $\begin{cases}12x^2+16x+143>0, \forall x\\ \left(b+\frac{a}{2}\right)^2>0; \left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}>0\end{cases}$ nên lượng: $\frac{\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{12x^2+16x+143}{4}}{\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}}>0.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=1,\ x=\frac{3\pm\sqrt{53}}{2}$.

Ví dụ 70. Giải phương trình: $x^3+3x^2+x+2=2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$ (*)

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được nhân tử* x^2+2x-7 *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -4$.

$(*)\Leftrightarrow x^2\cdot\left[(x+3)-2\sqrt{x+4}\right]+\left[(x+2)-\sqrt{2x+1}\right]=0$ (1)

- Trường hợp 1. Nếu $\left[(x+3)-2\sqrt{x+4}\right]\cdot\left[(x+2)-\sqrt{2x+1}\right]=0$

  $\Leftrightarrow x=-1-2\sqrt{2}$: không là nghiệm của phương trình (1).
- Trường hợp 2. Nếu $x\ne -1-2\sqrt{2}\Rightarrow\left[(x+3)-2\sqrt{x+4}\right]\cdot\left[(x+2)-\sqrt{2x+1}\right]\ne 0$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2+2x-7)}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{x^2+2x-7}{x+2+\sqrt{2x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-7)\cdot\left(\frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{2x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-7=0\Leftrightarrow x=\pm2\sqrt{2}-1.\\ x^2(x+2+\sqrt{2x+1})+x+3+2\sqrt{x+4}=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

Từ (2), (*), suy ra hệ: $\begin{cases}x^3+3x^2+x+2=2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}\\ x^3+2x^2+x+3=-x^2\sqrt{2x+11}-2\sqrt{x+4}\end{cases}$

$$\Rightarrow x^2-1=2x^2\sqrt{x+4}+x^2\sqrt{2x+11}+\sqrt{2x+11}+2\sqrt{x+4}>x^2\sqrt{2.(-4)+11}$$

$= x^2\sqrt{3} > x^2 - 1$ nên phương trình vô nghiệm, suy ra (2) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2\sqrt{2} - 1$.

Ví dụ 71. Giải phương trình: $\sqrt{8-3x^2} = x^3 - 3x + 1$ (*)

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được nhân tử* $x^2 - x - 1$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $8 - 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{8\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-1) + \left[(2-x) - \sqrt{8-3x^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-1) + \frac{4(x^2-x-1)}{2-x+\sqrt{8-3x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(x+1+\frac{4}{2-x+\sqrt{8-3x^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-x-1=0 & (1) \\ x+1+\dfrac{4}{2-x+\sqrt{8-3x^2}} = 0 & (2)\end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$: thỏa mãn điều kiện.

$(2) \Leftrightarrow (x+1)(2-x+\sqrt{8-3x^2}) + 4 = 0$ và thế $\sqrt{8-3x^2} = x^3 - 3x + 1$

$$\Rightarrow (x+1)(2-x+x^3-3x+1)+4 \Leftrightarrow (x+1)(x^3-4x+3)+4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4-4x^2+4)+x^3-x+4 = 0 \Leftrightarrow 0 < (x^2-2)^2 + x^3 - x + 4 = 0$$: vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 72. Giải phương trình: $(3x^2+11)\sqrt{x^2+1} = 3\sqrt{3}.x^3 - 8x^2 + 11\sqrt{3}.x + 4$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $3\sqrt{3}.x^3 - 8x^2 + 11\sqrt{3}.x + 4 \geq 0$ (1)

$$(*) \Leftrightarrow (3x^2+11)\sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}.x(3x^2+11) - 8x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+11)(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3}.x) = 4(1-2x^2) \Leftrightarrow \frac{(3x^2+11)(1-2x^2)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3}.x} = 4(1-2x^2)$$

$$\Leftrightarrow (1-2x^2)\left(\frac{3x^2+11}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3}.x} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow (1-2x^2)(3x^2+11-4\sqrt{x^2+1}-4\sqrt{3}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x^2)\cdot\left[(x^2+1-2.\sqrt{x^2+1}.2+2^2) + 2(x^2-2x.\sqrt{3}+3)\right] = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (1-2x^2)\left[(\sqrt{x^2+1}-2)^2 + 2(x-\sqrt{3})^2\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x^2 = 0 \\ \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 2 = 0 \\ x - \sqrt{3} = 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x = \sqrt{3}$.

Kết luận: Thế vào điều kiện (1), nghiệm phương trình là $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \sqrt{3}$.

Bình luận. *Trong cách biến đổi và giải phương trình (2), ta sử dụng tổng hai số không âm dạng* $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$. *Cách biến đổi này thường áp dụng đối với các bài toán khi hệ số trước căn thức là số chẵn và biến đổi dựa vào hằng đẳng thức (sẽ tìm hiểu kỹ ở bài giải phương trình bằng phương pháp đánh giá). Chẳng hạn giải phương trình vô tỷ sau:* $4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$ *thì ta sẽ biến đổi về hằng đẳng thức thành:* $(4 - 2.2.\sqrt{x+3} + x + 3) + (1 - 2\sqrt{2x-1} + 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2-\sqrt{x+3})^2 + (1-\sqrt{2x-1})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x+3} = 0 \\ 1-\sqrt{2x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. *Sai lầm thường gặp của học sinh là sử dụng casio dự đoán* $x = 1$, *khi đó sẽ ghép hằng số để liên hợp như sau:* $4x(\sqrt{x+3} - 2) + 2(\sqrt{2x-1} - 1) = 4x^2 - 5x + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4x(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{4(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1} = (x-1)(4x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \frac{4x}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x-1}+1} - 4x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Lúc đó rất khó khăn để đánh giá phương trình còn lại. Thông qua qua ví dụ nhỏ này, ta nhận ra toán học sơ cấp có rất nhiều cách giải khác nhau, tùy thuộc vào đặc điểm của từng bài toán với dấu hiệu nhận dạng mà ta chọn phương pháp giải cho phù hợp sao cho nhanh gọn, chính xác và ít sai sót nhất.

Ví dụ 73. Giải phương trình: $\sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2} + 2\sqrt[3]{x^3 - 20} = 2(x-1)$ (*)

Phân tích. *Sử dụng casio tìm được nhân tử* $x^2 - 2x - 2$ *nên có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x^3 + x^2 - 8x - 2 \geq 0$ (*a*)

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2} - 2 = (2x-4) - 2\sqrt[3]{x^3 - 20}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - 8x - 6}{\sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2} + 2} = \frac{(2x-4)^3 - 8(x^3 - 20)}{(2x-4)^2 + 2(2x-4)\sqrt[3]{x^3 - 20} + \sqrt[3]{(x^3 - 20)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x^2 - 2x - 2)}{\sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2} + 2} = \frac{-48(x^2 - 2x - 2)}{(2x-4)^2 + 2(2x-4)\sqrt[3]{x^3 - 20} + \sqrt[3]{(x^3 - 20)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \\ \frac{-48}{(2x-4)^2 + 2(2x-4)\sqrt[3]{x^3 - 20} + \sqrt[3]{(x^3 - 20)^2}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2} + 2} \quad (1) \end{array}\right.$$

- Với $x \ge -3 \Rightarrow \begin{cases} VT_{(1)} = \dfrac{-48}{\left[(2x-4) + \dfrac{\sqrt[3]{(x^3-20)^2}}{2}\right]^2 + \dfrac{3\sqrt[3]{(x^3-20)^2}}{4}} < 0 \\ VP_{(1)} = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow (1): VN_o.$

- Với $x < -3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2-2\sqrt[3]{x^3-20} < 0 \\ \sqrt{x^3+x^2-8x-2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow (*):$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{3}.$

Ví dụ 74. Giải phương trình: $(x^3+3x+5)\sqrt{2x^2+5x} = 3x^3+5x^2+2x+5 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $2x^2+5x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\dfrac{5}{2}$ hoặc $x \ge 0.$

$$(*) \Leftrightarrow (x^3+3x+5)(\sqrt{2x^2+5x}-1) = 3x^3+5x^2+2x+5-(x^3+3x+5)$$

$$\Leftrightarrow (x^3+3x+5)\cdot\frac{2x^2+5x-1}{\sqrt{2x^2+5x}+1} = x\cdot(2x^2+5x-1)$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+5x-1)\left(\frac{x^3+3x+5}{\sqrt{2x^2+5x}+1} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2+5x-1=0 & (1) \\ x^3+3x+5 = x(\sqrt{2x^2+5x}+1) & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}$ hoặc $x = \dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}$: thỏa mãn điều kiện.

$$(2) \Leftrightarrow x^3+2x+5 = x\sqrt{2x^2+5x} \Leftrightarrow \left[x^3+(2x+5)\right]^2 = (x\sqrt{x}.\sqrt{2x+5})^2$$

$$\Leftrightarrow (x^3)^2 + 2x^3(2x+5) + (2x+5)^2 = x^3(2x+5)$$

$$\Leftrightarrow (x^3)^2 + x^3(2x+5) + (2x+5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{2x+5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\cdot(2x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+2x+5=0 \\ 2x+5=0 \end{cases}: \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}$, $x = \dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}\cdot$

Bình luận. *Do phát hiện* $(3x^3+5x^2+2x+5)-(x^3+3x+5) = x(2x^2+5x-1)$ *và nếu ghép* $\sqrt{2x^2+5x}-1 = \dfrac{2x^2+5x-1}{\sqrt{2x^2+5x}+1}$ *thì thấy xuất hiện nhân tử* $2x^2+5x-1$ *nên có phép nhóm như trên. Ta cũng có thể sử dụng casio để tìm ra nhân tử này.*

Ví dụ 75. Giải phương trình: $(3x^2-5x-6)\sqrt{2-x} = \sqrt{3x^2-6x-5} \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 3x^2-6x-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\le \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}$.

$$(*)\Leftrightarrow (3x^2-5x-7)\sqrt{2-x}=\sqrt{3x^2-6x-5}-\sqrt{2-x}=\frac{3x^2-5x-7}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow (3x^2-5x-7)\cdot\left(\sqrt{2-x}-\frac{1}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-5x-7=0 \\ \sqrt{2-x}=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-5x-7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5-\sqrt{109}}{6} \\ \sqrt{(2-x)(3x^2-6x-5)}=x-1: VN_o \end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5-\sqrt{109}}{6}$.

Ví dụ 76. Giải phương trình: $(x^2+3)\sqrt{x^2-x+1}=x^3+3x^2-4x+1$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=\frac{x^3+3x^2-4x+1}{x^2+3}=(x+3)-\frac{7x+8}{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x+8}{x^2+3}+\left[\sqrt{x^2-x+1}-(x+3)\right]=0\Leftrightarrow \frac{7x+8}{x^2+3}-\frac{7x+8}{\sqrt{x^2-x+1}+x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (7x+8)\left(\frac{1}{x^2+3}-\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+x+3}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{8}{7} \\ \sqrt{x^2-x+1}=x^2-x \quad (1) \end{array}\right.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t^2=x^2-x+1$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow t^2-t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 2x^2-2x-1-\sqrt{5}=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Kết luận: Nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-\dfrac{8}{7},\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 11. Giải phương trình: $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 12. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

BT 13. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-3}$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 14. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2+5}+x=x^2+1$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 15. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+2x-10=\sqrt{2x-3}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 16. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 17. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 18. Giải phương trình: $x+\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 19. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+x^2=\sqrt{3x-2}+x+2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 20. Giải phương trình: $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 21. Giải phương trình: $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+2}=\dfrac{3x-1}{5}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 22. Giải phương trình: $9(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2})=x+3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 23. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 24. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 25. Giải phương trình: $\dfrac{3x}{\sqrt{3x+10}}=\sqrt{3x+1}-1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 26. Giải phương trình: $\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 27. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2-8x+1}+3\sqrt{x^2-x+1}=8-x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 28. Giải phương trình: $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 29. Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 30. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}+x^4-5x^3+12x^2-15x+3=0.$

BT 31. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 32. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x^2+7}+\dfrac{10}{3}\cdot x-4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 33. Giải phương trình: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-2x^2+7x+2=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 34. Giải phương trình: $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}+x^3-5x^2+10x-13=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 35. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}+2x^3+x^2-5x-3=0.$

BT 36. Giải phương trình: $3x^3-17x^2-8x+9+\sqrt{3x-2}-\sqrt{7-x}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 37. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}+x^4-2x^3-3x^2+8x-8=0.$

BT 38. Giải phương trình: $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 39. Giải phương trình: $\dfrac{2(x-1)^2}{(3-\sqrt{7+2x})^2}=x+20.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 40. Giải phương trình: $\dfrac{6x^2}{(\sqrt{2x+1}+1)^2}=2x+\sqrt{x-1}+1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 41. Giải phương trình: $\dfrac{8x}{\sqrt{8x+1}-1}=3\sqrt{2x-1}+1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 42. Giải phương trình: $(x-4)(\sqrt{x+1}+1)^2=x^2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 43. Giải phương trình: $(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+3})(1+\sqrt{x^2+10x+21})=4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 44. Giải phương trình: $(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^2+7x+10})=3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 45. Giải phương trình: $(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{1+x}+2x-5)=x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 46. Giải phương trình: $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 47. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-4}+x+2\sqrt{5x-4}=16.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 48. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 49. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 50. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2}-2.\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 51. Giải phương trình: $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 52. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 53. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 54. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt{3x+1}=2-x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 55. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2}+6=\sqrt[3]{5-x}-x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 56. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+2}+3x^3+x^2+3x=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 57. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+4}+\sqrt{2x+7}+x^2+8x+13=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 58. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{2x+13}+4x^2+44x+117=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 59. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+3}+(x+2)\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{6-x}-3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 60. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-5}+\sqrt[3]{2x-3}+x^3+x=2(x^2+1).$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 61. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{x^2-4x-4}+x=2\sqrt{x-1}-4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 62. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{2x}=x+2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 63. Giải phương trình: $\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt{2x-1}+x^2+x=2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 64. Giải phương trình: $x^3+2x-(x^2+1)\sqrt{2x-1}=\sqrt[3]{2x^2-x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 65. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+\sqrt{x}+x^2=3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 66. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-10}+\sqrt{x-1}+x^2=x+1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 67. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt{3-x}=2x+2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 68. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-\dfrac{4}{3}}+4x=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt{3x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 69. Giải phương trình: $x^2+2x=x\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{3x+2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 70. Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x^2+5x+5}=\sqrt{x+2}-3x-2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 71. Giải phương trình: $(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)(1+\sqrt{1+x})=x\sqrt{x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 72. Giải phương trình: $(x+1)(2\sqrt{x^2+3}-x^2)+\sqrt[3]{3x^2+5}=5x+3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 73. Giải phương trình: $(2+\sqrt{x^2-2x+5})(x+1)+4x\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{x^2-2x+5}$

BT 74. Giải phương trình: $3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}=2x+2\sqrt{4x^2-x+1}.$

BT 75. Giải phương trình: $\sqrt{2x-11}-\sqrt{2x^2-16x+28}=5-x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 76. Giải phương trình: $\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}}+6=2\sqrt{\dfrac{x^2+3x-3}{3x+2}}+x^2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 77. Giải phương trình: $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}}+1=\dfrac{x^2}{2}+\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+3}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 78. Giải phương trình: $2\sqrt{3x-2}-2(x+1)\sqrt{x+2}=3x^2-8x-4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 79. Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{x+1}-(4x+5)\sqrt{2x+3}+6x+23=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 80. Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{3x+6}-2\sqrt{x^2+x-1}+3x^2-10=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 81. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}=3x^2+14x+13.$

BT 82. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{2x+3}+2(3x+1)\sqrt{4x+2}=16x^2+14x+2.$

BT 83. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 84. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+7}-\sqrt{5x+6}+x^2-x-3=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 85. Giải phương trình: $(x^2+3)\sqrt{x^2-x+1}=x^3+3x^2-4x+1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 86. Giải phương trình: $x^2+x-\sqrt{2x-1}=3-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 87. Giải phương trình: $5\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{7x-8}+2=x\sqrt{2x-1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 88. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}=2(x+1).$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 89. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt[3]{x+5}=x^2+x-6.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 90. Giải phương trình: $(5x-1)\sqrt{x^3+3}=x^3+6x^2-2x+3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 91. Giải phương trình: $6x\sqrt{x^2-x}-18\sqrt{x^3-9x}=x^3-10x^2+81.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 92. Giải phương trình: $\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x}=x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 93. Giải phương trình: $2x+\frac{6}{x}-1=\sqrt{4x^2+9}+\sqrt{2x-3}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 94. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2}+1)^2}=3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 95. Giải phương trình: $3\sqrt{6x^2-x-1}+\frac{46x+17}{\sqrt{2x-1}-4\sqrt{3x+1}}=5-8\text{x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 96. Giải: $(x^2-10x+26)\sqrt{4-x}-(x^2-2x+2)\sqrt{x-2}=x^2+3x-18.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 97. Giải phương trình: $(x+3)(2+\sqrt{x+2})=\sqrt{2x+5}+\sqrt[3]{3x+7}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 98. Giải phương trình: $\sqrt{6-x}+\sqrt{2x+6}+\sqrt{6x-5}=x^2-2x-5.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 99. Giải phương trình: $x^2\sqrt{x+3}+2\sqrt{5x-6}=x(\sqrt{5x^2+9x-18}+2).$

BT 100. Giải phương trình: $x^3+4\text{x}^2+x+3=2\text{x}^2\sqrt{x+5}+\sqrt{2\text{x}+13}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 101. Giải phương trình: $x^3+3x^2+x+2=2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 102. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-2x+1}-\sqrt{2x^2+3x-3}=2-x-\sqrt{x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 103. Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=x^2-x-2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 104. Giải phương trình: $2\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{3x^2-2x}=\sqrt{6x^3-7x^2+2x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 105. Giải phương trình: $x+4-\sqrt{x(x+8)}=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 106. Giải phương trình: $\frac{\sqrt[3]{x+6}}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=x+1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 107. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{2x+x^2}{1+x^2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 108. Giải phương trình: $(3x^2-5x-6)\sqrt{2-x}=\sqrt{3x^2-6x-5}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 109. Giải phương trình: $\frac{2-x}{4}=\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

§3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ



I. Đặt ẩn phụ để giải phương trình vô tỷ

Đặt ẩn phụ là một hình thức đưa bài toán từ tình thế phức tạp sang tình thế đơn giản hơn mà đã biết cách giải. Có rất nhiều cách đặt ẩn phụ khác nhau tùy thuộc vào đặc điểm của từng phương trình mà ta có thể đặt một ẩn phụ, hai ẩn phụ, ba ẩn phụ,… để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình. Sau khi đặt ẩn phụ, ta cần đi tìm điều kiện cho ẩn phụ. Tùy vào mục đích của ẩn phụ mà ta đi tìm điều kiện cho hợp lý (dễ, không gây sai sót).

II. Một số dạng đặt ẩn phụ cơ bản thường gặp và phương pháp giải.

1. Dạng 1. $a.f(x)+b.\sqrt[n]{f(x)}+c=0$ (1)

Nhận dạng: Biểu thức chứa biến trong và ngoài căn thức có mối liên hệ.

Phương pháp giải:

- Bước 1. Đặt điều kiện.
- Bước 2. Đặt $t=\sqrt[n]{f(x)}\Rightarrow t^n=f(x)$ thì $(1)\Leftrightarrow a.t^n+b.t+c=0\Rightarrow t\Rightarrow x.$

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 77. Giải phương trình: $3x^2-12x-5\sqrt{10+4x-x^2}+12=0$ (*)

Phân tích. *Nhận thấy nếu đặt* $t=\sqrt{10+4x-x^2}\ge 0,$ *thì biểu thức chứa biến số ngoài căn thức* $3x^2-12x=-3.(4x-x^2)$ *có mối liên hệ với nhau nên có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $10+4x-x^2\ge 0\Leftrightarrow 2-\sqrt{14}\le x\le 2+\sqrt{14}.$

Đặt $t=\sqrt{10+4x-x^2}\ge 0\Rightarrow t^2=10+4x-x^2\Rightarrow 3x^2-12x=3(10-t^2).$

$$(*)\Leftrightarrow 3(10-t^2)-5t+12=0\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 0\\-3t^2-5t+42=0\end{cases}\Leftrightarrow t=3.$$

Với $t=3,$ suy ra: $\sqrt{10+4x-x^2}=3\Leftrightarrow x^2-4x-1=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{5}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=2\pm\sqrt{5}.$

Ví dụ 78. Giải phương trình: $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$ (*)

Phân tích. *Nhận thấy nếu đặt* $t=\sqrt{x^2+5x+2}\ge 0,$ *thì biểu thức chứa biến số ngoài căn thức* $(x+4)(x+1)=x^2+5x+4$ *có mối liên hệ với nhau nên có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x^2+5x+2\ge 0.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+5x+2}\ge 0\Rightarrow t^2=x^2+5x+2\Rightarrow x^2+5x=t^2-2.$

$(*)\Leftrightarrow t^2-3t-4=0\Leftrightarrow t=-1$ (loại) hoặc $t=4$ (nhận).

Với $t=4,$ suy ra: $\sqrt{x^2+5x+2}=4 \Leftrightarrow x^2+5x-14=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-7.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=2,\ x=-7.$

Ví dụ 79. Giải phương trình: $6x^2+2x+\sqrt[3]{3x^2+x+4}-10=0$ (*)

Phân tích. *Nhận thấy nếu đặt* $t=\sqrt[3]{3x^2+x+4},$ *thì biểu thức chứa biến số ngoài căn thức:* $6x^2+2x=2.(3x^2+x)$ *có mối liên hệ với nhau nên có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt[3]{3x^2+x+4} \Rightarrow t^3=3x^2+x+4 \Rightarrow 3x^2+x=t^3-4.$

$(*) \Leftrightarrow 2(t^3-4)+t-10=0 \Leftrightarrow 2t^3+t-18=0 \Leftrightarrow (t-2)(2t^2+4t+9)=0 \Leftrightarrow t=2.$

Với $t=2,$ suy ra: $\sqrt[3]{3x^2+x+4}=2 \Leftrightarrow 3x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-\dfrac{4}{3}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1,\ x=-\dfrac{4}{3}\cdot$

Ví dụ 80. Giải phương trình: $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$ (*)

Phân tích. *Phương trình có dạng cơ bản* $\sqrt{A}-\sqrt{B}=C,$ *hướng xử lý thường gặp là đặt điều kiện, lũy thừa và giải phương trình hệ quả. Do hai biểu thức chứa biến trong căn thức có mối liên hệ với nhau, để đơn giản có thể đặt* $t=x^2-x$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 2.$ Đặt $t=x^2-x.$ Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3+t}-\sqrt{2-t}=1 \Leftrightarrow \sqrt{3+t}=1+\sqrt{2-t} \Leftrightarrow 3+t=3-t+2\sqrt{2-t}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-t}=t \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2+t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t=1 \ \vee \ t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow t=1.$$

Với $t=1,$ suy ra: $x^2-x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Ví dụ 81. Giải phương trình: $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}-7$ (*)

Phân tích. *Đối với bài toán có dạng thuận nghịch loại* $f\left(x\pm\dfrac{1}{x};x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ *ta đều có thể giải bằng cách đặt ẩn số phụ* $t=x\pm\dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2=\left(x\pm\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}\pm 2.$

Lời giải. Điều kiện: $x>0,$ thì $(*) \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=2\left(x+\dfrac{1}{4x}\right)-7$ (1)

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\overset{Cauchy}{\geq}2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2}\Rightarrow t^2=x+\dfrac{1}{4x}+1.$

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}3t=2(t^2-1)-7\\ t\geq\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t^2-3t-9=0\\ t\geq\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow t=3.$

Với $t=3\Rightarrow\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=3\Leftrightarrow 2x-6\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{8\pm3\sqrt{7}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=\dfrac{8\pm3\sqrt{7}}{2}\cdot$

Ví dụ 82. Giải phương trình: $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$ $(*)$

Phân tích. *Nhận thấy biểu thức ngoài căn thức là $x+1$, biểu thức trong căn thức có chứa x^2+1. Nếu chia $\sqrt{x}>0$ được $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}-4}$ và đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow t^2$ thì sẽ biểu diễn hết theo biến mới t và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 0$.

- Trường hợp 1. Nếu $x=0$ thì $(*)\Leftrightarrow 2=0$: sai nên $x=0$ không là nghiệm.
- Trường hợp 2. Nếu $x>0$, chia hai vế cho $\sqrt{x}>0$, thì:

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}-4}-3\geq 0$ (1). Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\overset{Cauchy}{\geq}2\Rightarrow t^2=x+\dfrac{1}{x}+2.$

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{t^2-6}=3-t\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq t\leq 3\\ t^2-6t+9=t^2-6\end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}\cdot$ Suy ra:

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}+2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\ \vee\ \sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=4\ \vee\ x=\frac{1}{4}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm $x=4$, $x=\dfrac{1}{4}\cdot$

Ví dụ 83. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+8x+5}+\sqrt{2x^2-4x+5}=6\sqrt{x}$ $(*)$

Phân tích. *Phương trình có dạng cơ bản $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}$, nhưng ta sẽ không lũy thừa lên do sau khi lũy thừa bậc cao nhất của nó sẽ không triệt tiêu và sẽ gây khó khăn cho việc giải. Để ý hệ số của a, c, $(a=2,\ c=5)$ của 2 tam thức bậc hai ax^2+bx+c trong hai căn thức ở vế trái bằng nhau, nên ta sẽ chia 2 vế cho $\sqrt{x}>0$ sau khi xét $x=0$ có phải là nghiệm hay không ? Khi đó đặt ẩn phụ sẽ đưa bài toán về dạng cơ bản.*

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 0$. Do $x=0$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình $(*)$ cho $\sqrt{x}>0$, ta được:

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{2x+\dfrac{5}{x}+8}+\sqrt{2x+\dfrac{5}{x}-4}=6$ (1)

Đặt $t = 2x + \frac{5}{x} \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{10}$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{t+8} + \sqrt{t-4} = 6$

$$\Leftrightarrow 2t + 4 + 2\sqrt{(t+8)(t-4)} = 36 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 4t - 32} = 16 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{10} \leq t \leq 16 \\ t^2 + 4t - 32 = (16-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{10} \leq t \leq 16 \\ 36t = 288 \end{cases} \Leftrightarrow t = 8.$$

Với $t = 8$, suy ra: $2x + \frac{5}{x} = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $x = \frac{4-\sqrt{6}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$.

Bình luận. *Trong rất nhiều bài toán, phép đặt ẩn phụ chỉ được xác định khi qua các phép biến đổi, chẳng hạn: phép chia, phép lũy thừa, phép đồng nhất,… Sau đây ta cùng xét một vài ví dụ về loại này.*

Ví dụ 84. Giải phương trình: $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Đồng Tháp năm 2011

Phân tích. *Sau khi chia cho lượng* $x > 0$, *thì phương trình xuất hiện những đại lượng* $\sqrt{x - \frac{1}{x}}$, $x - \frac{1}{x}$, *có mối liên hệ với nhau nên sẽ đặt* $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \geq 0$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x - \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;0) \cup [1;+\infty)$.

Chia 2 vế của phương trình $(*)$ cho $x \neq 0$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right) + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \geq 0$, thì $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2t - 3 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \vee t = -3 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$

Với $t = 1$, suy ra: $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 85. Giải phương trình: $\sqrt{x+8} + \frac{9x}{\sqrt{x+8}} - 6\sqrt{x} = 0$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Bến Tre năm 2014

Phân tích. *Nếu chia 2 vế cho* $\sqrt{x}>0,$ *thì phương trình sẽ tạo ra 2 đại lượng có dạng nghịch đảo của nhau là* $\dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x}},\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}}\cdot$ *Từ đó đặt* $t=\dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x}}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}}=\dfrac{1}{t}$ *và có lời giải 1. Nhưng để ý, sau khi qui đồng và bỏ mẫu ta được* $10x+8-6\sqrt{x(x+8)}=0,$ *đây là dạng cơ bản* $\sqrt{A}=B$ *(lời giải 2). Ngoài ra, do hệ số trước căn thức là số chẵn, nên có khả năng đưa về dạng tổng các số không âm, hoặc* $A^n=B^n$ *(lời giải 3).*

Điều kiện: $x\ge 0.$

Lời giải 1. Do $x=0$ không là nghiệm nên chia 2 vế cho $\sqrt{x}>0,$ ta được:

$$(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x}}+9\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}}-6=0 \qquad (1)$$

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x}}>0,$ thì $(1)\Leftrightarrow t+\dfrac{9}{t}-6=0\Leftrightarrow t^2-6t+9=0\Leftrightarrow t=3.$

Với $t=3,$ suy ra: $\sqrt{x+8}=3\sqrt{x}\Leftrightarrow x+8=9x\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1.$

Lời giải 2.

$(*)\Leftrightarrow 10x+8-6\sqrt{x(x+8)}=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+8x}=5x+4\Leftrightarrow x=1:$ thỏa mãn điều kiện.

Lời giải 3.

$(*)\Leftrightarrow 10x+8-6\sqrt{x(x+8)}=0\Leftrightarrow(3\sqrt{x})^2-2.(3\sqrt{x}).\sqrt{x+8}+(\sqrt{x+8})^2=0$

$\Leftrightarrow(3\sqrt{x}-\sqrt{x+8})^2=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=\sqrt{x+8}\Leftrightarrow x=1:$ thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 86. Giải phương trình: $x^2-3x+3=\left(4+3x-\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{x-1} \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$ Chia 2 vế của $(*)$ cho $x^2>0,$ ta được:

$$(*)\Leftrightarrow 1-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\left[4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+3\right]\cdot\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}\right)}=\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\cdot$

$(1)\Leftrightarrow 1-3t^2=(4t^2+3).t\Leftrightarrow 4t^3+3t^2+3t-1=0\Leftrightarrow(4t-1)(t^2+t+1)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4}\cdot$

Suy ra: $\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{16}=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow x=8\pm 4\sqrt{3}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=8\pm 4\sqrt{3}.$

Ví dụ 87. Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2 \qquad (*)$

Phân tích. *Nhận thấy* $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{(x-\sqrt{x^2-1})\cdot(x+\sqrt{x^2-1})}=1$ *và nếu đặt* $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$ *thì* $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{t}$ *nên có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}>0 \end{cases}$ (a)

Đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}>0,$ khi đó: $(*)\Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1.$

Với $t=1,$ suy ra: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-1=(x-1)^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: Thế vào $(a),$ suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=1.$

Ví dụ 88. Giải phương trình: $1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12x}$ $(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Phan Ngọc Hiển – Cà Mau

Phân tích. *Với điều kiện* $x^2-1>0,$ *thì vế phải dương và để phương trình có nghiệm thì cần thêm điều kiện là* $x>0.$ *Lúc này biểu thức trong căn thức có dạng bậc 2, do đó ta cần lũy thừa hai vế để tạo ra dạng bình phương khi 2 vế đều dương, từ đó định hướng được phép đặt ẩn phụ và có lời giải 1 như sau:*

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x>0 \end{cases}\Leftrightarrow x>1.$

Lời giải 1. Bình phương và đặt 1 ẩn phụ.

$$(*)\Leftrightarrow\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2=\left(\frac{35}{12}\right)^2\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{x^2}{x^2-1}\right)+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^4}{x^2-1}+2\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1225}{144}=0 \qquad (1)$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}>0,$ khi đó: $(1)\Leftrightarrow\begin{cases} t^2+2t-\dfrac{1225}{144}=0 \\ t>0 \end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{25}{12}\cdot$

Với $t=\dfrac{25}{12}\Rightarrow 25\sqrt{x^2-1}=12x^2\Leftrightarrow 144x^4-625x^2+625=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{25}{9}\vee x^2=\dfrac{25}{16}\cdot$

Suy ra: $x=\pm\dfrac{5}{3}$ hoặc $x=\pm\dfrac{5}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\dfrac{5}{3},\ x=\dfrac{5}{4}\cdot$

Lời giải 2. Đặt 2 ẩn phụ đưa về hệ phương trình.

$(*) \Leftrightarrow x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$ (1). Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x} \\ v = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = \dfrac{1}{x^2} \\ v^2 = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} \end{cases}.$

Suy ra: $u^2 + v^2 = 1$ và kết hợp với (1) được hệ $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{35}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 1 \\ \dfrac{12}{35} \cdot (u+v) = uv \end{cases}$

Đặt $S = u+v, P = uv,\ (S^2 \ge 4P)$. Khi đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ 12S = 35P \end{cases} \Rightarrow S = \dfrac{7}{5},\ P = \dfrac{12}{25}\cdot$

Khi đó $u,\ v$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - \dfrac{7}{5}X + \dfrac{12}{25} = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{4}{5} \vee X = \dfrac{3}{5}\cdot$

Suy ra: $u = \dfrac{4}{5}$ hoặc $u = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{5}$ hoặc $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$ hoặc $x = \dfrac{5}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \dfrac{5}{3},\ x = \dfrac{5}{4}\cdot$

Ví dụ 89. Giải phương trình: $\dfrac{5x}{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{2x^2}{4-x^2} + \dfrac{5\sqrt{4-x^2}}{x} + 4 = 0 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $-2 < x < 2$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{x^2}{4-x^2}\right) + \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + 2 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, suy ra: $t^2 = \dfrac{x^2}{4-x^2} + \dfrac{4-x^2}{x^2} + 2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{x^2}{4-x^2} = t^2 - 1.$

$(1) \Leftrightarrow t^2 + \dfrac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2$ hoặc $t = -\dfrac{1}{2}\cdot$

- Với $t = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} = -2 \Leftrightarrow 4 = -2x\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2(4-x^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$
- Với $t = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4 = -\dfrac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 - 4x^2 + 64 = 0 \end{cases} : VN_o.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -\sqrt{2}$.

Ví dụ 90. Giải phương trình: $\dfrac{27x}{\sqrt{8x^2+25}} + \dfrac{125}{x^2} - 14 = 0 \qquad (*)$

Phân tích. *Phương trình có dạng tổng quát* $\boxed{\frac{b}{x^2}+\frac{mx}{\sqrt{ax^2+b}}+n=0}$. *Khi đó ta thêm bớt dạng:* $\left(\frac{b}{x^2}+a\right)+\frac{mx}{\sqrt{ax^2+b}}+n-a=0 \Leftrightarrow \frac{ax^2+b}{x^2}+m\cdot\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}+n-a=0$. *Từ đó có phép đặt ẩn* $t=\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}$, *suy ra:* $\frac{ax^2+b}{x^2}=\frac{1}{t^2}$ *và giải phương trình bậc ba theo t.*

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{27x}{\sqrt{8x^2+25}}+5\left(\frac{25}{x^2}+8\right)-54=0\Leftrightarrow \frac{27x}{\sqrt{8x^2+25}}+\frac{5(8x^2+25)}{x^2}-54=0 \quad (1)$$

Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{8x^2+25}}\neq 0$, suy ra: $\frac{8x^2+25}{x^2}=\frac{1}{t^2}\cdot$ Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow 27t+\frac{5}{t^2}-54=0\Leftrightarrow 27t^3-54t^2+5=0\Leftrightarrow\left(t-\frac{1}{3}\right)(27t^2-45t-15)=0$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \text{ hoặc } t=\frac{5+3\sqrt{5}}{6} \text{ hoặc } t=\frac{5-3\sqrt{5}}{6}\cdot$$

- Với $t=\frac{1}{3}$, suy ra: $\frac{x}{\sqrt{8x^2+25}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\sqrt{8x^2+25}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2=25\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$
- Với $t=\frac{5+3\sqrt{5}}{6}$, suy ra: $\frac{x}{\sqrt{8x^2+25}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{6}\Leftrightarrow(5+3\sqrt{5})\sqrt{8x^2+25}=6x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\(70+30\sqrt{5})(8x^2+25)=36x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\(560+174)x^2+25(70+30\sqrt{5})=0\end{cases}: VN_o.$$

- Với $t=\frac{5-3\sqrt{5}}{6}$, suy ra: $\frac{x}{\sqrt{8x^2+25}}=\frac{5-3\sqrt{5}}{6}\Leftrightarrow(5-3\sqrt{5})\sqrt{8x^2+25}=6x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\(70-30\sqrt{5})(8x^2+25)=36x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\(524-240\sqrt{5})x^2+1750-750\sqrt{5}=0\end{cases} VN_o.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

Ví dụ 91. Giải phương trình: $2x^2-3x+7-3\sqrt[3]{4x+4}=0$ (*)

Học sinh giỏi Tp. Hà Nội năm 2015

Phân tích. *Phương trình có 1 căn thức và sử dụng casio tìm được 1 nghiệm duy nhất* $x=1$ *nên sẽ có rất nhiều cách giải. Ở đây tôi xin được trình bày phương pháp đặt ẩn số phụ bằng hệ số bất định, tức đi tìm các số a, b,* $c\in\mathbb{R}$ *sao cho thỏa mãn đồng nhất thức:* $2x^2-3x+7=a.(4x+4)^2+b.(4x+4)+c=16a.x^2+(32a+4b).x+16a+4b+c.$

Từ đó đồng nhất hệ số thu hệ: $\begin{cases}16a=2;\ 32a+4b=-3\\16a+4b+c=7\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{7}{4},\ c=12.$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{8}(4x+4)^2 - \dfrac{7}{4}(4x+4) - 3\sqrt[3]{4x+4} + 12 = 0 \qquad (1)$

Đặt $t = \sqrt[3]{4x+4} \Rightarrow t^3 = 4x+4 \Rightarrow t^6 = (4x+4)^2$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{8}t^6 - \dfrac{7}{4}t^3 - 3t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^6 - 14t^3 - 24t + 96 = 0 \qquad (2)$

$\Leftrightarrow (t-2)^2(t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24) = 0 \qquad (3)$

- Nếu $t \le 0$, thì $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t^6 - 14t^3 - 24t + 96 > 0 \\ t^6 - 14t^3 - 24t + 96 = 0 \end{cases}$: vô nghiệm khi $t \le 0$.
- Nếu $t > 0$, thì $t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24 > 0$, nên $(3) \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra: $\sqrt[3]{4x+4} = 2 \Leftrightarrow 4x + 4 = 8 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bình luận. *Do nhẩm nghiệm $x = 1$ bằng casio nên dễ dàng tìm được $t = \sqrt[3]{4x+4} = 2$ trong cách chia Hoocner của phương trình (2). Hơn nữa, do tính chất nghiệm duy nhất nên ta cần đánh giá cụm $t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24$ luôn dương như trên. Bản chất bài này xuất phát từ đề VMO – 1995: $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$, $(x = 3)$.*

_Ví dụ 92._ Giải phương trình: $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0 \qquad (*)$

Phân tích. *Ta có:* $x^4 - 2x^3 + x = a(x^2 - x)^2 + b(x^2 - x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+b)x^2 - bx$ *và đồng nhất hệ số được hệ phương trình:* $\begin{cases} a = 1 \\ -2a = -2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ *. Từ đó có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x^2 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0$ hoặc $x \ge 1$.

$(*) \Leftrightarrow (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - \sqrt{x^2 - x}.\sqrt{2} = 0 \qquad (1)$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x} \ge 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - x \Rightarrow t^4 = (x^2 - x)^2$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow t^4 - t^2 - t.\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t.(t^3 - t - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \sqrt{2}$.

- Với $t = 0$, suy ra: $\sqrt{x^2 - x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.
- Với $t = \sqrt{2}$, suy ra: $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = 2$.

_Ví dụ 93._ Giải phương trình: $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{3x-2} - 2x^3 + 6x^2 - 4x = 0 \qquad (*)$

Phân tích. *Nhận thấy, các hạng tử có mối liên hệ với nhau bởi biểu thức* $3x - 2$ *nếu biến đổi:* $(*) \Leftrightarrow x^2\sqrt{3x-2} - (3x-2)\sqrt{3x-2} - 2x^3 + 2x(3x-2) = 0$. *Từ đó ta có thể*

giải theo 2 cách: một là chia hai vế cho $(3x-2)\sqrt{3x-2}$, *rồi đặt* t, *hai là đặt trực tiếp biểu thức* $t=\sqrt{3x-2}\ge 0$, *để đưa về phương trình đẳng cấp bậc ba.*

Điều kiện: $3x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{2}{3}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow x^2\sqrt{3x-2}-(3x-2).\sqrt{3x-2}-2x^3+2x.(3x-2)=0$ (1)

Lời giải 1. Đặt một ẩn phụ sau khi chia.

- Trường hợp 1. Nếu $x=\frac{2}{3}$, thì $(1)\Leftrightarrow -2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=0$: sai nên $x=\frac{2}{3}$ không là nghiệm của phương trình (1).
- Trường hợp 2. Nếu $x>\frac{2}{3}$, chia 2 vế của (1) cho $(3x-2)\sqrt{3x-2}>0$:

$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{\sqrt{3x-2}}\right)^2-1-2\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{3x-2}}\right)^3+2\cdot\frac{x}{\sqrt{3x-2}}=0$, (2). Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{3x-2}}>0.$

$(2)\Leftrightarrow -2t^3+t^2+2t-1=0\Leftrightarrow \underbrace{(t+1)}_{>0}(2t^2-3t+1)=0\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=1\end{array}\right.\cdot$

Với $t=\frac{1}{2}$, suy ra: $\frac{x}{\sqrt{3x-2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}=2x\Leftrightarrow 4x^2-3x+2=0$: vô nghiệm.

Với $t=1$, suy ra: $\frac{x}{\sqrt{3x-2}}=1\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}=x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2\end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1,\ x=2.$

Lời giải 2. Đặt một ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc3, hai biến.

Đặt $t=\sqrt{3x-2}\ge 0.$ Khi đó: $(1)\Leftrightarrow x^2t+2xt^2-t^3-2x^3=0$ (2)

- Trường hợp 1. Nếu $t=0\Rightarrow\sqrt{3x-2}=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ thì (1) không thỏa.
- Trường hợp 2. Nếu $t>0\Rightarrow x>\frac{2}{3}$, chia hai vế cho (2) cho $t^3>0$, được:

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}-2\left(\frac{x}{t}\right)^3+\left(\frac{x}{t}\right)^2+2\left(\frac{x}{t}\right)-1=0\\ \frac{x}{t}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{t}=1\\ \frac{x}{t}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x-2}=x\\ \sqrt{3x-2}=2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1,\ x=2.$

Ví dụ 94. Giải phương trình: $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$ $(*)$

Phân tích. *Nếu đặt điều kiện thông thường thì* $-1 \le x \le 1,\ x \ne 0$ *và đưa x vào căn thức để triệt tiêu đi mẫu số trong căn, nhằm cho bài toán đơn giản hơn thì phải chia ra hai trường hợp, rất phức tạp. Nhưng nếu ta để ý biểu thức ở vế phải có thể biến đổi:* $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 + x)^2 + (x-1)^2 > 0,$ *và lúc này để phương trình có nghiệm thì cần thêm điều kiện kéo theo là* $x^3 + x > 0 \Rightarrow x > 0$ *nên điều kiện cuối cùng là* $0 < x \le 1.$ *Lúc đó đưa vào căn thức không cần chia ra hai trường hợp. Ngoài ra khi đưa x vào căn thức được vế phải là* $(x^2+1)\sqrt{x - x^3}$, *dựa vào nó, ta phân tích biểu thức ngoài căn theo biểu thức tích số:* $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = a.(x^2+1)^2 + b.(x - x^3)$ $= ax^4 - bx^3 + 2x^2 + bx + 1$ *và đồng nhất hệ số được* $a = 1,\ b = -2.$ *Mục đích của việc phân tích này là dễ dàng xác định lượng chia để đưa về phương trình bậc ba.*

Lời giải. Điều kiện: $0 < x \le 1.$

$$(*) \Leftrightarrow (x^2+1)^2 - 2(x - x^3) - (x^2+1)\sqrt{x - x^3} = 0 \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 1 - 2.\left(\frac{\sqrt{x-x^3}}{x^2+1}\right)^2 - \frac{\sqrt{x-x^3}}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt{x-x^3}}{x^2+1} = -1 \text{ (loại) hoặc } \frac{\sqrt{x-x^3}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x - x^3} = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra: $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ nên: $(2) \Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$

Suy ra: $x - \frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 \\ 0 < x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2} - 1.$

Ví dụ 95. Giải phương trình: $\sqrt{x - x^2 + 6} + \frac{4}{x-1} = x^2 + x$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D = \left[-2;3\right] \backslash \left\{1\right\}\cdot$ Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)(x+2)} + \left(\frac{4}{x-1} - 2\right) = x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)(x+2)} + \frac{2(3-x)}{x-1} = (x-1)(x+2) \qquad (1)$$

Do $x = 1,\ x = -2$ không là nghiệm của (1), nên chia (1) cho $(x-1)(x+2) \ne 0$:

$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}\cdot\sqrt{\frac{3-x}{x+2}} + 2\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{3-x}{x+2} = 1,$ (2). Đặt $t = \frac{1}{x-1}\cdot\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$ thì:

$(2) \Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = \frac{1}{2}\cdot$

- Với $t=\dfrac{1}{x-1}\cdot\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=-1 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 1 \\ \dfrac{3-x}{x+2}=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.
- Với $t=\dfrac{1}{x-1}\cdot\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x\le 3 \\ 4\cdot\dfrac{3-x}{x+2}=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-1,\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ x=2.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 1

BT 110. Giải phương trình: $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2=2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 111. Giải phương trình: $(x+1)(x-3)\sqrt{2x-x^2+3}=2-(x-1)^2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 112. Giải phương trình: $(x^2+1)^2=5-x\sqrt{2x^2+4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 113. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+2}-2\sqrt{2x^2+5x-6}=1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 114. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+4x+3}=\sqrt{(x+2)^3}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 115. Giải phương trình: $3\sqrt{2x^2+2x+12}-2\sqrt{16x-x^2-6}=6\sqrt{x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 116. Giải phương trình: $\dfrac{3x^2}{3+\sqrt{x}}+6+2\sqrt{x}=5x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 117. Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{4-3\sqrt{x}}+8=3(x+2\sqrt{x}).$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 118. Giải phương trình: $10\sqrt{x+3}+\dfrac{3x}{\sqrt{x+3}}-13\sqrt{x}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 119. Giải phương trình: $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}+4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 120. Giải phương trình: $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 121. Giải phương trình: $x^2-6x+x\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-6}{x}}-6=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 122. Giải phương trình: $\sqrt{4x-\sqrt{16x^2-9}}+\sqrt{4x+\sqrt{16x^2-9}}=4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 123. Giải phương trình: $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}-1=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 124. Giải phương trình: $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 125. Giải phương trình: $4(2x^2+1)+3(x^2-2x)\sqrt{2x-1}=2(x^3+5x).$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 126. Giải phương trình: $5.(8x^2+11x)=27.(2x+1)\sqrt{3x-2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 127. Giải phương trình: $(x^2+x)^2+(x-1)^2=(x^2+1)\sqrt{x-x^3}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 128. Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-x-\dfrac{1}{x}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 129. Giải phương trình: $\dfrac{5}{2x\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2(1-x^2)}+2=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 130. Giải phương trình: $x^3-3x^2-6x+2(x+2)\sqrt{x+2}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 131. Giải phương trình: $\sqrt{2x-x^2+8}+\dfrac{6}{x-3}=x^2-x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 132. Giải phương trình: $x^2-7x+1=4\sqrt{x^4+x^2+1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

2. Dạng 2. $a.\sqrt{f(x)}+b.\sqrt{g(x)}+2ab.\sqrt{f(x).g(x)}=h(x)$

Nhận dạng: Có chứa các hạng tử loại tổng – tích hoặc hiệu – tích.

Phương pháp giải:

- Bước 1. Đặt $t=$ tổng hoặc $t=$ hiệu, suy ra: $t^2=......$
- Bước 2. Giải phương trình với biến mới theo t, suy ra x.

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 96. Giải phương trình: $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{(3+x)(6-x)}$ $(*)$

Phân tích. *Phương trình có dạng tổng – tích, khi đó ta sẽ đặt* $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\geq 0,$ *suy ra* $t^2=(\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x})^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)},$ *biểu diễn biến x hết theo t.*

Lời giải. Điều kiện: $-3\leq x\leq 6.$

Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\geq 0,$ suy ra: $\sqrt{(3+x)(6-x)}=\dfrac{t^2-9}{2}\cdot$ Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow t=3+\dfrac{t^2-9}{2}\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow t=-1$ (loại) hoặc $t=3$ (nhận).

Suy ra: $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3\Leftrightarrow 9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}=9\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=6.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=3,\ x=6.$

Ví dụ 97. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$ $(*)$

Phân tích. *Sau khi phân tích* $\sqrt{2x^2+5x+3}=\sqrt{(2x+1)(x+1)}$ *thì phương trình có dạng tổng – tích. Nếu đặt* $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\geq 0\Rightarrow t^2=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}+4,$ *thì phần biến số còn lại biểu diễn được hết theo t và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\geq -1.$

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\geq 0$ suy ra: $t^2=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}+4.$

$(*)\Leftrightarrow t=t^2-20\Leftrightarrow t^2-t-20=0\Leftrightarrow t=5$ (nhận) hoặc $t=-4$ (loại).

Suy ra: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5\Leftrightarrow 3x+4+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}=25$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3} = 21-3x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 7 \\ x^2 - 146x + 429 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ví dụ 98. Giải phương trình: $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10-3x$ (*)

Đại học khối B năm 2011

Phân tích. *Phương trình có dạng hiệu – tích, nếu ta đặt* $t = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}$, *suy ra:* $t^2 = 10 - 3x - 4\sqrt{4-x^2}$ *sẽ biểu diễn hết các biến còn lại theo t và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-2 \le x \le 2$.

$(*) \Leftrightarrow 3(\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}) = 10 - 3x - 4\sqrt{4-x^2}$ (1)

Đặt $t = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}$, suy ra: $t^2 = (\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x})^2 = 10 - 3x - 4\sqrt{4-x^2}$.

$(1) \Leftrightarrow 3t = t^2 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 3$.

- Với $t = 0$, suy ra: $\sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2 + x = 8 - 4x \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}\cdot$
- Với $t = 3$, suy ra: $\sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x} + 3$ có $\begin{cases} VT = \sqrt{2+x} \le 2 \\ VP = 2\sqrt{2-x} + 3 \ge 3 \end{cases}, \forall x \in [-2;2]$

  nên phương trình sẽ vô nghiệm khi $t = 3$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{6}{5}\cdot$

Ví dụ 99. Giải phương trình: $3.(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} - 2x + 11) = 4\sqrt{2x^2+x}$ (*)

Phân tích. *Phương trình có dạng tổng – tích:* $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}$, $\sqrt{2x^2+x} = \sqrt{(2x+1)x}$.

Do đó ta sẽ đặt $t = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x}$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow 3.(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}) = 2.(3x + 2\sqrt{2x^2+x}) - 33$ (1)

Đặt $t = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x} \ge 0$, suy ra: $t^2 - 1 = 3x + 2\sqrt{2x^2+x}$.

$(1) \Leftrightarrow 3t = 2(t^2-1) + 33 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 35 = 0 \Leftrightarrow t = 5$ (nhận) hoặc $t = -\frac{7}{2}$ (loại).

Suy ra: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow 3x + 1 + 2\sqrt{2x^2+x} = 25 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x} = 24 - 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ 4(2x^2+x) = (3x-24)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ x^2 - 148x + 576 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 4$.

Ví dụ 100. Giải phương trình: $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$ (*)

Đề thi thử Đại học 2013 – THTP Ngô Gia Tự – Bắc Ninh

Phân tích. *Phương trình có dạng tổng – tích, khi đó ta sẽ đặt* $t =$ *tổng sẽ có lời giải 1. Còn nếu đặt* $y = \sqrt{4-x^2} \ge 0$ *sẽ đưa được về hệ đối xứng loại I và có lời giải 2.*

Điều kiện: $4 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2.$

Lời giải 1. Đặt $t =$ tổng để giải phương trình bậc 2 với ẩn $t \Rightarrow x.$

Đặt $t = x + \sqrt{4-x^2}$, suy ra: $t^2 = 4 + 2x\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x\sqrt{4-x^2} = \dfrac{t^2-4}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow t = 2 + 3\cdot\dfrac{t^2-4}{2} \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -\dfrac{4}{3}\cdot$

- Với $t = 2,$ suy ra: $x + \sqrt{4-x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.
- Với $t = -\dfrac{4}{3},$ suy ra: $\sqrt{4-x^2} = -\dfrac{4}{3} - x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le -\dfrac{4}{3} \\ 9x^2 + 12x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-2-\sqrt{14}}{3}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 0,\ x = 2,\ x = \dfrac{-2-\sqrt{14}}{3}\cdot$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I.

Đặt $y = \sqrt{4-x^2} \ge 0,$ suy ra: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 2 + 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 4 \\ x + y = 2 + 3xy \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+3xy)^2 - 2xy - 4 = 0 \\ x + y = 2 + 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(xy)^2 + 10xy = 0 \\ x + y = 2 + 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} xy = -\dfrac{10}{9} \\ x + y = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-2+\sqrt{14}}{3} \\ y = \dfrac{-2-\sqrt{14}}{3} < 0\ (L) \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-2-\sqrt{14}}{3} \\ y = \dfrac{-2+\sqrt{14}}{3} \end{cases}.$$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 0,\ x = 2,\ x = \dfrac{-2-\sqrt{14}}{3}\cdot$

Lời giải 3. Đặt ẩn phụ đưa về hệ và giải bằng phương pháp thế.

Đặt $y = \sqrt{4-x^2} \ge 0,$ suy ra: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 2 + 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x-2}{3x-1} \ge 0 \\ x^2 + \left(\dfrac{x-2}{3x-1}\right)^2 = 4 \end{cases},\ \left(x \ne \dfrac{1}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(9x^2 + 12x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{14}}{3}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện và thay vào $y=\dfrac{x-2}{3x-1}\geq 0,$ nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=0,\ x=2 \\ x=\dfrac{-2-\sqrt{14}}{3} \end{array}\right.\cdot$

Ví dụ 101. Giải phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$ (*)

Phân tích. *Đặt điều kiện, qui đồng, bỏ mẫu thì* $(*)\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}+x=2x\sqrt{2-x^2}$ *sẽ trở về dạng cơ bản tổng – tích như trên và có các lời giải chi tiết như sau:*

Tập xác định: $D=(-\sqrt{2};\sqrt{2})\setminus\{0\}\cdot$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}+x=2x\sqrt{2-x^2}$ (1)

Lời giải 1. Đặt $t=$ tổng để giải phương trình bậc 2 với ẩn $t\Rightarrow x.$

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}+x,$ suy ra: $t^2=2+2x\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow 2x\sqrt{2-x^2}=t^2-2.$

$(1)\Leftrightarrow t=t^2-2\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=2.$

- Với $t=-1,$ suy ra: $\sqrt{2-x^2}=-1-x\Leftrightarrow\begin{cases} x\leq -1 \\ 2x^2+2x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\cdot$
- Với $t=2,$ suy ra: $\sqrt{2-x^2}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases} x\leq 2 \\ 2x^2-4x+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\cdot$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I.

Đặt $y=\sqrt{2-x^2}\geq 0,$ suy ra: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2xy \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (x+y)^2-2xy=2 \\ x+y=2xy \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2(xy)^2-xy-1=0 \\ x+y=2xy \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy=1 \\ x+y=2 \end{cases}\vee\begin{cases} xy=-\dfrac{1}{2} \\ x+y=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}\vee\begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\cdot$

Lời giải 3. Đặt ẩn phụ đưa về hệ và giải bằng phương pháp thế.

Đặt $y=\sqrt{2-x^2}\geq 0,$ suy ra: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2xy \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\dfrac{x}{2x-1}\geq 0 \\ x^2+\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^2=2 \end{cases},\ \left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow 2x^4-2x^3-3x^2+4x-1=0\Leftrightarrow(x-1)(2x^3-3x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện và $y=\dfrac{x}{2x-1}\ge 0,$ nghiệm là $x=1,\ x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\cdot$

Nhận xét. *Dạng tổng quát của hai ví dụ này là* $ax+\sqrt{b-a^2x^2}=c+dx\sqrt{b-a^2x^2}$. *Khi đó, ta có 2 hướng đi thường gặp, một là đặt* $t=ax+\sqrt{b-a^2x^2}\Rightarrow x\sqrt{b-a^2x^2}=\dfrac{t^2-b}{2},$ *sẽ thu được phương trình bậc hai theo biến* t *giải được, từ đó tìm biến* x. *Hai là đặt ẩn phụ* $y=\sqrt{b-a^2x^2}\ge 0,$ *suy ra hệ* $\begin{cases}a^2x^2+y^2=b\\ ax+y=c+dxy\end{cases}$ *và giải hệ này theo 2 cách khác nhau, đó là hệ đối xứng loại I (đưa về tổng tích) hoặc giải bằng phương pháp thế.*

Ví dụ 102. Giải phương trình: $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2-2x^2}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Hoàng Lê Kha – Tây Ninh

Phân tích. *Nhận thấy phương trình có dạng tích* $x.\sqrt{1-x^2}$ *nhưng thiếu tổng. Để ý, nếu đặt* $t=x+\sqrt{1-x^2},$ *suy ra* $\begin{cases}t^2=1+2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}\\ t^3=x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}+3x\sqrt{1-x^2}.(x+\sqrt{1-x^2})\end{cases}$, *lúc đó có:* $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=t^3-3\cdot\dfrac{t^2-1}{2}\cdot t=\dfrac{-t^3+3t}{2};\ x\sqrt{2-2x^2}=\dfrac{t^2-1}{\sqrt{2}}$ *và các biến biểu diễn hết theo t. Hằng đẳng thức thường sử dụng là:* $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Lời giải 1. Đặt $t=$ tổng để giải phương trình bậc 3 với ẩn $t\Rightarrow x$.

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2},$ suy ra: $x\sqrt{2-2x^2}=\dfrac{t^2-1}{\sqrt{2}}$ và $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=\dfrac{-t^3+3t}{2}\cdot$

Ta có: $t=1.x+1.\sqrt{1-x^2}\overset{Cauchy-Schwarz}{\le}\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x^2+1-x^2}=\sqrt{2}\Rightarrow t\in\left[-1;\sqrt{2}\right].$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{-t^3+2t}{2}=\frac{t^2-1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow -t^3-\sqrt{2}t^2+3t+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow(t-\sqrt{2}).(t^2+2\sqrt{2}t+1)=0$$

$\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$ (nhận) hoặc $t=1-\sqrt{2}$ (nhận) hoặc $t=-1-\sqrt{2}$ (loại).

- Với $t=\sqrt{2},$ suy ra: $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\sqrt{2}\\ 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$
- Với $t=1-\sqrt{2},$ suy ra: $\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2}-x\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm là $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\cdot$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I.

Đặt $y=\sqrt{1-x^2}\ge 0,$ suy ra: $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^3+y^3=xy\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=1\\(x+y)^3-3xy(x+y)=xy\sqrt{2}\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$, $(S^2\ge 4P)$ thì hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}S^2-2P=1\\S^3-3PS=P\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{S^2-1}{2}\\S^3+\sqrt{2}S^2-3S-\sqrt{2}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{S^2-1}{2}\\(S-\sqrt{2})(S^2+2\sqrt{2}S+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=\sqrt{2}\\P=\dfrac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}S=1-\sqrt{2}\\P=1-\sqrt{2}\end{cases}.$

Suy ra: $\begin{cases}x+y=\sqrt{2}\\xy=\dfrac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x+y=1-\sqrt{2}\\xy=1-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm là $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$

Ví dụ 103. Giải phương trình: $\dfrac{9-2x}{\sqrt{4-x}}+\dfrac{4x+3}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{15}{2}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{1}{4}<x<4.$

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{1+2(4-x)}{\sqrt{4-x}}+\dfrac{(4x+1)+2}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{15}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}+2\sqrt{4-x}+\sqrt{4x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{15}{2}$

$\Leftrightarrow(2\sqrt{4-x}+\sqrt{4x+1})+\dfrac{2\sqrt{4-x}+\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4-x}.\sqrt{4x+1}}=\dfrac{15}{2}$ (1)

Đặt $t=2\sqrt{4-x}+\sqrt{4x+1},$ suy ra: $t^2=17+4\sqrt{4-x}.\sqrt{4x+1}$

$\Leftrightarrow\sqrt{4-x}\sqrt{4x+1}=\dfrac{t^2-17}{4}\ge 0\Rightarrow t\ge\sqrt{17}.$

Mà: $t=1.\sqrt{16-4x}+1.\sqrt{4x+1}\overset{Cauchy-Schwarz}{\le}\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{(\sqrt{16-4x})^2+(\sqrt{4x+1})^2}=\sqrt{34}.$

Do đó điều kiện của t là $t\in\left[\sqrt{17};\sqrt{34}\right]\cdot$

$(1)\Leftrightarrow t+\dfrac{4t}{t^2-17}=\dfrac{15}{2}\Leftrightarrow 2t^3-15t^2-26t+255=0\Leftrightarrow t=5.$

Với $t=5,$ suy ra: $2\sqrt{4-x}+\sqrt{4x+1}=5\Leftrightarrow\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{4x+1}=2\Leftrightarrow 4x^2-15x=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{15}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=0,\ x=\dfrac{15}{4}\cdot$

Nhận xét. *Trong rất nhiều bài toán, dạng tổng – tích hoặc hiệu – tích chưa xuất hiện hoặc khó thấy mà qua một vài phép biến đổi mới phát hiện được. Hơn nữa trong một số trường hợp ta cần tìm điều kiện chính xác thì việc giải phương trình bậc cao sẽ dễ dàng, đặc biệt là phương trình chứa tham số. Cách tìm miền chặn hiệu quả nhất là tìm GTLN, GTNN của* $t = 2\sqrt{4-x} + \sqrt{4x+1}$, *(xem t là y) bằng phương pháp hàm số. Ở trên tôi đã sử dụng BĐT Cauchy – Schwarz dạng:* $ax + by \le \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 2

BT 133. Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} + \sqrt{(x+2)(5-x)} = 4.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 134. Giải phương trình: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x + 2.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 135. Giải phương trình: $2(\sqrt{x+3} + \sqrt{10-x}) - \sqrt{30+7x-x^2} = 4.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 136. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 3x + 6\sqrt{5x-2x^2+12} - 23.$

BT 137. Giải phương trình: $\sqrt{5+2x} + \sqrt{5-2x} + 5 = 3\sqrt{25-4x^2}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 138. Giải phương trình: $3(\sqrt{x+7} + \sqrt{6-x}) - 2\sqrt{-x^2-x+42} - 3 = 0.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 139. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 140. Giải: $(13-4x)\sqrt{2x-3} + (4x-3)\sqrt{5-2x} = 2 + 8\sqrt{16x-4x^2-15}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 141. Giải phương trình: $7\sqrt{3x-7} + (4x-7)\sqrt{7-x} = 32.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 142. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + (4-3x)\cdot\sqrt{\dfrac{3x+1}{4-3x}} + \sqrt{4-3x} = 5.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 143. Giải phương trình: $13x - 20\sqrt{5x-3x^2+2} + 4\sqrt{3x+1} + 10\sqrt{2-x} - 9.$

BT 144. Giải phương trình: $(2+\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) = 4\sqrt{1-x^2} - 2x^2 + 2.$

BT 145. Giải phương trình: $x + \sqrt{5-x^2} = 5x\sqrt{5-x^2} - 7.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 146. Giải phương trình: $x + \sqrt{26-x^2} + x\sqrt{26-x^2} = 11.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 147. Giải phương trình: $2x + \sqrt{5-4x^2} = x\sqrt{5-4x^2} + 2.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 148. Giải phương trình: $3x + \sqrt{10-9x^2} = 5 - x\sqrt{10-9x^2}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 149. Giải phương trình: $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 150. Giải phương trình: $2x^2 + x + \sqrt{x^2+3} + 2x\sqrt{x^2+3} = 9.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 151. Giải phương trình: $x \cdot \sqrt[3]{35-x^3} \cdot (x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 152. Giải phương trình: $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \dfrac{8}{3}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 153. Giải phương trình: $\dfrac{1+x}{\sqrt{17-4x}} + \dfrac{1-x}{\sqrt{17+4x}} = \dfrac{4}{5}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

3. Dạng 3. $\boxed{\alpha \cdot \sqrt[n]{a-f(x)} + \beta \cdot \sqrt[m]{b+f(x)} = c}$

Nhận dạng: Chỉ số căn thức lệch bậc hoặc đồng bậc cao.

Phương pháp giải:

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[n]{a-f(x)} \\ v = \sqrt[m]{b+f(x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^n = a - f(x) \\ v^m = b + f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^n + v^m = a + b \\ \alpha u + \beta v = c \end{cases}$, suy ra $u, v \Rightarrow x$.

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 104. Giải phương trình: $5\sqrt{x+1} - 2\sqrt[3]{7x+6} = 4$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Nguyễn Chí Thanh – Đắk Nông

Phân tích. *Bài toán có 2 căn thức lệch bậc nhau, nên ta sẽ đặt hai ẩn phụ là 2 căn thức, tức đặt* $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \ge 0 \\ v = \sqrt[3]{7x+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = x+1 & (1) \\ v^3 = 7x+6 & (2) \end{cases}$. *Khi đó, ta cần cân bằng hệ số trước x, tức phương trình (1) sẽ nhân 2 vế cho 7 để sau khi trừ (một số bài cộng) nhằm triệt tiêu x sẽ thu được 1 phương trình mới với ẩn là u, v. Còn phương trình thứ 2 được lấy từ đề bài tức luôn có* $5u - 2v = 4$. *Khi đó giải hệ này tìm được* $u, v \Rightarrow x$.

Lời giải. Điều kiện: $x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \ge 0 \\ v = \sqrt[3]{7x+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = x+1 \\ v^3 = 7x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u^2 = 7x+7 \\ v^3 = 7x+6 \end{cases} \Rightarrow 7u^2 - v^3 = 1$ (1)

Từ phương trình $(*) \Leftrightarrow 5u - 2v = 4$ (2)

(1), (2) suy ra hệ: $\begin{cases} 7u^2 - v^3 = 1 \\ 5u - 2v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{2v+4}{5} \\ 7 \cdot \left(\dfrac{2v+4}{5}\right)^2 - v^3 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{2v+4}{5} \\ 25v^3 - 28v^2 - 112v - 87 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{2v+4}{5} \\ (v-3)(25v^2 + 47v + 29) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt[3]{7x+6} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ví dụ 105. Giải phương trình: $\sqrt[3]{7-16x} + 2.\sqrt{2x+8} = 5$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Quảng Nam năm 2014 – 2015

Lời giải. Điều kiện: $2x + 8 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -4$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{7-16x} \\ v = \sqrt{2x+8} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 7-16x \\ v^2 = 2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 7-16x \\ 8v^2 = 16x+64 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} u^3 + 8v^2 = 71 \quad (1)$

Từ phương trình $(*) \Leftrightarrow u + 2v = 5 \quad (2)$

$$(1),\ (2) \Rightarrow \begin{cases} u^3 + 8v^2 = 71 \\ u + 2v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{5-u}{2} \\ u^3 + 8\cdot\left(\dfrac{5-u}{2}\right)^2 = 71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{5-u}{2} \\ u^3 + 2u^2 - 20u - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{5-u}{2} \\ (u+1)(u^2+u-21) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} u = \dfrac{-1+\sqrt{85}}{2} \\ v = \dfrac{11-\sqrt{85}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} u = \dfrac{-1-\sqrt{85}}{2} \\ v = \dfrac{11+\sqrt{85}}{4} \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{7-16x} = -1 \\ \sqrt{2x+8} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}.$

- Với $\begin{cases} u = \dfrac{-1+\sqrt{85}}{2} \\ v = \dfrac{11-\sqrt{85}}{4} \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{7-16x} = \dfrac{-1+\sqrt{85}}{2} \\ \sqrt{2x+8} = \dfrac{11-\sqrt{85}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{39-11\sqrt{85}}{16}.$

- Với $\begin{cases} u = \dfrac{-1-\sqrt{85}}{2} \\ v = \dfrac{11+\sqrt{85}}{4} \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{7-16x} = \dfrac{-1-\sqrt{85}}{2} \\ \sqrt{2x+8} = \dfrac{11+\sqrt{85}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{39+11\sqrt{85}}{16}.$

Kết luận: So điều kiện, phương trình có 3 nghiệm là $x = \dfrac{1}{2},\ x = \dfrac{39 \pm 11\sqrt{85}}{16}.$

Nhận xét. *Sau khi đưa về hệ phương trình cơ bản giải bằng phương pháp thế, ta nên chọn việc rút u theo v hoặc v theo u sao cho khai triển hằng đẳng thức bậc 2, không nên khai triển hằng đẳng thức bậc 3, khá phức tạp.*

Ví dụ 106. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0 \quad (*)$

Đại học khối A năm 2009

Lời giải. Điều kiện: $6 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{6}{5}.$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x-2} \\ v = \sqrt{6-5x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 3x-2 \\ v^2 = 6-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u^3 = 15x-10 \\ 3v^2 = 18-15x \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 5u^3 + 3v^2 = 8.$

Kết hợp với đề bài được hệ phương trình: $\begin{cases} 2u+3v-8=0 \\ 5u^3+3v^2=8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{8-2u}{3} \\ 15u^3+4u^2-32u+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-2 \\ v=4 \end{cases}.$

Với $\begin{cases} u=-2 \\ v=4 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{3x-2}=-2 \\ \sqrt{6-5x}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=-8 \\ 6-5x=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-2.$

Ví dụ 107. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-2}=1$ (*)

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lời giải 1. Đặt 2 ẩn phụ giải hệ phương trình.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{x+5} \\ v=\sqrt[3]{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=x+5 \\ v^3=x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3-v^3=7 \\ u-v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ (u-v)(u^2+uv+v^2)=7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ (u-v)^2+3uv=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-1 \\ v=-2 \end{cases}.$

- Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+5}=2 \\ \sqrt[3]{x-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=8 \\ x-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$
- Với $\begin{cases} u=-1 \\ v=-2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+5}=-1 \\ \sqrt[3]{x-2}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=-1 \\ x-2=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow x=-6.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=-6,\ x=3.$

Lời giải 2. Lũy thừa 2 vế, thế và giải phương trình hệ quả (bài học 1).

$(*) \Leftrightarrow 7-3.\sqrt[3]{(x+5)(x-2)}.(\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-2})=1$ (1)

Thế $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-2}=1$ vào $(1) \Rightarrow 7-3.\sqrt[3]{(x+5)(x-2)}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+5)(x-2)}=2 \Leftrightarrow x^2+3x-18=0 \Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-6.$

Kết luận: Thế vào $(*)$, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=-6,\ x=3.$

Nhận xét. *Để giải bằng phương pháp lũy thừa, cần nhớ hai hằng đẳng thức viết dưới dạng:* $\begin{cases} (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b) \\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b) \end{cases}$ *và kiểm tra lại nghiệm.*

Ví dụ 108. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+18}=5$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x^2 - 1} \\ v = \sqrt[3]{x^2 + 18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = x^2 - 1 \\ v^3 = x^2 + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^3 - u^3 = 19 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 - v \\ 2v^3 - 15v^2 + 75v - 144 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - 1} = 2 \\ \sqrt[3]{x^2 + 18} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 8 \\ x^2 + 18 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = -3,\ x = 3$.

Ví dụ 109. Giải phương trình: $\sqrt[4]{56 - x} + \sqrt[4]{x + 41} = 5$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $-41 \le x \le 56$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{56 - x} \ge 0 \\ v = \sqrt[4]{x + 41} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 = 56 - x \\ v^4 = x + 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^4 + v^4 = 97 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^2 + v^2)^2 - 2(uv)^2 = 97 \\ u + v = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(uv)^2 - 100(uv) + 528 = 0 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 44 \\ u + v = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} uv = 6 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} 56 - x = 81 \\ x + 41 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -25 \\ x = -25 \end{cases} \Leftrightarrow x = -25$.
- Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[4]{56 - x} = 2 \\ \sqrt[4]{x + 41} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 56 - x = 16 \\ x + 41 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = 40 \end{cases} \Leftrightarrow x = 40$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm $x = -25,\ x = 40$.

Ví dụ 110. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x + 8} + \sqrt[4]{x - 7} = 3$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 7$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{x + 8} \ge 0 \\ v = \sqrt[4]{x - 7} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 = x + 8 \\ v^4 = x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^4 - v^4 = 15 \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u - v)(u + v)(u^2 + v^2) = 15 \\ u + v = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (u - v)(u^2 + v^2) = 15 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ 4u^3 - 18u^2 + 36u - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[4]{x + 8} = 2 \\ \sqrt[4]{x - 7} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8 = 16 \\ x - 7 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 8$.

Ví dụ 111. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3 - x} \cdot (\sqrt{x + 2} + 1) = x + 1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2$, suy ra: $\sqrt{x + 2} + 1 > 0$. Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3 - x} = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 2} + 1} = \dfrac{(\sqrt{x + 2})^2 - 1^2}{\sqrt{x + 2} + 1} = \dfrac{(\sqrt{x + 2} - 1)(\sqrt{x + 2} + 1)}{\sqrt{x + 2} + 1} = \sqrt{x + 2} - 1$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3 - x} = \sqrt{x + 2} - 1$.

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt[3]{3-x} \\ v = \sqrt{x+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 3-x \\ v^2 = x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^2 = 5 \\ u = v-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u+1 \\ u^3 + v^2 + 2u - 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v = u+1 \\ (u-1)(u^2+2u+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3-x} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 112. Giải phương trình: $3(\sqrt{x-1}-3)\cdot\sqrt[3]{2-x} + 10 = x$ $\quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

- Với $\sqrt{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 10$: thỏa $(*)$ nên $x = 10$ là 1 nghiệm của $(*)$.
- Với $x \neq 10 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 3 \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2-x} = \dfrac{x-10}{\sqrt{x-1}-3} = \dfrac{(\sqrt{x-1})^2 - 3^2}{\sqrt{x-1}-3}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2-x} = \dfrac{(\sqrt{x-1}+3)(\sqrt{x-1}-3)}{\sqrt{x-1}-3} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2-x} = \sqrt{x-1} + 3.$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{2-x} \\ v = \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 2-x \\ v^2 = x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^2 = 1 \\ 3u = v+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3u-3 \\ u^3 + 9u^2 - 18u + 8 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 3u-3 \\ (u-1)(u^2+10u-8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$ (nhận) hoặc $\begin{cases} u = -5 \pm \sqrt{33} \\ v = -18 \pm 3\sqrt{33} < 0 \end{cases}$ (loại).

Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = 1 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận: So điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 1,\ x = 10$.

Ví dụ 113. Giải phương trình: $\sqrt[4]{3x-7} + \sqrt[4]{14x-27} = 3\sqrt[4]{x-2}$ $\quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \dfrac{7}{3}$, suy ra: $\sqrt[4]{x-2} > 0$.

Khi đó chia hai vế của phương trình $(*)$ cho $\sqrt[4]{x-2} > 0$, ta được:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{3x-7}{x-2}} + \sqrt[4]{\dfrac{14x-27}{x-2}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{3(x-2)-1}{x-2}} + \sqrt[4]{\dfrac{14(x-2)+1}{x-2}} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{3 - \dfrac{1}{x-2}} + \sqrt[4]{14 + \dfrac{1}{x-2}} = 3.$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{3 - \dfrac{1}{x-2}} \geq 0 \\ v = \sqrt[4]{14 + \dfrac{1}{x-2}} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 = 3 - \dfrac{1}{x-2} \\ v^4 = 14 + \dfrac{1}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^4 + v^4 = 17 \\ u + v = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 3-u \\ u^4 + (u^2 - 6u + 9)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3-u \\ 2u^4 - 12u^3 + 54u^2 - 108u + 64 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ (u-1)(u-2)(2u^2 - 6u + 32) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[4]{3 - \dfrac{1}{x-2}} = 1 \\ \sqrt[4]{14 + \dfrac{1}{x-2}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \dfrac{1}{x-2} = 1 \\ 14 + \dfrac{1}{x-2} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}\cdot$

- Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[4]{3 - \dfrac{1}{x-2}} = 2 \\ \sqrt[4]{14 + \dfrac{1}{x-2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \dfrac{1}{x-2} = 16 \\ 14 + \dfrac{1}{x-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{25}{13}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{5}{2}\cdot$

Nhận xét. *Hình thức của 3 ví dụ này cũng tương tự như các ví dụ trên nhưng mang tính chất "giấu mặt". Khi đó ta cần biến đổi khéo léo đẳng thức cũng như sự kết hợp tinh tế các biểu thức liên hợp để đưa về dạng:* $\alpha \cdot \sqrt[n]{a - f(x)} + \beta \cdot \sqrt[m]{b + f(x)} = c.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 3

BT 154. Giải phương trình: $2\sqrt{3x+7} - 5.\sqrt[3]{x-6} = 4.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 155. Giải phương trình: $2\sqrt{6-5x} + 3\sqrt[3]{7-6x} = 5.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 156. Giải phương trình: $4.\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt{7x+2} = 1.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 157. Giải phương trình: $4\sqrt[3]{5x-4} + \sqrt[3]{10-9x} = 5.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 158. Giải phương trình: $\sqrt{5-4x} + \sqrt[3]{x+7} = 3.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 159. Giải phương trình: $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 160. Giải phương trình: $\sqrt{3-2x} + \sqrt[3]{5+3x} = 3.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 161. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} = 3.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 162. Giải phương trình: $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = 2.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 163. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{5x-8} + 3\sqrt[3]{22-2x} = 12.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 164. Giải phương trình: $\sqrt[4]{5-x} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{2}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 165. Giải phương trình: $\sqrt[4]{5-x} + \sqrt[4]{12+x} = 3.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 166. Giải phương trình: $\sqrt[4]{47-2x} + \sqrt[4]{35+2x} = 4.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 167. Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-2x+5} = 2.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 168. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{2x^2+2x-3} = 3.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 169. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3-2x}.(2\sqrt{3x-2} + 1) = 3(4x-3).$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 170. Giải phương trình: $3\sqrt[3]{3x-2}.(7+\sqrt{4x-3})=26-2x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 171. Giải phương trình: $\sqrt[3]{4-3x}=\dfrac{8-5x}{2+\sqrt{5x-4}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 172. Giải phương trình: $\sqrt[4]{3x+1}+\sqrt[4]{4x+1}=2\sqrt[4]{x+1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 173. Giải phương trình: $\sqrt[4]{9x+4}+\sqrt[4]{3x-2}=2\sqrt[4]{1+6x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 174. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x^2+12x+3}=\sqrt[4]{x^2-3x+3}+\sqrt[4]{x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 175. Giải phương trình: $\sqrt[4]{7x^2+2x+13}=\sqrt[4]{x+3}+\sqrt[4]{3x-x^2+8}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 176. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x-4x^3+6}+\sqrt[4]{x-x^3+3}=2\sqrt[4]{x+2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 177. Giải phương trình: $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+4x+17}{x^2-x+17}}=1+\sqrt[4]{\dfrac{4x^2-5x+26}{x^2-x+7}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

4. Dạng 4. $a\cdot\sqrt[n]{A^2}+b\cdot\sqrt[n]{A.B}+c\cdot\sqrt[n]{B^2}=0$

Phương pháp giải: có 2 hướng xử lý

- **Hướng 1**. Đặt 2 ẩn phụ $u=\sqrt[n]{A},\ v=\sqrt[n]{B},$ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai dạng $a.u^2+b.uv+c.v^2=0.$
- **Hướng 2**. Chia trực tiếp cho lượng khác 0, chẳng hạn $\sqrt[n]{B^2}\neq 0,$ để được phương trình bậc hai dạng: $a\cdot\left(\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}\right)^2+b\cdot\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}+c=0.$

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 114. Giải phương trình: $4\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}-7\cdot\sqrt[3]{4-x^2}+3\cdot\sqrt[3]{(2-x)^2}=0$ (*)

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lời giải 1. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai.

Đặt $u=\sqrt[3]{x+2},\ v=\sqrt[3]{2-x}.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow 4u^2-7uv+3v^2=0$ (1)

Do $x=2$ không là nghiệm của (*) nên xét $x\neq 2,$ suy ra: $v=\sqrt[3]{2-x}\neq 0$ và chia 2 vế phương trình (1) cho $v^2\neq 0,$ ta được:

$$(1)\Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{u}{v}\right)^2-7\cdot\frac{u}{v}+3=0\Leftrightarrow\frac{u}{v}=1\ \text{hoặc}\ \frac{u}{v}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow u=v\ \text{hoặc}\ 4u=3v.$$

- Với $u=v,$ suy ra: $\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2-x}\Leftrightarrow x+2=2-x\Leftrightarrow x=0.$
- Với $4u=3v,$ suy ra: $4\sqrt[3]{x+2}=3\sqrt[3]{2-x}\Leftrightarrow 64(x+2)=27(2-x)\Leftrightarrow x=-\dfrac{74}{91}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0,\ x=-\dfrac{74}{91}\cdot$

Lời giải 2. Chia và đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai.

Do $x=2$ không là nghiệm của (*) nên chia 2 vế cho $\sqrt[3]{(2-x)^2}\neq 0,$ ta được:

$(*) \Leftrightarrow 4\cdot\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{2-x}}\right)^2 - 7\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{2-x}} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x+2}{2-x}} = 1$ hoặc $\sqrt{\dfrac{x+2}{2-x}} = \dfrac{3}{4}\cdot$

Giải tương tự ta được 2 nghiệm cần tìm là $x = 0,\ x = -\dfrac{74}{91}\cdot$

_Ví dụ 115._ Giải phương trình: $2\cdot\sqrt[4]{(1+x)^2} - 3\cdot\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{(1-x)^2} = 0 \quad (*)$

Điều kiện: $-1 \le x \le 1.$

Lời giải 1. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai.

Đặt $u = \sqrt[4]{1+x} \ge 0,\ v = \sqrt[4]{1-x} \ge 0.$ Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 2u^2 - 3uv + v^2 = 0 \quad (1)$

Do $v = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ không là nghiệm nên chia 2 vế cho $v^2 \ne 0$:

$(1) \Leftrightarrow 2\cdot\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 - 3\cdot\dfrac{u}{v} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{u}{v} = 1$ hoặc $\dfrac{u}{v} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow u = v$ hoặc $2u = v.$

- Với $u = v,$ suy ra: $\sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{1-x} \Leftrightarrow 1 + x = 1 - x \Leftrightarrow x = 0.$
- Với $2u = v,$ suy ra: $2.\sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{1-x} \Leftrightarrow 16(1+x) = 1 - x \Leftrightarrow x = -\dfrac{15}{17}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0,\ x = -\dfrac{15}{17}\cdot$

Lời giải 2. Chia và đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai.

Do $x = 1$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế cho $\sqrt[4]{(1-x)^2} \ne 0$:

$(*) \Leftrightarrow 2\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^2 - 3\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}} = 1$ hoặc $\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}$

Giải tương tự, ta tìm được 2 nghiệm của phương trình là $x = 0,\ x = -\dfrac{15}{17}\cdot$

_Ví dụ 116._ Giải phương trình: $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3 \quad (*)$

Phân tích. *Thông thường thì học sinh nhầm lẫn giữa ví dụ này với hai ví dụ trước, nó không thuộc dạng:* $a\cdot\sqrt[n]{A^2} + b\cdot\sqrt[n]{A.B} + c\cdot\sqrt[n]{B^2} = 0$ *do vế phải là hằng số* $\ne 0$. *Đối với dạng này, ta thường đặt 2 ẩn phụ để đưa về hệ cơ bản.*

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[3]{2-x} \\ b = \sqrt[3]{7+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 2 - x \\ b^3 = 7 + x \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} a^3 + b^3 = 9.$ Kết hợp với đề được hệ phương trình $\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ a^2 + b^2 - ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 9 \\ a^2 - ab + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$

- Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases},$ suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1 \\ \sqrt[3]{7+x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = 1 \\ 7 + x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

- Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=2 \\ \sqrt[3]{7+x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=8 \\ 7+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-6.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1,\ x=-6.$

Ví dụ 117. Giải phương trình: $\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}=2+\sqrt{1-x^2}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1.$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{1+x} \ge 0 \\ b=\sqrt{1-x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a^3-b^3=2+ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2+2ab=2 & (1) \\ (a-b)^3+3ab(a-b)=2+ab & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 2ab=2-(a-b)^2$ và thế vào (2) được: $(a-b)^3-(a-b)^2-6(a-b)+6=0$

Suy ra: $a-b=1$ hoặc $a-b=\sqrt{6}$ hoặc $a-b=-\sqrt{6}.$

- Với $a-b=1 \Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}\cdot$ Theo Viét thì $a,\ (-b)$ là 2 nghiệm của phương trình

$$X^2-X-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow X=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \text{ và do } a\ge 0 \Rightarrow a=\sqrt{1+x}=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

- Với $a-b=\pm\sqrt{6} \Rightarrow (a-b)^2=6 \Rightarrow ab=-2$ (loại do $ab \ge 0$).

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 4

BT 178. Giải phương trình: $5\cdot\sqrt[4]{(3-x)^2}-2.\sqrt[4]{9-x^2}-7\cdot\sqrt[4]{(x+3)^2}=0.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 179. Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x+2)^2}+3\sqrt[3]{(x-2)^2}=4\sqrt[3]{x^2-4}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 180. Giải phương trình: $4\sqrt[3]{(2x+1)^2}+3\sqrt[3]{(1-2x)^2}=8\sqrt[3]{4x^2-1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 181. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+6x+9}-4\sqrt[3]{6x-x^2-9}+5\sqrt[3]{9-x^2}=0.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 182. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{(3x-1)^2}+3\sqrt[3]{(4x-1)^2}=5\sqrt[3]{12x^2-7x+1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 183. Giải phương trình: $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}+3\sqrt[3]{1-x^2}=5.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 184. Giải phương trình: $3\sqrt{3x-2}+4\sqrt{4x-3}=7\sqrt[4]{12x^2-17x+6}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 185. Giải: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 186. Giải phương trình: $2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x^2}=5.\sqrt[4]{(x+1)(x-1)^2}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 187. Giải: $\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(11-3x)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(3x-11)}=3.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 188. Giải phương trình: $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 189. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{4-3x}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{(3x-2)(4-3x)}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R}).$

5. Dạng 5. $a.f(x)+b.g(x)=c.\sqrt{f(x).g(x)}$ (*)

Dấu hiệu nhận dạng: Phương trình có 1 căn thức và biểu thức trong căn thức phân tích được thành tích số.

Phương pháp giải: có 2 hướng xử lý

- **Hướng 1**. Đặt 2 ẩn phụ $u=\sqrt{f(x)},\ v=\sqrt{g(x)},$ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai dạng: $a.u^2+b.v^2=c.uv.$
- **Hướng 2**. Chia trực tiếp cho lượng dương, chẳng hạn $g(x)>0,$ để được phương trình bậc hai dạng: $a\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}-c\cdot\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}+b=0.$

❖ **Một số lưu ý**:

– Đề bài thường cho giải phương trình với các dạng thường gặp sau đây:

- $ax^2+bx+c=(dx+e)\cdot\sqrt{mx+n}.$ (1)
- $ax^2+bx+c=d\cdot\sqrt{mx^2+nx+p}.$ (2)
- $ax^2+bx+c=d\cdot\sqrt{mx^3+nx^2+px+q}.$ (3)
- $ax^2+bx+c=d\cdot\sqrt{mx^4+nx^3+px^2+qx+r}.$ (4)
- $\alpha\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\beta\cdot\sqrt{mx^2+nx+p}=\gamma\cdot\sqrt{dx^2+ex+f}.$ (5)

Trong đó dạng (5) ta cần chuyển vế sao cho 2 vế đều dương và lũy thừa sẽ đưa về một trong các dạng (2), (3), (4).

– Thông thường, các biểu thức trong căn thức chưa phân tích thành tích số sẵn mà ta phải phân tích với các dạng phân tích hay được sử dụng sau:

- $f(x)=ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ với $x_1,\ x_2$ là 2 nghiệm của $f(x)=0.$
- Chia Hoocner đối với đa thức bậc cao khi nhẩm được nghiệm đẹp.
- $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2),\ a^2-b^2=(a-b)(a+b).$
- $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x).$
- $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1).$
- $4x^4+1=(2x^2+1)^2-4x^2=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$ ......

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 118. Giải phương trình: $2x^2-6x+10-5.(x-2)\sqrt{x+1}=0$ (*)

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Lê Hữu Trác 1

Phân tích*. Bài toán có dạng cơ bản (1), khi đó ta sẽ phân tích biểu thức ngoài căn thức theo biểu thức tích số, tức tìm hai số a, b thỏa:* $2x^2-6x+10=a.(x-2)^2+b.(\sqrt{x+1})^2$ $=ax^2+(b-4a)x+4a+b$ *và đồng nhất hệ số được hệ:* $\begin{cases}a=2,\ b-4a=-6\\4a+b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}.$

Lúc đó ta viết lại $(*) \Leftrightarrow 2(x-2)^2+2(\sqrt{x+1})^2-5.(x-2)\sqrt{x+1}=0$ *và có 2 hướng xử lý, một là đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp, hai là chia trực tiếp đưa về phương trình bậc hai. Ngoài ra, sử dụng casio ta tìm được 2 nghiệm là* $x=3,\ x=8$ *nên sẽ ghép bậc nhất để liên hợp đưa về nhân tử* $(x-3)(x-8)=x^2-11x+24$ *và có lời giải 3. Ngoài ra ta có thể giải lũy thừa 2 vế để đưa về phương trình bậc bốn và do biết được nhân tử bậc hai* $x^2-11x+24$ *nên sẽ lấy bậc bốn chia bậc hai này, thu được bậc hai để phân tích thành tích số dạng bậc hai nhân bậc hai hoặc chia Hoocner để phân tích sau khi biết 2 nghiệm* $x=3,\ x=8$ *và có lời giải 4.*

Điều kiện: $x\ge -1$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 2(x-2)^2+2(\sqrt{x+1})^2-5.(x-2)\sqrt{x+1}=0 \quad (1)$

<u>*Lời giải 1*</u>. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai.

Đặt $a=x-2,\ b=\sqrt{x+1}\ge 0$ thì $(1)\Leftrightarrow 2a^2+2b-5ab=0$ và do $x=-1$ không là nghiệm của (1) nên chia hai vế (1) cho $b=(\sqrt{x+1})^2>0$ ta được phương trình:

$$2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\cdot\frac{a}{b}+2=0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2 \text{ hoặc } \frac{a}{b}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=2b \text{ hoặc } 2a=b.$$

- Với $a=2b$, suy ra: $2\sqrt{x+1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=8.$
- Với $2a=b$, suy ra: $\sqrt{x+1}=2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 4x^2-17x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

<u>*Lời giải 2*</u>. Chia cho lượng dương đưa về phương trình bậc hai.

Do $x=-1$ không là nghiệm nên chia hai vế (1) cho $(\sqrt{x+1})^2>0$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}\right)^2-5\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}+2=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}=2 \text{ hoặc } \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}$$

Giải tương tự như trên ta được 2 nghiệm là $x=3,\ x=8$.

<u>*Lời giải 3*</u>. Ghép bậc nhất để liên hợp sau khi biết $x=3,\ x=8$ là 2 nghiệm.

$$(*) \Leftrightarrow (x^2-11x+24)+(x-2)\left[(x+7)-5\sqrt{x+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-11x+24)+\frac{(x-2)(x^2-11x+24)}{x+7+5\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-11x+24)\cdot\left(1+\frac{x-2}{x+7+5\sqrt{x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-11x+24=0 \\ 1+\dfrac{x-2}{x+7+5\sqrt{x+1}}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \ \vee \ x=8 \\ 5\sqrt{x+1}=-5-2x : VN_o \ \ \forall x\ge -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=8 \end{array}\right..$$

<u>*Lời giải 4*</u>. Lũy thừa. Điều kiện: $x\ge 2$, $(\text{do}: 2x^2-6x+10>0)$.

$$(*) \Leftrightarrow 2x^2-6x+10=5.(x-2)\sqrt{x+1}$$

$(1) \Leftrightarrow (2x^2-6x+10)^2 = 25(x+1)(x^2-4x+4) \Leftrightarrow 4x^4-49x^3+151x^2-120x=0$

$\Leftrightarrow x(4x^3-49x^2+151x-120)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{5}{4} \vee x=3 \vee x=8.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=3,\ x=8.$

Nhận xét. *Trong lời giải 4, nếu không đặt điều kiện chặt chẽ thì dễ dàng nhận thêm hai nghiệm ngoại lai* $x=0,\ x=\dfrac{5}{4},$ *mà 2 nghiệm này không thỏa mãn phương trình.*

Ví dụ 119. Giải phương trình: $2(x^2-x+6)=5\sqrt{x^3+8}$ (*)

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An

Phân tích. *Nhận thấy* $\sqrt{x^3+8}=\sqrt{(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}$, *do đó ta cần phân tích biểu thức:* $2(x^2-x+6)=a(x+2)+b(x^2-2x+4)=bx^2+(a-2b)x+2a+4b$ *và đồng nhất hệ số được* $a=b=2.$ *Khi đó* $(*) \Leftrightarrow 2(x+2)+2(x^2-2x+4)=5\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}$ *có dạng đẳng cấp và từ đó có các lời giải chi tiết 1 và 2 như sau:*

Điều kiện: $x\ge -2$ thì $(*) \Leftrightarrow 2(x+2)+2(x^2-4x+4)=5\sqrt{(x+2)(x^2-4x+4)}$ (1)

Lời giải 1. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai.

Đặt $a=\sqrt{x+2}\ge 0,\ b=\sqrt{x^2-2x+4}\ge\sqrt{3},$ thì $(1)\Leftrightarrow 2a^2+2b^2=5ab$ và chia hai vế cho $b>0$ ta được phương trình $\Leftrightarrow 2\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-5\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)+2=0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=2 \vee \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\cdot$

- Với $\dfrac{a}{b}=2,$ suy ra: $\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-2x+4}\Leftrightarrow 4x^2-9x+14=0:$ vô nghiệm.
- Với $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2},$ suy ra: $\sqrt{x^2-2x+4}=2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=3\pm\sqrt{13}.$

Lời giải 2. Chia cho lượng dương đưa về phương trình bậc hai.

Cho hai vế của phương trình (1) cho $x^2-2x+4>0,$ ta được:

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{2(x+2)}{x^2-2x+4}-5\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}+2=0\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}=2 \vee \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}=\dfrac{1}{2}\cdot$

Giải tương tự như trên, ta cũng được 2 nghiệm cần tìm là $x=3\pm\sqrt{13}.$

Lời giải 3. Liên hợp sau khi sử dụng table tìm được nhân tử $x^2-6x-4.$

$(*)\Leftrightarrow 2(x^2-6x-4)=5\sqrt{x^3+8}-10x-20\Leftrightarrow 2(x^2-6x-4)=5\left[\sqrt{x^3+8}-(2x+4)\right]$

Do $x=-2$ không là nghiệm nên xét $x>-2\Rightarrow\sqrt{x^3+8}+2x+4>0$ thì:

$\Leftrightarrow 2(x^2-6x-4)=5\cdot\dfrac{x^3-4x^2-16x-8}{\sqrt{x^3+8}+2x+4}\Leftrightarrow 2(x^2-6x-4)=\dfrac{5(x+2)(x^2-6x-4)}{\sqrt{x^3+8}+2x+4}$

$\Leftrightarrow (x^2-6x-4)\cdot\left[2-\dfrac{5(x+2)}{\sqrt{x^3+8}+2x+4}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x-4=0\\2\sqrt{x^3+8}=x+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\pm\sqrt{13}\\x=-2\ \ (L)\end{array}\right..$

Lời giải 4. Lũy thừa được bậc 4 và tách về bậc hai nhân bậc hai sau khi xác định được lượng nhân tử là x^2-6x-4 bằng phép chia đa thức.
Do $x^2-x+6>0$ nên $x^3+8>0 \Leftrightarrow x>-2$. Khi đó:
$(*) \Leftrightarrow (2x^2-2x+12)^2=25x^3+200 \Leftrightarrow 4x^4-33x^3+52x^2-48x-56=0$

$\Leftrightarrow (x^2-6x-4)(4x^2-9x+14)=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}.$

Ví dụ 120. Giải phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2007

Phân tích. Nhận thấy $\sqrt{x^3-1}=\sqrt{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$, do đó ta cần phân tích biểu thức: $2x^2+5x-1=a.(x-1)+b.(x^2+x+1)=bx^2+(a+b)x+b-a$ và đồng nhất hệ số ta được: $a=3,\ b=2$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow 3.(x-1)+2.(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$ có dạng đẳng cấp và từ đó có các lời giải sau:
Điều kiện: $x^3-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$ và do $x=1$ không là nghiệm nên chỉ xét $x>1$.
$(*) \Leftrightarrow 3(x-1)+2(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$ (1)

Lời giải 1. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai.
Đặt $a=\sqrt{x-1}\ge 0,\ b=\sqrt{x^2+x+1}>0,$ thì phương trình:

$(1) \Leftrightarrow 3a^2+2b^2=7ab \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2-7\cdot\frac{a}{b}+2=0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2$ hoặc $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\cdot$

- Với $\frac{a}{b}=2,$ suy ra: $\sqrt{x-1}=2\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow 4x^2+3x+5=0:$ vô nghiệm.
- Với $\frac{a}{b}=\frac{1}{3},$ suy ra: $3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow x^2-8x+10=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{6}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=4\pm\sqrt{6}.$

Lời giải 2. Chia cho lượng dương đưa về phương trình bậc hai.
Cho hai vế của phương trình (1) cho $x^2+x+1>0,$ ta được:

$(1) \Leftrightarrow 3\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}-7\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}=2 \vee \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}=\frac{1}{3}\cdot$

Giải tương tự như trên, ta được 2 nghiệm cần tìm là $x=4\pm\sqrt{6}.$

Lời giải 3. Liên hợp sau khi sử dụng table tìm được nhân tử $x^2-8x+10.$
$(*) \Leftrightarrow 2(x^2-8x+10)=7\sqrt{x^3-1}-21x+21 \Leftrightarrow 2(x^2-8x+10)=7(\sqrt{x^3-1}-3x+3)$

$\Leftrightarrow 2(x^2-8x+10)=\frac{7(x^3-9x^2+18x-10)}{\sqrt{x^3-1}+3x-3}$

$\Leftrightarrow 2(x^2-8x+10)=\frac{7(x-1)(x^2-8x+10)}{\sqrt{x^3-1}+3x-3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+10=0 \\ 2\sqrt{x^3-1}=x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\pm\sqrt{6} \\ 4x^3-x^2+2x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\pm\sqrt{6} \\ x=1 \quad (Loại) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{6}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 4 \pm \sqrt{6}.$

Lời giải 4. Lũy thừa được bậc 4 và tách về bậc hai nhân bậc hai sau khi xác định được lượng nhân tử là $x^2 - 8x + 10$ bằng phép chia đa thức.

$$(*) \Leftrightarrow (2x^2 + 5x - 1)^2 = 49(x^3 - 1) \Leftrightarrow 4x^4 - 29x^3 + 21x^2 - 10x + 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 10)(4x^2 + 3x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 4 \pm \sqrt{6}.$

Ví dụ 121. Giải phương trình: $\sqrt{30}.(3x^2 - 2x - 2) = 6\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 2) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{30} \cdot \left[3(x^2 + 2x + 2) - 8(x+1)\right] - 6\sqrt{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow -8\sqrt{30} \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} - 6 \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}} + 3\sqrt{30} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\Leftrightarrow 100(x+1) = 30(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow 30x^2 - 40x - 40 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{2}{3}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 2,\ x = -\frac{2}{3}\cdot$

Ví dụ 122. Giải phương trình: $3\sqrt{81x^4 + 4} = 27x^2 + 42x + 6$ (*)

Phân tích. *Biểu thức:* $81x^4 + 4 = \left[(9x^2)^2 + 2.9x^2.2 + 2^2\right] - 36x^2 = (9x^2 + 2)^2 - (6x)^2$ $= (9x^2 + 6x + 2) \cdot (9x^2 - 6x + 2)$ *và* $27x^2 + 42x + 6 = a(9x^2 + 6x + 2) + b(9x^2 - 6x + 2),$ *đồng nhất hệ số ta được* $a = 5,\ b = -2$ *nên có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{(9x^2 + 6x + 2) \cdot (9x^2 - 6x + 2)} = 5(9x^2 + 6x + 2) - 2(9x^2 - 6x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{9x^2 + 6x + 2}{9x^2 - 6x + 2} - 3 \cdot \sqrt{\frac{9x^2 + 6x + 2}{9x^2 - 6x + 2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9x^2 + 6x + 2}{9x^2 - 6x + 2}} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0.$

Ví dụ 123. Giải phương trình: $\sqrt{x^2(x^2 + 1) + 1} + \sqrt{3}(x^2 + 1) = 3\sqrt{3}.x$ (*)

Đề thi học giỏi tỉnh Tuyên Quang năm 2014 – 2015

Phân tích. *Biểu thức:* $x^2(x^2 + 1) + 1 = x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$ $= (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ *Khi đó* $\sqrt{3}(x^2 - 3x + 1) = \sqrt{3}.\left[a(x^2 + x + 1) + b(x^2 - x + 1)\right]$ *và đồng nhất hệ số tìm được* $a = 2,\ b = -1$ *nên có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} + \sqrt{3}.\left[2(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Leftrightarrow 3(x^2+x+1)=x^2-x+1 \Leftrightarrow 2x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

Ví dụ 124. Giải phương trình: $3x^2-4x+23=3\sqrt{x^4-8x+63}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x^4-8x+63\ge 0.$

Ta có: $x^4-8x+63=\left[(x^2)^2+2.x^2.8+64\right]-(16x^2+8x+1)=(x^2+8)^2-(4x+1)^2$

$=(x^2+4x+9)(x^2-4x+7)$ và có: $3x^2-4x+23=2(x^2-4x+7)+(x^2+4x+9).$

$(*)\Leftrightarrow 2(x^2-4x+7)+(x^2+4x+9)=3\sqrt{(x^2+4x+9)(x^2-4x+7)}$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{x^2-4x+7}{x^2+4x+9}-3\sqrt{\dfrac{x^2-4x+7}{x^2+4x+9}}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2-4x+7}{x^2+4x+9}}=1 \vee \sqrt{\dfrac{x^2-4x+7}{x^2+4x+9}}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+7=x^2+4x+9 \\ 4(x^2-4x+7)=x^2+4x+9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$ hoặc $x=\dfrac{10\pm\sqrt{43}}{3}\cdot$

Kết luận: Thế vào điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-\dfrac{1}{4},\ x=\dfrac{10\pm\sqrt{43}}{3}\cdot$

Ví dụ 125. Giải phương trình: $x^2-3x+4=3\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}$ (*)

Phân tích. *Có:* $\sqrt{x^3-6x+11x-6}=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}=\left[\begin{array}{l} \sqrt{(x-1).(x^2-5x+6)} \\ \sqrt{(x-2).(x^2-4x+3)} \\ \sqrt{(x-3).(x^2-3x+2)} \end{array}\right.$

Nên sẽ có 3 phân tích: $\left[\begin{array}{ll} x^2-3x+4=a(x-1)+b(x^2-5x+6) & (1) \\ x^2-3x+4=a(x-2)+b(x^2-4x+3) & (2) \\ x^2-3x+4=a(x-3)+b(x^2-3x+2) & (3) \end{array}\right.$

Sử dụng hệ số bất định, nhận thấy chỉ có (1) tồn tại $a,\ b$ *với* $a=2,\ b=1.$

Ngoài cách sử dụng hệ số bất định này, ta có thể dựa vào điều kiện để phân tích, nghĩa là có điều kiện: $x^3-6x+11x-6\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ 1\le x\le 2 \end{array}\right.\cdot$ *Từ đó sẽ viết:* $\sqrt{x^3-6x+11x-6}=\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2-5x+6}$ *sẽ thỏa mãn 2 khoảng điều kiện nên chọn (1) để đồng nhất hoặc dựa vào* $\sqrt{A.B}=\sqrt{A}\sqrt{B}$ *khi* $\begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \end{cases}$ *luôn có:* $x-1\ge 0.$

Lời giải. Điều kiện: $x^3-6x+11x-6\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ 1\le x\le 2 \end{array}\right.\cdot$

$(*)\Leftrightarrow 2(x-1)+(x^2-5x+6)-3\sqrt{(x-1)(x^2-5x+6)}$ (i)

Do $x=1$ không là nghiệm của (i) nên chia 2 vế của (i) cho $x-1>0,$ được:

$$(i) \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-1} - 3\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} = 2 \vee \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6=4(x-1) \\ x^2-5x+6=x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-9x+10=0 \\ x^2-6x+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{9\pm\sqrt{41}}{2} \text{ hoặc } x = 3\pm\sqrt{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \dfrac{9\pm\sqrt{41}}{2},\ x = 3\pm\sqrt{2}.$

Ví dụ 126. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$ (*)

HSG các trường chuyên khu vực Duyên Hải và Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2010

Phân tích. *Phương trình có dạng cơ bản* $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{C}$, *do đó ta sẽ đặt điều kiện và chuyển vế sao cho 2 vế đều dương, sau đó lũy thừa, rút gọn thì thu được phương trình:* $2x^2-5x+2 = 5\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}$ *và có* $x^2-x-20=(x-5)(x+4)$ *nên có các phương án* $\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)} = \sqrt{(x+1)(x-5)(x+4)} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{(x+1)(x^2-x-20)} \\ \sqrt{(x-5)(x^2+5x+4)} \\ \sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)} \end{array}\right.\cdot$

Lúc đó cũng có 3 đồng nhất tương ứng $\left[\begin{array}{ll} 2x^2-5x+2 = a.(x+1)+b.(x^2-x-20) & (1) \\ 2x^2-5x+2 = a.(x-5)+b.(x^2+5x+4) & (2) \\ 2x^2-5x+2 = a.(x+4)+b.(x^2-4x-5) & (3) \end{array}\right.$

và chỉ thấy phương án (3) là tồn tại 2 số a, b với $a=3,\ b=2$ *thỏa mãn đồng nhất.*

Lời giải 1. Điều kiện: $\begin{cases} 5x^2+14x+9 \ge 0 \\ x^2-x-20 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\frac{9}{5} \vee x \ge -1 \\ x \le -4 \vee x \ge 5 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 5.$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{5x^2+14x+9})^2 = (5\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x-20})^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+14x+9 = 25(x+1) + x^2-x-20 + 10\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2 = 5\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)} \qquad (i)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+4) + 2(x^2-4x-5) - 5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2-4x-5}{x+4} - 5\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}} = 1 \vee \sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-5 = x+4 \\ 4(x^2-4x-5) = 9(x+4) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{61}}{2} \vee x = 8 \vee x = -\frac{7}{4}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \dfrac{5+\sqrt{61}}{2},\ x = 8.$

Lời giải 2. Nhân lượng liên hợp sau khi xác định nhân tử x^2-5x-9 bằng chức năng table của casio của phương trình $2x^2-5x+2=5\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}.$

$$(i)\Leftrightarrow 2(x^2-5x-9)=5\left[\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}-(x+4)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-5x-9)=\frac{5(x^3-x^2-29x-36)}{\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}+x+4}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x-9)\cdot\left[2-\frac{5(x+4)}{\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}+x+4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 5\\ \left[\begin{array}{l}x^2-5x-9=0\\ 2\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}=3(x+4)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 5\\ \left[\begin{array}{l}x^2-5x-9=0\\ 2\sqrt{(x+1)(x-5)}=3\sqrt{x+4}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{61}}{2}\ \text{ hoặc } x=8.$$

Lưu ý. *Nếu nhập* $2X^2-5X+2-5\sqrt{(X+1)(X^2-X-20)}$ *vào máy tính và bấm shift solve* $9=$ *thì phương trình cho ta nghiệm* $X=8.$ *Để kiểm tra còn nghiệm hay không ta sửa lại cấu trúc:* $(2X^2-5X+2-5\sqrt{(X+1)(X^2-X-20)}):(X-8)$ *và bấm shift solve* $9=$ *thì cho nghiệm vô tỷ* $X=6.405124838$ *nên sẽ lưu biến lại và sử dụng chức năng table cho được nhân tử* x^2-5x-9 *(xem lại bài học 1). Từ đó tách ghép và có lời giải 2 như trên. Hơn nữa do xác định được lượng nhân tử* $x^2-5x-9,$ *ta hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp lũy thừa 2 vế thu được phương trình bậc bốn và đưa về tích số của hai phương trình bậc hai (chia đa thức – dành cho bạn đọc).*

Ví dụ 127. Giải phương trình: $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}$ (*)

Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ – Số 410 (8 – 2011)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 7.$

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt{7x^2+25x+19})^2=(7\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-2x-35})^2$$

$$\Leftrightarrow 7x^2+25x+19=49(x+2)+x^2-2x-35+14\sqrt{(x+2)(x^2-2x-35)}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-11x-22=7\sqrt{(x+2)(x-7)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-5x-14)+4(x+5)-7\sqrt{(x+5)(x^2-5x-14)}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{x^2-5x-14}{x+5}-7\sqrt{\frac{x^2-5x-14}{x+5}}+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x^2-5x-14}{x+5}}=\dfrac{4}{3}\\ \sqrt{\dfrac{x^2-5x-14}{x+5}}=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ \left[\begin{array}{l} 9(x^2-5x-14)=16(x+5) \\ x^2-5x-14=x+5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ \left[\begin{array}{l} 9x^2-61x-206=0 \\ x^2-6x-19=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18} \\ x=3+2\sqrt{7} \end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=3+2\sqrt{7}$, $x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}\cdot$

Ví dụ 128. Giải phương trình: $\sqrt{x^3+2x^2+27x+12}-\sqrt{2+x}=\sqrt{1+x^3}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^3+2x^2+27x+12 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x^3+2x^2+27x+12})^2=(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{2+x})^2$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2+27x+12=x^3+x+3+2\sqrt{(1+x^3)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+26x+9=2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 7(x^2+3x+2)-5(x^2-x+1)=2\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+3x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 7\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}-2\cdot\sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}}-5=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2=x^2-x+1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}\cdot$$

Kết luận: Thế vào điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=-\dfrac{1}{4}\cdot$

Ví dụ 129. Giải PT: $\sqrt{4x^2+24x+35}-\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+7x+12}$ (*)

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x^2+3x+2 \geq 0 \\ 4x^2+24x+35>0 \\ x^2+7x+12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq -1 \\ x<-\dfrac{7}{2} \vee x>-\dfrac{5}{2} \\ x \leq -4 \vee x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -4 \\ -\dfrac{5}{2}<x \leq -2 \\ x \geq -1 \end{array}\right.$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{4x^2+24x+35})^2=(\sqrt{x^2+7x+12}+\sqrt{x^2+3x+2})^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+24x+35=2x^2+10x+14+2\sqrt{(x^2+7x+12)(x^2+3x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+14x+21=2\sqrt{(x+4)(x+3)(x+1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2+6x+8)(x^2+4x+3)}=3(x^2+6x+8)-(x^2+4x+3) \qquad (i)$$

Đặt $a=x^2+6x+8$, $b=x^2+4x+3$. Khi đó $(i) \Leftrightarrow 2\sqrt{ab}=3a-b \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b \geq 0 \\ 4ab=(3a-b)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b \geq 0 \\ 9a^2-10ab+b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b \geq 0 \\ (a-b)(9a-b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \geq b \\ a=b \end{cases} \vee \begin{cases} 3a \geq b \\ 9a=b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2+6x+8) \ge x^2+4x+3 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+6x+8 = x^2+4x+3 \\ 9(x^2+6x+8) = x^2+4x+3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ hoặc } x = \frac{\sqrt{73}-25}{8}.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{73}-25}{8}$.

Bình luận. *Trong bài giải trên, tôi đã đặt* $a = x^2+6x+8,\ b = x^2+4x+3$ *thay thế cho việc đặt* $a = \sqrt{x^2+6x+8},\ b = \sqrt{x^2+4x+3}$ *do chưa khẳng định được 2 căn thức này dương với mọi* $x \in$ *tập điều kiện. Hơn nữa, do việc chưa khẳng định này nên không thể chia 2 vế cho lượng dương được. Nếu làm như thế ta phải chia theo từng khoảng của điều kiện và giải từng trường hợp, dài dòng, phức tạp, dễ gây sai sót.*

Ví dụ 130. Giải phương trình: $2x^3 + x^2 + x = (x^2+6x+6)\sqrt{x+1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1.$

$$(*) \Leftrightarrow 2x^3 + x(x+1) - \left[x^2 + 6(\sqrt{x+1})^2\right]\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + x(\sqrt{x+1})^2 - x^2\sqrt{x+1} - 6(\sqrt{x+1})^3 = 0 \text{ (do } x=-1 \text{ không là nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 - \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^2 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 3.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bình luận. *Khác với các thí dụ trên, phương trình không đưa về dạng đẳng cấp bậc 2* $a.u^2 + b.uv + v^2 = 0$ *mà đưa về dạng đẳng cấp bậc ba* $a.u^3 + b.u^2v + c.uv^2 + v^3 = 0$ *và dễ nhìn nhận ta có thể đặt* $y = \sqrt{x+1}$ *khi đó được* $2x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$. *Loại này ta đã tìm hiểu ở phần đặt một ẩn phụ dạng 1:* $a.f(x) + b.\sqrt[n]{f(x)} + c = 0.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 5

BT 190. Giải phương trình: $3(x^2-1) + 4x = 4x\sqrt{4x-3}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

BT 191. Giải phương trình: $3x^2 - 13x + 37 = 8(x-3)\sqrt{x+2}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

BT 192. Giải phương trình: $7x^2 + x + 2 = 7x\sqrt{x^2+x+2}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

BT 193. Giải phương trình: $3(x+1)\sqrt{x^2+12} = 9x^2 + 20x - 2.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Bạc Liêu – Bạc Liêu

BT 194. Giải phương trình: $15x^2 + 12x + 12 = 10(2x+1)\sqrt{x^2+3}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

BT 195. Giải phương trình: $3x^2 + 2x + 7 = 3(x+1)\sqrt{x^2+3}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

BT 196. Giải phương trình: $2(x^2+18) = 7\sqrt{x^3+27}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

BT 197. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+8} = 3x^2 - 3x + 18.$ $(x \in \mathbb{R})$.

BT 198. Giải phương trình: $x^2 + 5x + 7 = 7\sqrt{x^3+1}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

BT 199. Giải phương trình: $3x^2+10x+56=\sqrt{x^3-64}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 200. Giải phương trình: $5x^2+11x-2=2\sqrt{x^3-4x}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 201. Giải phương trình: $4x^2+11=5\sqrt{8x^3-12x^2+6x+7}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 202. Giải phương trình: $x^2+6x-7=4\sqrt{x^3-x^2-7x-20}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 203. Giải phương trình: $2x^2+13x=36+7\sqrt{x^3-24x+32}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 204. Giải phương trình: $2x^2-5x+2=4\sqrt{2(x^3-21x-20)}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 205. Giải phương trình: $3(x^2+4x+5)=10\sqrt{x^3+5x^2+9x+6}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – THPT Trần Quốc Tuấn – Kon Tum

BT 206. Giải phương trình: $3x^2-x\sqrt{2}+3=3\sqrt{x^4+1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 207. Giải phương trình: $8x^2+20x+1=\sqrt{64x^4+1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 208. Giải phương trình: $x^2+4x+1=\sqrt{x^4+x^2+1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 209. Giải phương trình: $5x^2-x+5=5\sqrt{x^2(x^2+1)+1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 210. Giải phương trình: $\sqrt{3}(x^2-3x+1)=\sqrt{x^4+x^2+1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Hùng Vương – Bình Dương

BT 211. Giải phương trình: $20x^2-3x+5=5\sqrt{16x^4-x^2+1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 212. Giải phương trình: $\sqrt{x^8-14x^4+1}=x^4-12x^2+1.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 213. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3x^2+38}-\sqrt{x^2+5x+6}=\sqrt{x+4}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 214. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 215. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{3x^2+4x+1}-\sqrt{2x-1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 216. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-3x-2}=\sqrt{18x^2+16x-39}-5\sqrt{x-1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 217. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+11x-27}-\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{x-2}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 218. Giải phương trình: $2\sqrt{x+1}+\sqrt{3x^2+5x-2}=\sqrt{18x^2+18x-5}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 219. Giải phương trình: $\sqrt{10x^2-50x-3}=\sqrt{2x^2-5x+2}-3\sqrt{x-5}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 220. Giải phương trình: $\sqrt{3(9x^2-20x+9)}=2\sqrt{6x^2-11x+3}-\sqrt{x-2}.$

BT 221. Giải phương trình: $\sqrt{x(8x-15)}=\sqrt{4x^2-5x+1}-2\sqrt{x-2}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 222. Giải phương trình: $\sqrt{x^3+2x^2-7x+6}-\sqrt{x}=\sqrt{x^3+1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 223. Giải phương trình: $\sqrt{x^3+5x^2-7x-2}=\sqrt{x^3+x-2}+\sqrt{2x-1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 224. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{1+3x^2}=\sqrt{3(5x^2+2x+3)}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 225. Giải phương trình: $3\sqrt{2x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+2}=2\sqrt{9x^2-3x+8}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

BT 226. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2-29x+11}=2\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-3x+2}$. ($x\in\mathbb{R}$).

BT 227. Giải phương trình: $(3x^2-8x-5)\sqrt{x^2+1}=(x^2+4x+5)\sqrt{x+1}$. ($x\in\mathbb{R}$).

6. Dạng 6. $a.f(x)+b.g(x)=c.\sqrt{d.f^2(x)+e.g^2(x)}$

Phương pháp giải:

Đặt 2 ẩn phụ $u=f(x)$, $v=g(x)$, đưa phương trình đã cho về dạng cơ bản $\sqrt{A}=B$, với $c.\sqrt{d.u^2+e.v^2}=a.u+b.v$ hoặc chia cho lượng dương $g(x)>0$ được $c.\sqrt{d.\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)+e}=a.\dfrac{f(x)}{g(x)}+b$ và đặt $t=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ để bài toán đơn giản hơn.

Lưu ý. Biểu thức trong căn thức (căn thức lớn) chưa phân tích sẵn, ta cần phân tích biểu thức này theo tổng của các biểu thức bên ngoài bằng đồng nhất thức quen thuộc.

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 131. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+x+6}=4x-2+7\sqrt{x+1}$ (*)

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Chuyên Quốc Học Huế

Phân tích*. Phương trình* $(*)\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+x+6}=2(2x-1)+7\sqrt{x+1}$ *và biểu thức trong "căn lớn":* $\sqrt{4x^2+x+6}$ *không phân tích được thành tích số. Nhưng nếu phân tích biểu thức trong căn thức này bằng tổng bình phương của biểu thức ngoài dấu căn, ta hoàn toàn có thể đưa được về dạng 6, cụ thể cần đi tìm 2 số a, b thỏa đồng nhất:* $4x^2+x+6=a(2x-1)^2+b(\sqrt{x+1})^2=4ax^2+(b-4a)x+a+b$ *và đồng nhất được hệ* $\begin{cases}4a=4\\b-4a=1\\a+b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=5\end{cases}$ *thì* $PT\Leftrightarrow\sqrt{(2x-1)^2+5(\sqrt{x+1})^2}=4(2x-1)+7\sqrt{x+1}$. *Lúc đó ta có thể đặt* $u=2x-1$, $v=\sqrt{x+1}$, *nhưng để đơn giản, tôi thường giải cách 2 bằng cách chia 2 vế cho lượng dương đưa về phương trình dạng* $\sqrt{A}=B$ *một biến.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1$. Do $x=-1$ không là nghiệm nên chỉ xét $x>-1$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(2x-1)^2+5(\sqrt{x+1})^2}=2(2x-1)+7\sqrt{x+1}$ (chia 2 vế cho $\sqrt{x+1}>0$)

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\right)^2+5}=2\cdot\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}+7 \qquad (i)$$

Đặt $t=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$, thì $(i)\Leftrightarrow\sqrt{t^2+5}=2t+7\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge-\dfrac{7}{2}\\3t^2+28t+44=0\end{cases}\Leftrightarrow t=-2.$

Suy ra: $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}=-2\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=1-2x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-8x-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{2}\cdot$

Ví dụ 132. Giải phương trình: $x+2=\sqrt{x^2-2x-2}+2\sqrt{x+1}$ (*)

Đề thi thử Đại học 2014 – THPT Chuyên KHTN Hà Nội

Phân tích. *Căn lớn:* $\sqrt{x^2-2x-2}=\sqrt{a(x+2)^2+b(\sqrt{x+1})^2}=\sqrt{ax^2+(4a+b)+4a+b}$

và đồng nhất hệ số được $\begin{cases} a=1 \\ 4a+b=-2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$ *nên có lời giải sau:*

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} -1\le x\le 1-\sqrt{3} \\ x\ge 1+\sqrt{3} \end{array}\right.\cdot$ Nhận thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình.

Khi đó ta xét $x\ne 1,$ tức trên tập xác định: $D=\left(-1;1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right).$

Lời giải 1. Đặt ẩn phụ đưa về dạng $\sqrt{A}=B.$

$$(*)\Leftrightarrow x+2=\sqrt{(x+2)^2-6(\sqrt{x+1})^2}+2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\right)^2-6}=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}-2 \quad (i)$$

Đặt $t=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$, thì $(i)\Leftrightarrow \sqrt{t^2-6}=t-2\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 2 \\ t^2-4t+4=t^2-6 \end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}\cdot$

Suy ra: $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 5\sqrt{x+1}=2(x+2)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 4x^2-9x-9=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=3\ \vee\ x=-\dfrac{3}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 3 nghiêm là $x=-1,\ x=3,\ x=-\dfrac{3}{4}\cdot$

Lời giải 2. Chia trực tiếp để đặt ẩn phụ.

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1+\frac{1}{x+1}-4}+2 \quad (i)$$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\overset{Cauchy}{\ge}2$, suy ra: $t^2=x+1+\dfrac{1}{x+1}+2.$ Khi đó:

$(i)\Leftrightarrow t=\sqrt{t^2-6}+2\Leftrightarrow \sqrt{t^2-6}=t-2\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}\cdot$

Suy ra: $\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2(x+2)=5\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=3\ \vee\ x=-\dfrac{3}{4}\cdot$

Lời giải 3. Liên hợp sau khi sử dụng casio tìm được 2 nghiệm $x=-1,\ x=3.$

$$(*)\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-2x-2}-1)+\left[2\sqrt{x+1}-(x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x^2-2x-2}+1}-\frac{x^2-2x-3}{2\sqrt{x+1}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-3)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}+x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=3 & \\ \sqrt{x^2-2x-2}=2\sqrt{x+1}+x & (i)\end{array}\right.$$

$$(*),\ (i) \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-2x-2}+2\sqrt{x+1}=x+2\\ \sqrt{x^2-2x-2}-2\sqrt{x+1}=x\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} \sqrt{x^2-2x-2}=x+1 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}\cdot$$

_Ví dụ 133._ Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{1-3x}=2\sqrt{x^2+1}$ $(*)$

Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ – Số 439 (1 – 2014)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+3x+1\ge 0\\ 1-3x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -1 \ \vee \ x\ge -\dfrac{1}{2}\\ x\le \dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -1\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{3}\end{array}\right.\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2(\sqrt{x^2+1})^2-(\sqrt{1-3x})^2}=2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-3x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-\left(\frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}=2-\frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{2-t^2}=2-t \text{ với } t=\frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt{x^2+1}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t\le 2\\ 2t^2-4t+2=0\end{cases} \Leftrightarrow t=1. \text{ Suy ra: } \sqrt{x^2+1}=\sqrt{1-3x} \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-3.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=0,\ x=-3$.

Nhận xét. *Qua bài toán này, ta nhận được 1 kinh nghiệm nhỏ, đó là gặp phương trình vô tỷ cơ bản dạng* $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}$, *ta đừng vội lũy thừa mà nên nháp thử biểu thức trong căn lớn có phân tích thành tổng của các biểu thức ngoài căn hay không ?! Nếu không, ta hãy lũy thừa để xem chúng thuộc loại cơ bản nào đã học và định hướng đi.*

_Ví dụ 134._ Giải phương trình: $4x=\sqrt{x^3+4x^2-5}+\sqrt{2x^3+4x^2-10}$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x^3+4x^2-5\ge 0\\ 2x^3+4x^2-10\ge 0\end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2(\sqrt{x^3+4x^2-5})^2-(2x)^2}=2.2x-\sqrt{x^3+4x^2-5} \qquad (i)$$

Đặt $u=2x,\ v=\sqrt{x^3+4x^2-5}\ge 0$ thì $(i) \Leftrightarrow \sqrt{2u^2-v^2}=2u-v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2u-v\ge 0\\ 5u^2-4uv-v^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2u-v\ge 0\\ (u-v)(5u+v)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2u\ge v\ge 0\\ u=v \ \vee \ u=v=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x^3+4x^2-5} = 2x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x = 0 \\ x^3+4x^2-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt[3]{5}.$

Nhận xét. *Trong bài giải trên, do điều kiện chưa được tường minh nên tôi chọn phương án đặt 2 ẩn phụ u, v thay cho việc chia rồi đặt một ẩn phụ t. Hiển nhiên các thí dụ trên vẫn giải được bằng cách đặt 2 ẩn phụ để đưa về phương trình đẳng cấp. Hơn nữa trong phép phân tích: $5u^2-4uv-v^2=0 \Leftrightarrow (u-v)(5u+v)=0,$ bản chất là giải phương trình đẳng cấp, tức phân tích: $5X^2-4X-1=(X-1)(5X+1)$ với $X=\dfrac{u}{v}$ và thế vào, qui đồng được nhân tử $(u-v)(5u+v)=0.$ Ta cũng phân tích tương tự đối với biểu thức có dạng đẳng cấp bậc ba thay cho việc tách, ghép và nhóm thông thường.*

Ví dụ 135. Giải phương trình: $2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^3+2x-7}=\sqrt{3x^3+18x-27}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ x^3+2x-7 \ge 0 \\ 3x^3+18x-27 \ge 0 \end{cases}.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{6(\sqrt{2x-1})^2+3(\sqrt{x^3+2x-7})^2} = 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^3+2x-7} \qquad (i)$$

Đặt $u=\sqrt{2x-1}\ge 0,\ v=\sqrt{x^3+2x-7}\ge 0.$ Khi đó: $(i) \Leftrightarrow \sqrt{6u^2+3v^2}=2u+v \quad (ii)$

$$\Leftrightarrow 6u^2+3v^2=4u^2+4uv+v^2 \Leftrightarrow 2u^2-4uv+2v^2=0 \Leftrightarrow (u-v)^2=0 \Leftrightarrow u=v.$$

Suy ra: $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^3+2x-7} \Leftrightarrow x^3=6 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{6}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\sqrt[3]{6}.$

Nhận xét. *Trong cách giải phương trình (ii) do 2 vế đều dương nên tôi đã bình phương mà không cần đặt điều kiện. Nếu chưa biết dấu nên giải theo đúng $\sqrt{A}=B.$*

Ví dụ 136. Giải: $\sqrt{5x^3+13x^2+4x-10}+\sqrt{x^3+3x^2+x-2}=3\sqrt{2x^2+x}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 5x^3+13x^2+4x-10 \ge 0 \\ x^3+3x^2+x-2 \ge 0 \\ 2x^2+x \ge 0 \end{cases}.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{5(x^3+3x^2+x-2)-(2x^2+x)} = 3\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^3+3x^2+x-2} \qquad (i)$$

Đặt $u=\sqrt{2x^2+x}\ge 0,\ \sqrt{x^3+3x^2+x-2}\ge 0.$ Khi đó: $(i) \Leftrightarrow \sqrt{5v^2-u^2}=3u-v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \ge 0 \\ 5v^2-u^2=9u^2-6uv+v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u \ge v \ge 0 \\ 5u^2-3uv-2v^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u \ge v \ge 0 \\ (u-v)(5u+2v)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u \ge v \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} u=v \\ 5u+2v=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u \ge v \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=v=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u \ge v \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^3+3x^2+x-2=2x^2+x \\ x^3+3x^2+x-2=2x^2+x=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 6

BT 228. Giải phương trình: $\dfrac{3-x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2(x^2-3x+4)}}=1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 229. Giải phương trình: $\dfrac{x+\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{4x^2-2x+3}}=1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 230. Giải phương trình: $x+2+4\sqrt{x^2-x+2}=2\sqrt{6x^2-x+14}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 231. Giải phương trình: $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x^2+8x+4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 232. Giải phương trình: $\sqrt{x^4-x^2+1}=3\sqrt{x^2-1}+x^2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 233. Giải phương trình: $x-1+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5x^2-12x+8}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 234. Giải phương trình: $2x+\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{4x^2+2x+4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 235. Giải phương trình: $x-1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{2x^2+4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 236. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+14x+4}=\sqrt{3x-2}+x+2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 237. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+8x+1}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+2x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 238. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-10x+16}=\sqrt{x-1}+x-3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 239. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+2\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{5x^2-7x+13}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 240. Giải phương trình: $x-1+\sqrt{x}=\sqrt{7x^2-17x+7}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 241. Giải phương trình: $6=3x+\sqrt{x}+2\sqrt{3x^2-14x+12}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 242. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{9x^2+23x+19}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 243. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2}+1-2x=2\sqrt{14x^2-12x+1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 244. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x}=\sqrt{3x^2+4x-18}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 245. Giải phương trình: $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5x^2+9x-10}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 246. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2+9x-4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 247. Giải phương trình: $2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{x^2+19x-28}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 248. Giải phương trình: $x+\sqrt{x^3+x^2-2}=\sqrt{3x^3+4x^2-6}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 249. Giải phương trình: $\sqrt{x^3+2x-3}+2x+2=\sqrt{5x^3+4x^2+18x-11}.$

BT 250. Giải PT: $2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^3+x^2+x-3}=\sqrt{6x^3+9x^2+9x-16}.$

BT 251. Giải phương trình: $x+3+\sqrt{x^3+6x+9}=\sqrt{x^3+3x^2+24x+36}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 252. Giải phương trình: $\sqrt{x^3+3x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2+4}=2\sqrt{x^3+2x^2+3}.$

BT 253. Giải phương trình: $\sqrt{x^3-2x}+\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{x^3+3x^2-8x+12}.$

7. Dạng 7. $\boxed{\left[f(x)\right]^n + b(x) = a(x)\cdot\sqrt[n]{a(x)\cdot f(x) - b(x)}}$ (i)

Phương pháp giải:

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ v = \sqrt[n]{a(x).f(x) - b(x)} \end{cases} \Rightarrow v^n = a(x)\cdot u - b(x)$ và kết hợp với đề bài được hệ phương trình đối xứng loại II : $\begin{cases} v^n = a(x)\cdot u - b(x) \\ u^n = a(x)\cdot v - b(x) \end{cases}$ (lấy vế trừ vế).

Lưu ý. Bài toán thường chưa được biến đổi về dạng (i), do đó ta cần biến đổi dựa vào đồng nhất thức quen thuộc để đưa về (i).

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 137. Giải phương trình: $4x^2 - 3x = (x+2)\sqrt{2x^2 + 2x - 1}$ $(*)$

Phân tích. *Dạng:* $mx^2 + nx + p = (qx + r)\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ *thường thì ta sẽ nghĩ đến dạng đẳng cấp, tức đi tìm 2 số* a, b *thỏa:* $4x^2 - 3x = a(x+2)^2 + b(\sqrt{2x^2+2x-1})^2$, *nhưng sẽ không tồn tại* a, b. *Kế đến, sẽ nghĩ đến việc đặt ẩn phụ không hoàn toàn, tức đặt* $t = \sqrt{2x^2 + 2x - 1}$, *nhưng phương pháp này không khả thi do Δ không là số chính phương. Lúc đó, các bạn hãy nghĩ đến việc đưa về dạng 7 bằng cách so sánh đề bài với dạng tổng quát, tức viết:* $(2x+m)^2 + b(x) = (x+2).\sqrt{(x+2)(2x+m) - b(x)}$, (i). *Lúc này ta cần xác định m và biểu thức* $b(x)$ *bằng đồng nhất thức dựa vào việc so sánh giữa* (i) *và* $(*)$. *Do biểu thức trong căn của* $(*)$, (i) *đều có* $2x^2$ *nên ta có thể khẳng định được rằng* $b(x)$ *sẽ có dạng bậc nhất mà ta gọi là* $b(x) = nx + p$. *Khi đó biểu thức* (i) *được viết lại là:* $(2x+m)^2 + (nx+p) = (x+2).\sqrt{(x+2)(2x+m) - (nx+p)}$ *hay viết* $4x^2 + (4m+n)x + m^2 + p = (x+2)\sqrt{2x^2 + (m-n+4)x + 2m - p}$, *so sánh với* $(*)$ *được hệ phương trình:* $\begin{cases} 4m+n=-3 \\ m^2+p=0 \\ m-n+4=2 \\ 2m-p=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \\ p=-1 \end{cases}\cdot$ *Khi đó phương trình đã cho được viết lại là* $(*) \Leftrightarrow (2x-1)^2 + (x-1) = (x+2).\sqrt{(x+2)(2x-1) - (x-1)}$ *và đặt 2 ẩn phụ như phần lý thuyết sẽ đưa về hệ đối xứng loại II và có lời giải 1 như sau:*

Điều kiện: $2x^2 + 2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \le \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x \ge \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot$

Lời giải 1. Đặt ẩn phụ đưa về hệ.

$(*) \Leftrightarrow (2x-1)^2 + (x-1) = (x+2).\sqrt{(x+2)(2x-1) - (x-1)}$ (i)

Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ v = \sqrt{(x+2)(2x-1)-(x-1)} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 = (x+2)\cdot u - (x-1) & (1) \\ u^2 = (x+2)\cdot v - (x-1) & (2) \end{cases}$

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow v^2 - u^2 = (x+2)(u-v) \Leftrightarrow (v-u)(v+u) + (v-u)(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow (v-u)(v+u+x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u+v+x+2 = 0 \end{array}\right..$$

- Với $u = v$, suy ra: $\sqrt{2x^2+2x-1} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
- Với $u+v+x+2=0$, suy ra: $\sqrt{2x^2+2x-1} = -1-3x$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải 2. Nhân liên hợp.

$(*) \Leftrightarrow 2(x^2-3x+1) + (x+2)\left[(2x-1) - \sqrt{2x^2+2x-1}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-3x+1) + \frac{2(x+2)(x^2-3x+1)}{2x-1+\sqrt{2x^2+2x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+1=0 \\ 1 + \dfrac{x+2}{2x-1+\sqrt{2x^2+2x-1}} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{2x^2+2x-1} = -1-3x:\ VN_o \end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét. *Thoạt nhìn vào lời giải 2 đơn giản và ngắn gọn, nhưng thực sự để có được tách ghép liên hợp như vậy ta cần qua các giai đoạn trung gian như sử dụng table của casio để tìm nhân tử* x^2-3x+1 *và cần có sự khéo léo, kết hợp với kinh nghiệm đồng nhất thức để ghép được biểu thức* $(2x-1)-\sqrt{2x^2+2x-1}$ *như đã trình bày !!!. Hiển nhiên do xác định được nhân tử* x^2-3x+1 *nên ta có thể giải cách 3 bằng phương pháp lũy thừa lên được bậc bốn, rồi chia cho* x^2-3x+1, *suy ra 2 tích số bậc 2. Nhưng cần tìm điều kiện chính xác để tránh thu nghiệm ngoại lai.*

_Ví dụ 138._ Giải phương trình: $x^2+7x+16 = (2x-3)\sqrt{2x^2+2x-16}$ (*)

Điều kiện: Do $x^2+7x+16 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $\begin{cases} 2x^2+2x-16 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$?! $\Leftrightarrow x > \dfrac{\sqrt{33}-1}{2}$.

Lời giải 1. Đặt ẩn phụ đưa về hệ.

$(*) \Leftrightarrow (x+3)^2 + (x+7) = (2x-3)\sqrt{(2x-3)(x+3)-(x+7)}$ (i)

Đặt $\begin{cases} u = x+3 \\ v = \sqrt{(2x-3)(x+3)-(x+7)} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + (x+7) = (2x-3)\cdot v \\ v^2 + (x+7) = (2x-3)\cdot u \end{cases}$

$$\Rightarrow u^2 - v^2 = (2x-3)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+2x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u+v+2x-3=0 \end{array}\right.$$

- Với $u = v,$ suy ra: $\sqrt{2x^2+2x-16} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2-4x-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2+\sqrt{29}.$
- Với $u+v+2x-3=0,$ suy ra: $\sqrt{2x^2+2x-16} = -3x < 0:$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2+\sqrt{29}.$

Lời giải 2. Nhân liên hợp sau khi sử dụng casio được nhân tử $x^2-4x-25.$

$(*) \Leftrightarrow (2x-3).\left[\sqrt{2x^2+2x-16} - (x+3)\right] + (x^2-4x-25) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)(x^2-4x-25)}{\sqrt{2x^2+2x-16}+x+3} + (x^2-4x-25) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-25=0 \\ \sqrt{2x^2+2x-16} = -3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pm\sqrt{29} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 7x^2-2x+16=0 \end{cases} : VN_o \end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2+\sqrt{29}.$

Ví dụ 139. Giải phương trình: $8x^2+11x+1 = (x+1)\sqrt{4x^2+6x+5}$ (*)

Phân tích. *Viết* $(3x+n)^2 + b(x) = (x+1)\sqrt{(x+1)(3x+n)-b(x)}$ *và do biểu thức trong căn thức của* (*) *là* $4x^2$ *nên* $b(x)$ *sẽ có dạng bậc hai loại:* $b(x) = -x^2+px+q.$ *Khi đó:* $(3x+n)^2 + (-x^2+px+q) = (x+1)\sqrt{(x+1)(3x+n)-(-x^2+px+q)}$ *và khai triển được:* $8x^2+(6n-p)x+n^2+q = (x+1)\sqrt{4x^2+(n-p+3)x+n-q}.$ *Đồng nhất hệ số được hệ*

$$\begin{cases} 6n+p=11 \\ n^2+q=1 \\ n-p+3=6 \\ n-q=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2 \\ p=-1 \\ q=-3 \end{cases}$$ *và có các lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (3x+2)^2 + (-x^2-x-3) = (x+1)\sqrt{(x+1)(3x+2)-(-x^2-x-3)}$ (i)

Đặt $\begin{cases} u = 3x+2 \\ v = \sqrt{(x+1)(3x+2)-(-x^2-x-3)} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + (-x^2-x-3) = (x+1)\cdot v \\ v^2 + (-x^2-x-3) = (x+1)\cdot u \end{cases}$

$$\Rightarrow u^2 - v^2 = (x+1)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u+v+x+1=0 \end{array}\right.$$

- Với $u = v,$ suy ra: $\sqrt{4x^2+6x+5} = 3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ 5x^2+6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{14}-3}{5}.$

- Với $u+v+x+1=0,$ suy ra: $\sqrt{4x^2+6x+5}=-4x-3 \Leftrightarrow x=-\dfrac{9+\sqrt{33}}{12}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\dfrac{\sqrt{14}-3}{5},\ x=-\dfrac{9+\sqrt{33}}{12}.$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Đặt $t=\sqrt{4x^2+6x+5}\ge 0 \Rightarrow t^2=4x^2+6x+5.$

$(*) \Leftrightarrow (4x^2+6x+5)+(x+1)\sqrt{4x^2+6x+5}-12x^2-17x-6=0$

$\Leftrightarrow t^2+(x+1)t-12x^2-17x-6=0$ và xem đây là phương trình bậc hai với biệt số $\Delta_t=(x+1)^2+4(12x^2+17x+6)=(7x+5)^2.$

Do đó: $t=\dfrac{-x-1+7x+5}{2}=3x+2$ hoặc $t=\dfrac{-x-1-7x-5}{2}=-4x-3.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{4x^2+6x+5}=4x+3\\ \sqrt{4x^2+6x+5}=-3x-2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{14}-3}{5},\ x=-\dfrac{9+\sqrt{33}}{12}.$

Ví dụ 140. Giải phương trình: $2x^2+7x+16=(2x+1)\sqrt{x^2+10x+4}$ (*)

Tập xác định: $x^2+10x+4\ge 0 \Leftrightarrow x\le -5-\sqrt{21}$ hoặc $x\ge -5+\sqrt{21}.$

Lời giải 1. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình.

$(*) \Leftrightarrow (x+4)^2+(x^2-x)=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(x+4)-(x^2-x)}$

Đặt $\begin{cases}u=x+4\\ v=\sqrt{(2x+1)(x+4)-(x^2-x)}\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u^2+(x^2-x)=(2x+1)\cdot v\\ v^2+(x^2-x)=(2x+1)\cdot u\end{cases}$

$\Rightarrow (u^2-v^2)=(2x+1)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+2x+1=0\end{array}\right.\cdot$

- Với $u=v,$ suy ra: $\sqrt{x^2+10x+4}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -4\\ 10x+4=8x+16\end{cases} \Leftrightarrow x=6.$
- Với $u+v+2x+1=0,$ suy ra: $\sqrt{x^2+10x+4}=-3x-5:$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6.$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

$(*) \Leftrightarrow x^2+10x+4+(2x+1)\sqrt{x^2+10x+4}-3x^2-17x-20=0$ (i)

Đặt $t=\sqrt{x^2+10x+4}\ge 0,$ suy ra: $t^2=x^2+10x+4.$

$(i) \Leftrightarrow t^2+(2x+1).t-(3x^2+17x+20)=0,$ có biệt số: $\Delta_t=(4x+9)^2.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{x^2+10x+4}=x+4\\ t=\sqrt{x^2+10x+4}=-3x-5\end{array}\right. \Rightarrow x=6.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6.$

Ví dụ 141. Giải phương trình: $4x+6=(x-1)\sqrt{6x^2-x-6}$ $\quad(*)$

Phân tích. *Khác với các thí dụ trước, biểu thức ngoài căn là bậc nhất nên sử dụng đồng nhất:* $(mx+n)^2-(m^2x^2+px+q)=(x-1)\sqrt{(x-1)(mx+n)+(m^2x^2+px+q)}$

$\Leftrightarrow (2mn-p)x+n^2-q=(x-1)\sqrt{(m+m^2)x^2+(n-m+p)+q-n}$ *và đồng nhất hệ số được hệ* $\begin{cases}2mn-p=4\\ n^2-q=6\\ m+m^2=6\\ n-m+p=-1\\ q-n=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\{-3;2\}\Rightarrow m=2\\ 4n-p=4\\ n^2-q=6\\ n+p=1\\ q-n=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ n=1\\ p=0\\ q=-5\end{cases}\cdot$ *Trong phép đồng nhất trên, tôi đã chọn* $m=2$ *để được các số còn lại chẵn, nếu chọn* $m=-3$ *thì sẽ lẻ.*

Lời giải. Điều kiện: $6x^2-x-6\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{1-\sqrt{145}}{12}$ hoặc $x=\dfrac{1+\sqrt{145}}{12}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow(2x+1)^2-(4x^2-5)=(x-1)\sqrt{(x-1)(2x+1)+(4x^2-5)}$

Đặt $\begin{cases}u=2x+1\\ v=\sqrt{(x-1)(2x+1)+(4x^2-5)}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2-(4x^2-5)=(x-1)\cdot v\\ v^2-(4x^2-5)=(x-1)\cdot u\end{cases}$

$\Rightarrow u^2-v^2=(x-1)(v-u)\Leftrightarrow(u-v)(u+v+x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x-1=0\end{array}\right.$.

- Với $u=v,$ suy ra: $\sqrt{6x^2-x-6}=2x+1\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\ge 0\\ 2x^2-5x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}\cdot$
- Với $u+v+x-1=0,$ suy ra: $\sqrt{6x^2-x-6}=-3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 3x^2+x+6=0\end{cases}$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{7}{2}\cdot$

Ví dụ 142. Giải phương trình: $6x+9+(2x+1)\sqrt{15x^2+x+9}=0$ $\quad(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow -6x-9=(2x+1)\sqrt{15x^2+x+9}$

$\Leftrightarrow(3x-1)^2-(9x^2+10)=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(3x-1)+(9x^2+10)}$

Đặt $\begin{cases}u=3x-1\\ v=\sqrt{(2x+1)(3x-1)+(9x^2+10)}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-(9x^2+10)=(2x+1)\cdot v\\ v^2-(9x^2+10)=(2x+1)\cdot u\end{cases}$

$\Rightarrow u^2-v^2=(2x+1)(v-u)\Leftrightarrow(u-v)(u+v+2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+2x+1=0\end{array}\right.$.

- Với $u=v$, suy ra: $\sqrt{15x^2+x+9}=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{3} \\ 6x^2+7x+8=0 \end{cases}$: vô nghiệm.
- Với $u+v+2x+1=0$, suy ra: $\sqrt{15x^2+x+9}=-5x \Leftrightarrow x=-\frac{9}{10}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=-\frac{9}{10}\cdot$

Ví dụ 143. Giải phương trình: $x^3+7x^2+16x+5=(1-2x)\sqrt[3]{-3x^2-7x+5}$ (*)

Phân tích. *Xét dạng tổng quát:* $(x+m)^3+b(x)=(1-2x).\sqrt[3]{(1-2x)(x+m)-b(x)}$ *và thấy trong căn thức có* $-3x^2$ *nên chọn* $b(x)=(x^2+nx+p)$. *Lúc này viết biểu thức lại là* $(x+m)^3+(x^2+nx+p)=(1-2x).\sqrt[3]{(1-2x)(x+m)-(x^2+nx+p)}$ *hay* $x^3+(3m+1)x^2+(3m^2+n)x+m^3+p=(1-2x)\sqrt[3]{-3x^2-(2m+n-1)x+m-p}$. *Đồng nhất hệ số được hệ:* $\begin{cases} 3m+1=7 \\ 3m^2+n=16 \\ m^3+p=5 \\ 2m+n-1=7 \\ m-p=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=4 \\ p=-3 \end{cases}\cdot$ *Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (x+2)^3+(x^2+4x-3)=(1-2x).\sqrt[3]{(1-2x)(x+2)-(x^2+4x-3)}$

Đặt $\begin{cases} u=x+2 \\ v=\sqrt[3]{(1-2x)(x+2)-(x^2+4x-3)}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3+(x^2+4x-3)=(1-2x)\cdot v \\ v^3+(x^2+4x-3)=(1-2x)\cdot u \end{cases}$

$\Rightarrow u^3-v^3=(1-2x)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+1-2x)=0$

$\Leftrightarrow u=v$ hoặc $u^2+uv+v^2+1-2x=0.$

- Với $u=v$, suy ra: $\sqrt[3]{-3x^2-7x+5}=x+2 \Leftrightarrow x^3+9x^2+19x+3=0$

  $\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-3\pm 2\sqrt{2}.$
- Với $u^2+uv+v^2+1-2x=0 \Leftrightarrow \left(v+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3}{4}u^2+1-2x=0$

  $\Leftrightarrow \left(v+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3u^2+4-8x}{4}=0 \Leftrightarrow \left(v+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3x^2+4x+16}{4}=0$: vô nghiệm do ta luôn có $3x^2+4x+16>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=-3,\ x=-3\pm 2\sqrt{2}.$

Lưu ý. Đối với dạng căn thức bậc 3 $(n=3)$ thì ta chỉ có 1 trường hợp $u=v$.

Ví dụ 144. Giải phương trình: $8x^2-13x+7=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\sqrt[3]{3x^2-2}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – THPT Chuyên Hùng Vương – Bình Dương

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0$.

$$(*)\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+7x=(x+1).\sqrt[3]{3x^2-2}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3-(x^2-x-1)=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}.$$

Đặt $\begin{cases}u=2x-1\\ v=\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^3-(x^2-x-1)=(x+1)\cdot v\\ v^3-(x^2-x-1)=(x+1)\cdot u\end{cases}$

$$\Rightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ \left(v+\dfrac{u}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}u^2+x+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x^3-15x^2+6x+1=0\\ \left(v+\dfrac{u}{2}\right)^2+\dfrac{3(2x-1)^2+4x+4}{4}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \vee\ x=-\dfrac{1}{8}\\ \left(v+\dfrac{u}{2}\right)^2+\dfrac{12x^2-8x+7}{4}=0:VN_o\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=1,\ x=-\dfrac{1}{8}\cdot$

Ví dụ 145. Giải phương trình: $8x^3+10x-17=8\sqrt[3]{30x-24x^2-7}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – THPT Chuyên Tiền Giang – Tiền Giang

Phân tích. *Xét dạng tổng quát:* $(2x+m)^3+b(x)=8\sqrt[3]{8.(2x+m)-b(x)}$. *Do biểu thức trong căn thức là bậc hai dạng:* $-24x^2+30x-7$ *và so sánh với* $8.(2x+m)-b(x)$ *nên chọn* $b(x)=24x^2-14x+n$. *Vấn đề còn lại là chọn* $m,\ n$ *thì bài toán giải quyết. So sánh các biểu thức ngoài căn thức, các biểu thức trong căn thức với nhau về hệ số từng bậc ta được hệ:* $m=-2,\ n=-9$ *và có lời giải như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow (2x-2)^3+24x^2-14x-9=8.\sqrt[3]{8(2x-2)-(24x^2-14x-9)}$$

Đặt $\begin{cases}u=(2x-2)\\ v=\sqrt[3]{8(2x-2)-(24x^2-14x-9)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^3+24x^2-14x-9=8v\\ v^3+24x^2-14x-9=8u\end{cases}$

$$\Rightarrow u^3-v^3=8(u-v)\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+8)=0\Leftrightarrow u=v.$$

Suy ra: $\sqrt[3]{30x-24x^2-7}=2x-2\Leftrightarrow 8x^3-6x=1\Leftrightarrow 4x^3-3x=\dfrac{1}{2}$ (i)

Xét $|x|\le 1$ và đặt $x=\cos t,\ \left(t\in[0;\pi]\right)$ thì $(i)\Leftrightarrow 4\cos^3 t-3\cos t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 3t=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}\cdot$ Do $\begin{cases} t \in [0;\pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow t = \left\{\dfrac{\pi}{9};\ \dfrac{5\pi}{9};\ \dfrac{7\pi}{9}\right\}.$

Suy ra: $x = \cos\dfrac{\pi}{9} \vee x = \cos\dfrac{5\pi}{9} \vee x = \cos\dfrac{7\pi}{9}$: là các nghiệm nghiệm cần tìm do phương trình bậc ba (i) có tối đa ba nghiệm.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm là $x = \cos\dfrac{\pi}{9},\ x = \cos\dfrac{5\pi}{9},\ x = \cos\dfrac{7\pi}{9}\cdot$

Ví dụ 146. Giải phương trình: $9x^2 + 11x + 6 = (x^2 - x + 3)\sqrt{3x^3 - x^2 + 8x + 4}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $3x^3 - x^2 + 8x + 4 \ge 0.$

$(*) \Leftrightarrow (3x+2)^2 + (2-x) = (x^2 - x + 3)\sqrt{(x^2 - x + 3)(3x+2) - (2-x)}.$

Đặt $\begin{cases} u = 3x + 2 \\ v = \sqrt{(x^2 - x + 3)(3x+2) - (2-x)} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + (2-x) = (x^2 - x + 3)\cdot v \\ v^2 + (2-x) = (x^2 - x + 3)\cdot u \end{cases}$

$\Rightarrow u^2 - v^2 = (x^2 - x + 3)(v - u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v + x^2 - x + 3 = 0 \end{array}\right.$.

- Với $u = v \Rightarrow \sqrt{3x^3 - x^2 + 8x + 4} = 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \ge 0 \\ 3x^3 - 10x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{3} \end{array}\right.$.
- Với $u + v + x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{3x^3 - x^2 + 8x + 4} + (x+1)^2 = -4$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 3 nghiệm là $x = 0,\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{3}\cdot$

Ví dụ 147. Giải phương trình: $x^4 - 6x - 1 = 2(x+4)\sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $2x^3 + 8x^2 + 6x + 1 \ge 0.$

$(*) \Leftrightarrow (x^2)^2 - (6x+1) = (2x+8)\sqrt{(2x+8)x^2 + (6x+1)}.$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \ge 0 \\ v = \sqrt{(2x+8)x^2 + (6x+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - (6x+1) = (2x+8)\cdot v \\ v^2 - (6x+1) = (2x+8)\cdot u \end{cases}$

$\Rightarrow u^2 - v^2 = (2x+8)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+2x+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v + 2x + 8 = 0 \end{array}\right.$.

- Với $u = v$, suy ra: $\sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1} = x^2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 6x - 1 = 0$ (i)

  $\Leftrightarrow (x^2 - 4x - 1)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2 \pm \sqrt{5}.$
- Với $u + v + 2x + 8 = 0$, suy ra: $\sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1} + (x+1)^2 = -7$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = -1,\ x = 2 \pm \sqrt{5}.$

Nhận xét. *Trong cách giải phương trình bậc bốn* (i), *tôi đã sử dụng chức năng table của casio để tìm nhân tử* x^2-4x-1 *và dựa vào nhân tử này đưa về tích. Nếu không như thế, ta có thể biến đổi:* $x^4-2x^3+x^2=9x^2+6x+1 \Leftrightarrow (x^2-x)^2=(3x+1)^2$ *cũng đưa được về tích* $(x^2-4x-1)(x^2+2x+1)=0$ *(giải phương trình bậc cao – bài 1).*

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 7

BT 254. Giải phương trình: $x^2+3x=(3-x)\sqrt{-x^2+x+4}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 255. Giải phương trình: $x^2-8x+26=(x+1)\sqrt{x^2-6x-6}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 256. Giải phương trình: $x^2+x+6=(2x+3)\sqrt{2x^2+10x+4}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 257. Giải phương trình: $4x^2+9x+1=(4x-1)\sqrt{8x^2-3x-1}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 258. Giải phương trình: $4x^2+19x+6=x\sqrt{2x^2-4x+3}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 259. Giải phương trình: $4x^2+23x+23=(x+2)\sqrt{2x^2+6x+12}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 260. Giải phương trình: $16x^2-11x+1=(x+4)\sqrt{4x^2+18x-4}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 261. Giải phương trình: $2x^2+2x-3=(2x+3)\sqrt{x^2+5x+7}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 262. Giải phương trình: $x^2+4x+2=(5x+3)\sqrt{5x^2+6x+2}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 263. Giải phương trình: $4x+5+\dfrac{3}{x+1}=\sqrt{2x^2+8x+4}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 264. Giải phương trình: $5x+3=x\sqrt{2x^2+x+1}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 265. Giải phương trình: $9x+25=(x-1)\sqrt{2x^2+5x-5}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 266. Giải phương trình: $\dfrac{30}{\sqrt{2x^2+7x-9}-9}=x+1.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 267. Giải phương trình: $x+10=(x+3)\sqrt{2x^2+5x-7}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 268. Giải phương trình: $x^3-2x^2+2x-3=(1-2x).\sqrt[3]{3x^2+5}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 269. Giải phương trình: $8x^3+14x^2+9x+2=(4-2x).\sqrt[3]{-6x^2+3x+3}.$

BT 270. Giải phương trình: $x^3-5x^2+4x-5=(1-2x).\sqrt[3]{6x^2-2x+7}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 271. Giải phương trình: $x^2-x-3=(x-1)^2\sqrt{x^3+2x+4}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 272. Giải phương trình: $\dfrac{-6x^2-15x+12}{x^2-5x}=\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 273. Giải phương trình: $\dfrac{2x^4+x^3+9x^2+7x+4}{x^2+x+3}=3\sqrt{x^3+x^2+x}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 274. Giải phương trình: $\dfrac{2x^3+3x^2+2x+5}{x+3}=\sqrt{x^4+x^3+4x^2+4x-1}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

BT 275. Giải phương trình: $-2x^2+x+1=(x^4-2x+1)\sqrt{x^5+x^2-1}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

8. Dạng 8. $(ax+b)^n = p.\sqrt[n]{cx+d} + q.x + r$ với $n \in \{2;3\}\cdot$

Phương pháp giải:

Đặt $ay+b=\sqrt[n]{cx+d}$ nếu tích số $p.c>0.$

Đặt $-(ay+b)=\sqrt[n]{cx+d}$ nếu tích số $p.c<0.$

Khi đó ta sẽ đưa về được hệ đối xứng loại II hoặc gần đối xứng loại II.

Lưu ý. Trong một số trường hợp, ta có thể tiếp cận phép đặt ẩn phụ bằng công cụ đạo hàm hoặc giải được bằng phương pháp hàm số.

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 148. Giải phương trình: $3x^2+6x-3=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}$ (*)

HSG Toán 10 – Huyện Hóc Môn – Tp. Hồ Chí Minh ngày 13/04/2013

Phân tích. *Biến đổi* $(*) \Leftrightarrow 3(x+1)^2 = 1.\sqrt{\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}}+6$ *và có* $p.c = 1.\dfrac{1}{3}>0$ *nên sẽ đặt ẩn phụ* $y+1=\sqrt{\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}}$, *kết hợp với đề bài để đưa về hệ đối xứng loại II.*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -7.$

Đặt $y+1=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}} \ge 0,$ được hệ: $\begin{cases}3(y+1)^2 = x+7\\ 3x^2+6x-3=y+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y^2+6y-x-4=0\\ 3x^2+6x-y-4=0\end{cases}$

$$\Rightarrow 3(y^2-x^2)+7(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(3y+3x+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x\\ y=-\dfrac{7}{3}-x\end{array}\right.\cdot$$

- Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ 3x^2+5x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{73}-5}{6}\cdot$
- Với $y=-\dfrac{7}{3}-x,$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}=-\dfrac{4}{3}-x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -\dfrac{4}{3}\\ 9x^2+21x-5=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-7-\sqrt{69}}{6}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{73}-5}{6},\ x=\dfrac{-7-\sqrt{69}}{6}\cdot$

Bình luận. *Với* $n=2,$ *chẳng hạn:* $ax^2+bx+c=d.\sqrt{mx+n},$ *trong nhiều trường hợp ta có thể tiếp cận bằng công cụ đạo hàm như sau:* $f(x)=ax^2+bx+c$ *có đạo hàm cấp I là* $f'(x)=2ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{2a}\cdot$ *Khi đó ta sẽ đặt* $y-\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\sqrt{mx+n}$ *khi* $-\dfrac{b}{2a}$ *là số nguyên và đặt* $2ay+b=\sqrt{mx+n}$ *nếu* $-\dfrac{b}{2a}$ *có dạng phân số. Cụ thể trong bài toán*

trên, xét $f(x)=3x^2+6x-3\Rightarrow f'(x)=6x+6=0\Leftrightarrow x=-1$ *nên sẽ tìm ra được phép đặt ẩn phụ là* $y+1=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}\cdot$ *Còn đối với* $n=3,$ *ta sẽ lấy đến đạo hàm cấp II.*

Ví dụ 149. Giải phương trình: $4x^2+\sqrt{3x+1}+5=13x$ $\quad(*)$

Phân tích. *Biến đổi* $(*)\Leftrightarrow(2x-3)^2=-\sqrt{3x+1}+(x+4)$ *có* $p.c=-1.3<0$ *nên sẽ đặt* $-(2y-3)=\sqrt{3x+1}$ *hay* $3-2y=\sqrt{3x+1}$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{3}\cdot$ Đặt $3-2y=\sqrt{3x+1}\ge0,\ \left(y\le\dfrac{3}{2}\right)\cdot$

Suy ra hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2+3-2y+5=13x\\(3-2y)^2=3x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-2y-13x+8=0\\4y^2-12y-3x+8=0\end{cases}$

$$\stackrel{-}{\Rightarrow}4(x^2-y^2)+10(y-x)=0\Leftrightarrow(x-y)(2x+2y-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\2y=5-2x\end{array}\right.\cdot$$

- Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{3x+1}=3-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{3}{2}\\4x^2-15x+8=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}\cdot$
- Với $2y=5-2x,$ suy ra: $\sqrt{3x+1}=2x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\4x^2-11x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8},\ x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}\cdot$

Ví dụ 150. Giải phương trình: $8x^3-36x^2+53x=\sqrt[3]{3x-5}+25$ $\quad(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Nguyễn Thượng Hiền – TP. HCM

Phân tích. *Biến đổi* $(*)\Leftrightarrow(2x-3)^3=\sqrt[3]{3x-5}+x-2$ *có* $p.c=1.3>0$ *nên sẽ tìm ra phép đặt ẩn phụ là* $2y-3=\sqrt[3]{3x-5}.$ *Hơn nữa, nếu xét* $f(x)=8x^3-36x^2+53x-25$ *có* $f'(x)=24x^2-72x\Rightarrow f''(x)=48x-72=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ *cũng tìm ra phép đặt ẩn phụ là* $2y-3=\sqrt[3]{3x-5},$ *từ đó có lời giải 1 như sau:*

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lời giải 1. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình gần đối xứng loại II.

$(*)\Leftrightarrow(2x-3)^3=\sqrt[3]{3x-5}+x-2.$ Đặt $2y-3=\sqrt[3]{3x-5}\Rightarrow\begin{cases}(2y-3)^3=3x-5\\(2x-3)^3=2y+x-5\end{cases}$

$$\stackrel{-}{\Rightarrow}(2y-3)^3-(2x-3)^3=2(x-y)$$

$$\Leftrightarrow(2y-2x)\left[(2y-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2x-3)\right]+(2y-2x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(y-x)\cdot\left[\left(2y-3+\frac{2x-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(2x-3)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow y=x.$$

Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt[3]{3x-5}=2x-3 \Leftrightarrow (2x-3)^3=3x-5 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=2,\ x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}\cdot$

Lời giải 2. Đồng nhất đưa về dạng $m.u^3+n.u=m.v^3+n.v.$

$(*) \Leftrightarrow (2x-3)^3+(2x-3)=(\sqrt[3]{3x-5})^3+\sqrt[3]{3x-5}$ $\qquad (i)$

Đặt $u=2x-3,\ v=\sqrt[3]{3x-5}$ thì $(i) \Leftrightarrow u^3+u=v^3+v \Leftrightarrow (u^3-v^3)+(u-v)=0$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+1)=0 \Leftrightarrow (u-v)\left[\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2+1\right]=0 \Leftrightarrow u=v$$

Suy ra: $\sqrt[3]{3x-5}=2x-3 \Leftrightarrow (2x-3)^3=3x-5 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}\cdot$

Nhận xét. *Bài toán có dạng tổng quát:* $ax^3+bx^2+cx+d=p.\sqrt[3]{qx+r}$, *ngoài cách giải 1, ta có thể sử dụng đồng nhất thức để đưa về dạng* $m.u^3+n.u=m.v^3+n.v.$ *Khi đó có thể giải quyết bằng cách đặt hai ẩn phụ hoặc sử dụng phương pháp hàm số. Cụ thể ở cách giải 2 trên, ta luôn xét:* $(2x+b)^3+n.(2x+b)=(\sqrt[3]{3x-5})^3+n.\sqrt[3]{3x-5}$ *và so sánh với đề thấy* $n=1$. *Công việc còn lại là đồng nhất thức tìm b được* $b=-3$.

Ví dụ 151. Giải phương trình: $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$ $\qquad (*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2010 – Trung Học Thực Hành ĐHSP – Tp. HCM

Phân tích. *Có* $f(x)=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+\frac{4}{3} \Rightarrow f''(x)=6x-4=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\cdot$ *Do đó tìm ra được phép đặt ẩn phu là* $3y-2=\sqrt[3]{81x-8}.$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $3y-2=\sqrt[3]{81x-8}$, suy ra: $\begin{cases}3y-2=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2\\(3y-2)^3=81x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x\\3x=y^3-2y^2+\frac{4}{3}y\end{cases}$

$$\Rightarrow 3(y-x)=(x^3-y^3)-2(x^2-y^2)+\frac{4}{3}(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left[3(y^2+xy+x^2)-6(y+x)+13\right]=0.$$

- Với $y=x,$ suy ra $3x-2=\sqrt[3]{81x-8} \Leftrightarrow x^3-2x^2-\frac{5}{3}x=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3}\cdot$

- Với $3(y^2+xy+x^2)-6(y+x)+13=0 \Leftrightarrow 3x^2+3(y-2)x+3y^2-6y+13=0 \quad (i)$

  Xem đây là phương trình bậc hai với ẩn là x và y là tham số thì có biệt số:

  $\Delta_x = 9(y-2)^2-12(3y^2-6y+12) = -27y^2+36y-120<0,\ \forall y \in \mathbb{R}$.

  Do đó phương trình (i) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=0,\ x=\dfrac{3\pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 152. Giải phương trình: $5x^2-13x+4+\sqrt{x^4+3x^3}=0 \qquad (*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Trần Hưng Đạo – Bình Thuận

Phân tích. *Biểu thức trong căn phân tích được thành tích số:* $x^4+3x^3=x^2(x^2+3x)$, *hướng suy nghĩ đầu tiên là đưa về dạng đẳng cấp bằng cách đồng nhất thức biểu thức ngoài căn theo biểu thức tích, tức tìm* $5x^2-13x+4=a.x^2+b.(x^2+3x)$, *nhưng sẽ không tồn tại hai số a, b. Casio cũng chịu thua với hình thức này !!. Nhưng để ý biểu thức trong căn thức là bậc 4, ta hoàn toàn có thể đặt ẩn phụ* $x=\dfrac{1}{t}$ *để biến phương trình về dạng* $5\cdot\dfrac{1}{t^2}-13\cdot\dfrac{1}{t}+4+\sqrt{\dfrac{1}{t^4}+3\cdot\dfrac{1}{t^3}}=0 \Leftrightarrow 4t^2-13t+5+\sqrt{3t+1}=0.$

Lời giải. Điều kiện: $x^4+3x^3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0.$

Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chỉ xét $x>0,$ và đặt $x=\dfrac{1}{t}>0.$

$$(*) \Leftrightarrow 5\cdot\frac{1}{t^2}-13\cdot\frac{1}{t}+4+\sqrt{\frac{1}{t^4}+3\cdot\frac{1}{t^3}}=0 \Leftrightarrow 4t^2-13t+5+\sqrt{3t+1}=0$$

Đặt $2y+3=\sqrt{1+3t},\ \left(y\ge -\dfrac{3}{2}\right)$, suy ra: $\begin{cases}(2y+3)^2=1+3t\\ 4t^2-13t+5+2y+3=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4y^2+12y-3t+8=0 \quad (i)\\ 4t^2-13t+2y+8=0\end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} (y+t)\left[2(y-t)+5\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-t\\ 2y=2t-5\end{array}\right.$$

- Với $y=-t,$ thì $(1) \Leftrightarrow 4t^2-15t+8=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{15+\sqrt{97}}{8}$ hoặc $t=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$.

  Suy ra: $y=-\dfrac{15+\sqrt{97}}{8}$ (loại do $y\ge -\dfrac{3}{2}$) hoặc $y=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$ (nhận).

  Do đó: $x=\dfrac{1}{t}=\dfrac{15+\sqrt{97}}{16}$.

- Với $2y=2t-5,$ thì $(1) \Leftrightarrow 4t^2-11t+3=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}$ hoặc $t=\dfrac{11-\sqrt{73}}{8}$.

  Suy ra: $y=\dfrac{\sqrt{73}-9}{8}$ (nhận) hoặc $y=-\dfrac{9+\sqrt{73}}{8}$ (loại).

Do đó: $x = \frac{1}{t} = \frac{11-\sqrt{73}}{6}$.

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \frac{15+\sqrt{97}}{16}$, $x = \frac{11-\sqrt{73}}{6}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 8

BT 276. Giải phương trình: $x^2 + 4x = \sqrt{x+6}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 277. Giải phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 278. Giải phương trình: $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 279. Giải phương trình: $2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 280. Giải phương trình: $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 281. Giải phương trình: $4x^2 + 4x - 3 = \sqrt{2x+5}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 282. Giải phương trình: $9x^2 - 6x - 5 = \sqrt{3x+5}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 283. Giải phương trình: $18x^2 + 6x - 29 = \sqrt{12x+61}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 284. Giải phương trình: $9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}$. $(x \in \mathbb{R})$

Học sinh giỏi khối không chuyên Tp. Hồ Chí Minh

BT 285. Giải phương trình: $x^2 - x = 2004.(\sqrt{1+16032x} + 1)$. $(x \in \mathbb{R})$

Học sinh giỏi tỉnh Bắc Giang

BT 286. Giải phương trình: $x^2 - x - 1000.\sqrt{1+8000x} = 1000$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 287. Giải phương trình: $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1} - 9x^2 + 26x - \frac{37}{3} = 0$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 288. Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 289. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-2} = 8x^3 - 60x^2 + 151x - 128$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 290. Giải phương trình: $\frac{\sqrt[3]{x-9}}{3} = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - 7$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 291. Giải phương trình: $27x^3 - 23x + 1 = \sqrt[3]{26x-1}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 292. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+4} = x^3 + 3x^2 + x - 2$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 293. Giải phương trình: $1 - 6x - 2x^2 = \sqrt{8x^4 + x^3}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 294. Giải phương trình: $3x^2 + 2x - 1 + \sqrt{3x^4 + x^3} = 0$. $(x \in \mathbb{R})$

9. <u>Dạng 9</u>. $\boxed{\sqrt{x + 2a\sqrt{x-b} + a^2 - b} + \sqrt{x - 2a\sqrt{x-b} + a^2 - b} = cx + d}$, $(a > 0)$ (i)

Phương pháp giải:

Đặt $t = \sqrt{x-b} \ge 0$, suy ra: $x = t^2 + b$. Khi đó:

$(i) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 2at + a^2} + \sqrt{x^2 - 2at + a^2} = c.(t^2 + b) + d$

$\Leftrightarrow \sqrt{(t+a)^2} + \sqrt{(t-a)^2} = c.(t^2 + b) + d \Leftrightarrow |t + a| + |t - a| = c.(t^2 + b) + d$

$\Leftrightarrow t + a + |t - a| = c.(t^2 + b) + d,\ (do: t,\ a \ge 0) \Leftrightarrow |t - a| = c.t^2 - t + bc + d - a.$

Sử dụng công thức: $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = \pm B \end{cases}$ hoặc phá trị tuyệt đối dựa vào định nghĩa $|A| = \begin{cases} A\ khi\ A \ge 0 \\ -A\ khi\ A < 0 \end{cases}$ để giải.

Lưu ý. Công cụ chủ yếu là sử dụng hằng đẳng thức và định nghĩa $|A|$.

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

<u>Ví dụ 153.</u> Giải phương trình: $2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 4 \quad (*)$

Điều kiện: $x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$. Suy ra: $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} > 0,\ \forall x \ge -1.$

<u>Lời giải 1</u>. Đặt $t = \sqrt{x+1} \ge 0 \Rightarrow t^2 = x + 1$. Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + 2t + 1} = t + 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(t+1)^2} = t + 4 \Leftrightarrow 2|t + 1| = t + 4$

$\Leftrightarrow 2(t+1) = t + 4,\ (do: t + 1 > 0) \Leftrightarrow t = 2,$ suy ra: $\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

<u>Lời giải 2</u>. Xem đây là dạng $\sqrt{A} = \sqrt{B} + \sqrt{C}$ và lũy thừa.

$(*) \Leftrightarrow (2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}})^2 = (\sqrt{x+1} + 4)^2$

$\Leftrightarrow 4(x + 2 + 2\sqrt{x+1}) = x + 17 + 8\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$

<u>Lời giải 3</u>. Sử dụng hằng đẳng thức, kết hợp định nghĩa trị tuyệt đối.

$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{(\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1} + 1} - \sqrt{x+1} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(\sqrt{x+1} + 1)^2} - \sqrt{x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\left|\sqrt{x+1} + 1\right| - \sqrt{x+1} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} + 2 - \sqrt{x+1} - 4 = 0,\ (do: \sqrt{x+1} + 1 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$

<u>Ví dụ 154.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} = 1 \quad (*)$

Đại học Sư Phạm Vinh

<u>Lời giải</u>. Điều kiện: $x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$. Do đó: $x - 1 \pm 2\sqrt{x-2} \ge 0.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2})^2 + 2\sqrt{x-2} + 1} - \sqrt{(\sqrt{x-2})^2 - 2\sqrt{x-2} + 1} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-2} - 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-2} + 1\right| - \left|\sqrt{x-2} - 1\right| = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 1 - \left|\sqrt{x-2} - 1\right| = 1,\ (do: \sqrt{x-2} + 1 > 0, \forall x \ge 2)$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-2}-1\right| = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}-1=\sqrt{x-2}\\ \sqrt{x-2}-1=-\sqrt{x-2}\end{array}\right. \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\frac{9}{4}\cdot$

Lưu ý. Bạn đọc có thể giải theo 2 cách khác như thí dụ trên.

Ví dụ 155. Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ (*)

Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông – Tp. Hồ Chí Minh

Lời giải. Điều kiện: $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1.$ Lúc này $x\pm 2\sqrt{x-1}\ge 0.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}+1}-\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right|-\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1-\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right|=\sqrt{x-1}-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 2.$$

Kết luận: So với điều kiện, khoảng nghiệm của phương trình là $x\in\left[2;+\infty\right).$

Bình luận. *Ở bài toán trên, nghiệm của phương trình không là một giá trị cụ thể mà là một khoảng đoạn nghiệm. Đối với trường hợp này, ta sử dụng công thức trị tuyệt đối $|A|=A$ khi $A\ge 0.$ Còn $|A|=-A$ khi $A\le 0,$ ta cùng tìm hiểu thí dụ sau:*

Ví dụ 156. Giải phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$ (*)

Phân tích. *So với dạng tổng quát, bài toán thiếu số 2 trong căn thức nhỏ. Do đó, ta sẽ nghĩ đến việc nhân 2 vế cho $\sqrt{2},$ nhưng vế phải là $\sqrt{14}$ và để đơn giản, ta sẽ nhân 2 vế cho $\sqrt{14}$ để được $\sqrt{14x+14\sqrt{14x-49}}+\sqrt{14x-14\sqrt{14x-49}}=14,$ và có lời giải.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{7}{2}\cdot$ Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{14x-49})^2+14\sqrt{14x-49}+7^2}+\sqrt{(\sqrt{14x-49})^2-14\sqrt{14x-49}+7^2}=14$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{14x-49}+7)^2}+\sqrt{(\sqrt{14x-49}-7)^2}=14$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{14x-49}+7\right|+\left|\sqrt{14x-49}-7\right|=14 \Leftrightarrow \left|\sqrt{14x-49}-7\right|=-(\sqrt{14x-49}-7)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{14x-49}-7\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{14x-49}\le 7 \Leftrightarrow 14x-49\le 49 \Leftrightarrow x\le 7.$$

Kết luận: So với điều kiện, bỏ nghiệm của phương trình là đoạn $x\in\left[\frac{7}{2};7\right]\cdot$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 9

BT 295. Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\frac{x+3}{2}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 296. Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 297. Giải phương trình: $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 298. Giải phương trình: $\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}=14.$

BT 299. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}=x+1.$

10. Dạng 10. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.
Khi đặt ẩn phụ t thì biến x vẫn tồn tại và ta xem x là tham số. Thông thường thì đó là phương trình bậc hai theo t. Ta sẽ giải bằng cách lập Δ nếu Δ là số chính phương, còn không thì ta sẽ phân tích chọn hệ số cho m của $m.t^2$ thích hợp để Δ là số chính phương. Khi đặt ẩn phụ không hoàn toàn thì việc tìm điều kiện chưa chặt, nên thế lại phương trình để kiểm tra.

Các ví dụ có Δ là số chính phương

Ta thường bắt gặp các dạng cơ bản sau: $\left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=(dx+e).\sqrt{mx^2+nx+p} \\ ax^3+bx+c=(dx+e).\sqrt{mx^3+nx+p} \end{array}\right.$.

Ví dụ 157. Giải phương trình: $2x^2+3x+7=(x+5)\sqrt{2x^2+1}$ $(*)$

Học sinh giỏi tỉnh Long An năm 2015

Điều kiện: $x+5\ge 0$?! $\Leftrightarrow x\ge -5.$

Lời giải 1. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Đặt $t=\sqrt{2x^2+1}\ge 1,$ suy ra: $t^2=2x^2+1\Leftrightarrow 2x^2=t^2-1.$ Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow t^2-(x+5).t+3x+6=0$ và xem đây là phương trình bậc hai với ẩn t có biệt số $\Delta_t=x^2+10x+25-12x-24=x^2-2x+1=(x-1)^2.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x+5+x-1}{2}=x+2 \\ t=\dfrac{x+5-x+1}{2}=3 \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+1}=x+2 \\ \sqrt{2x^2+1}=3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2-4x-3=0 \\ 2x^2=8 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{7}$ hoặc $x=\pm 2.$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$, nghiệm là $x=2\pm\sqrt{7},\ x=\pm 2.$

Lời giải 2. Nhân liên hợp khi sử dụng casio tìm được nhân tử $x^2-4x-3.$

$(*)\Leftrightarrow x^2-4x-3=(x+5)\left[\sqrt{2x^2+1}-(x+2)\right]\Leftrightarrow x^2-4x-3=\dfrac{(x+5)(x^2-4x-3)}{\sqrt{2x^2+1}+x+2}$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x-3)\left(1-\frac{x+5}{\sqrt{2x^2+1}+x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-3=0 \\ \sqrt{2x^2+1}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pm\sqrt{7} \\ x=\pm 2 \end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$, nghiệm là $x=2\pm\sqrt{7}$, $x=\pm 2.$

Bình luận. *Công cụ liên hợp tỏ ra khá hiệu quả khi giải quyết phương trình vô tỷ. Vấn đề đặt ra là học sinh cần thành thạo các kỹ năng liên hợp, kỹ năng xác định nghiệm, xác định lượng nhân tử với sự hỗ trợ của máy tính bỏ túi và sự tách ghép tinh tế dựa vào việc xác định ấy sẽ tìm được lời giải nhanh chóng và đẹp mắt.*

Ví dụ 158. Giải phương trình: $x^2-4x+(x-3)\sqrt{x^2-x-1}-1=0$ $(*)$

Điều kiện: $x^2-x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x\ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải 1. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Đặt $t=\sqrt{x^2-x-1}$, suy ra: $t^2=x^2-x-1 \Leftrightarrow x^2=t^2+x+1$. Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow t^2+x+1-4x+(x-3)t-1=0 \Leftrightarrow t^2+(x-3).t-3x=0.$

$\Delta_t=(x-3)^2+12x=x^2+6x+9=(x+3)^2.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} t=\frac{3-x+x+3}{2}=3 \\ t=\frac{3-x-x-3}{2}=-x \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-x-1}=3 \\ \sqrt{x^2-x-1}=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2} \\ x=-1 \end{array}\right..$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$, nghiệm là $x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}$, $x=-1.$

Lời giải 2. Nhân liên hợp khi sử dụng casio tìm được nhân tử $x^2-x-10.$

$(*) \Leftrightarrow (x^2-x-10)+(x-3)(\sqrt{x^2-x-1}-3)=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-10)+\frac{(x-3)(x^2-x-10)}{\sqrt{x^2-x-1}+3}=0 \Leftrightarrow (x^2-x-10)\left(\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x-1}+3}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-10=0 \\ \sqrt{x^2-x-1}=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2} \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$, nghiệm là $x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}$, $x=-1.$

Ví dụ 159. Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$ $(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Lê Quí Đôn – Ninh Thuận

Lời giải. Điều kiện: $x^3+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1.$

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\ge 0$, suy ra: $t^2=x^3+1 \Rightarrow x^3=t^2-1$. Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow (4x-1)t=2(t^2-1)+2x+1 \Leftrightarrow 2t^2-(4x-1).t+2x-1=0$

$\Delta_t = (4x-1)^2 - 8(2x-1) = 16x^2 - 24x + 9 = (4x-3)^2.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4x-1+4x-3}{4} = 2x-1 \\ t = \dfrac{4x-1-4x+3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$, suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^3+1} = 2x-1 \\ \sqrt{x^3+1} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 4x^2 - 4x = 0 \\ x^3 = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$, nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}\cdot$

Các ví dụ có Δ không là số chính phương

Ví dụ 160. Giải phương trình: $5x^2 + \dfrac{3}{2}x - 3 = (1+3x)\sqrt{2x^2-1}$ $\qquad (*)$

Phân tích. *Biến đổi:* $(*) \Leftrightarrow (2x^2-1) - (1+3x)\sqrt{2x^2-1} + 3x^2 + \dfrac{3}{2}x - 2 = 0$ *và đặt ẩn phụ:* $t = \sqrt{2x^2-1} \geq 0,$ *thì phương trình* $\Leftrightarrow t^2 - (1+3x)t + 3x^2 + \dfrac{3}{2}x - 2 = 0$ *có biệt số* $\Delta = (1+3x)^2 - 12x^2 - 6x + 8 = 9 - 3x^2$ *không là số chính phương. Do đó ta cần điều chỉnh hệ số m của* $m.t^2$, *tức* $PT \Leftrightarrow mt^2 + t^2 - mt^2 - (1+3x).t + 3x^2 + \dfrac{3}{2}x - 2 = 0$ *và có* $t^2 = 2x^2 - 1$ *thì* $PT \Leftrightarrow mt^2 + 2x^2 - 1 - m(2x^2-1) - (1+3x)t + 3x^2 + \dfrac{3}{2}x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow mt^2 - (1+3x)t + (5-m)x^2 + \dfrac{3x}{2} - 3 = 0$ *có* $\Delta_t = (1+3x)^2 - 4m((5-m)x^2 + \dfrac{3x}{2} - 3)$ *hay* $\Delta_t = (8m^2 - 20m + 9)x^2 + (6-6m)x + (12m - 4m^2 + 1)$ *và để* Δ_t *có dạng chính phương thì phương trình* $\Delta_t = 0$ *phải có nghiệm kép tức* $\Delta_x = b^2 - 4ac = 0$ *hay cần giải phương trình:* $(6-6m)^2 - 4(8m^2 - 20m + 9)(12m - 4m^2 + 1) = 0$ *để tìm m. Do hệ số m này thường là đẹp và* $m \neq 0,$ *nên nhét phương trình này vào casio và shift solve sẽ thu được ngay kết quả* $m = 2.$ *Từ đó có lời giải sau:*

✎ **Lời giải**. Điều kiện: $2x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 2.(2x^2-1) - (1+3x)\sqrt{2x^2-1} + x^2 + \dfrac{3}{2}x - 1 = 0 \qquad (i)$

Đặt $t = \sqrt{2x^2-1},$ suy ra: $t^2 = 2x^2 - 1.$ Khi đó:

$(i) \Leftrightarrow 2t^2 - (1+3x)\cdot t + x^2 + \dfrac{3}{2}x - 1 = 0$

$\Delta_t = (1+3x)^2 - 8x^2 - 12x + 8 = x^2 - 6x + 9 = (x+3)^2.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1+3x+x-3}{4}=x-\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{1+3x-x+3}{4}=\dfrac{1}{2}x+1 \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-1}=x-\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2x^2-1}=\dfrac{1}{2}x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{6}-1}{2} \\ x=\dfrac{2+2\sqrt{15}}{7} \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện và thế vào $(*)$, nghiệm là $x=\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$, $x=\dfrac{2+2\sqrt{15}}{7}\cdot$

Ví dụ 161. Giải phương trình: $(3-8x)\sqrt{2x^2+1}=3x^2+x+3$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $3-8x\geq 0$?!

$(*)\Leftrightarrow 3(2x^2+1)-(3-8x)\sqrt{2x^2+1}+x-3x^2=0$ (i)

Đặt $t=\sqrt{2x^2+1}$, suy ra: $t^2=2x^2+1$, thì $(i)\Leftrightarrow 3t^2-(3-8x)\cdot t+x-3x^2=0$

$\Delta_t=(3-8x)^2-12(x-3x^2)=100x^2-60x+9=(10x-3)^2.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3-8x+10x-3}{6}=\dfrac{1}{3}x \\ t=\dfrac{3-8x-10x+3}{6}=1-3x \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+1}=\dfrac{1}{3}x \\ \sqrt{2x^2+1}=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bình luận. *Trong lời giải trên, làm tương tự như ví dụ trước, ta được phương trình* $(48+4m)^2-4(8m^2-12m+64)(4m^2-12m+9)=0$ *và nhập vào máy tính bỏ túi:* $(48+4X)^2-4(8X^2-12X+64)(4X^2-12X+9)$, *bấm shift solve thì phương trình cho ta nghiệm* $X=0$ *nên ta sẽ loại* $(do: m\neq 0)$. *Để kiểm tra nghiệm còn lại của phương trình ta sửa lại cấu trúc:* $((48+4X)^2-4(8X^2-12X+64)(4X^2-12X+9)):X$ *và bấm shift solve thì phương trình cho ngay nghiệm* $X=3$ *và có lời giải như trên.*

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 10

BT 300. Giải phương trình: $10x^2-9x-8x\sqrt{2x^2-3x+1}+3=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 301. Giải phương trình: $x^2+x(3-\sqrt{x^2+2})=1+2\sqrt{x^2+2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 302. Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 303. Giải phương trình: $x^3+6x^2-2x+3-(5x-1)\sqrt{x^3+3}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 304. Giải phhuogn trình: $(x+4)\sqrt{x^3+9}=x^3+x+12.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 305. Giải phương trình: $2x+\dfrac{x-1}{x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

(IMO Shortlist)

11. <u>Dạng 11</u>. $mx+n=a\sqrt{1-x}+b\sqrt{1+x}+c\sqrt{1-x^2}$

Phương pháp giải:

Biểu diễn: $mx+n=\alpha\cdot(1-x)+\beta\cdot(1+x)\Leftrightarrow(\beta-\alpha).x+(\alpha+\beta)$ và đồng nhất hệ số được hệ: $\begin{cases}\beta-\alpha=m\\ \alpha+\beta=n\end{cases}\Rightarrow\alpha,\ \beta.$ Sau đó đặt $u=\sqrt{1-x}\geq 0,\ v=\sqrt{1+x}\geq 0,$ để đưa về phương trình hai ẩn $u,\ v$ có thể giải bằng cách đưa về tích số hoặc ẩn phụ không hoàn toàn (xem u là biến số và v là hằng số hoặc ngược lại).

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

<u>Ví dụ 160.</u> Giải phương trình: $3\sqrt{1-x^2}=4\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}+3-x$ $(*)$

<u>Lời giải</u>. Điều kiện: $-1\leq x\leq 1.$

Ta có: $3-x=\alpha\cdot(1-x)+\beta\cdot(1+x)=(\beta-\alpha)\cdot x+\alpha+\beta$ và đồng nhất hệ số được hệ phương trình $\begin{cases}\beta-\alpha=-1\\ \alpha+\beta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}\cdot$ Khi đó viết: $3-x=2(1-x)+(1+x)$ và

$$(*)\Leftrightarrow 3\sqrt{(1-x)(1+x)}=4\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}+2(1-x)+(1+x)\qquad(i)$$

Đặt $u=\sqrt{1-x}\geq 0,\ v=\sqrt{1+x}\geq 0,$ thì $(i)\Leftrightarrow 3uv=4v-4u+2u^2+v^2$

$$(i)\Leftrightarrow 3uv=4v-4u+2u^2+v^2\Leftrightarrow v^2+(4-3u)v+2u^2-4u=0$$

Xem đây là phương trình bậc hai với ẩn là u và v là hằng số thì có:

$$\Delta=(4-3u)^2-4(2u^2-4u)=u^2-8u+16=(u-4)^2.$$

Do đó: $\left[\begin{array}{l}v=\dfrac{3u-4+u-4}{2}=2u-4\\ v=\dfrac{3u-4-u+4}{2}=u\end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{1+x}=2\sqrt{1-x}-4\\ \sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0.$

<u>Kết luận</u>: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=0.$

<u>Ví dụ 161.</u> Giải phương trình: $3x+1=4\sqrt{x+1}-2\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}$ $(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Long An – Tỉnh Long An

<u>Lời giải</u>. Điều kiện: $-1\leq x\leq 1.$

Ta có: $3x+1=\alpha\cdot(1-x)+\beta\cdot(1+x)=(\beta-\alpha)\cdot x+\alpha+\beta$ và đồng nhất hệ số được hệ phương trình: $\begin{cases}\beta-\alpha=3\\ \alpha+\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}\cdot$ Khi đó viết: $3x+1=-(1-x)+2(1+x).$

$$(*)\Leftrightarrow -(1-x)+2(1+x)=4\sqrt{x+1}-2\sqrt{1-x}-\sqrt{(1-x)(1+x)}\qquad(i)$$

Đặt $u=\sqrt{1-x}\geq 0,\ v=\sqrt{1+x},$ thì $(i)\Leftrightarrow -u^2+2v^2=4v-2u-uv$

$$\Leftrightarrow u^2-(2+v)\cdot u+4v-2v^2=0$$

Xem đây là phương trình bậc hai với ẩn là u và v là hằng số.

$\Delta_u = (2+v)^2 - 4(4v - 2v^2) = 9v^2 - 12v + 4 = (3v-2)^2$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} u = \dfrac{2+v+3v-2}{2} = 2v \\ u = \dfrac{2+v-3v+2}{2} = 2-v \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x} \\ \sqrt{1-x} = 2 - \sqrt{1+x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{5} \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{3}{5}$, $x = 0$.

Ví dụ 162. Giải phương trình: $3x^2 + 1 = 4\sqrt{1+x^2} - 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^4}$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.

Bản chất của bài toán này cũng giống hai thí dụ trước khi thay x^2 bởi x.

Ta có: $3x^2 + 1 = \alpha\cdot(1-x^2) + \beta\cdot(1+x^2) = (\beta-\alpha)\cdot x^2 + \alpha + \beta$ và đồng nhất hệ số

được hệ: $\begin{cases} \beta - \alpha = 3 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$. Khi đó viết: $3x^2 = -(1-x^2) + 2(1+x^2)$ và:

$$(*) \Leftrightarrow -(1-x^2) + 2(1+x^2) = 4\sqrt{1+x^2} - 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1+x^2)} \qquad (i)$$

Đặt $u = \sqrt{1-x^2} \ge 0$, $v = \sqrt{1+x^2} \ge 0$, thì $(i) \Leftrightarrow -u^2 + 2v^2 = 4v - 2u - uv$

$\Leftrightarrow u^2 - (2+v)\cdot u + 4v - 2v^2 = 0$ có biệt số $\Delta_u = (3v-2)^2$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} u = \dfrac{2+v+3v-2}{2} = 2v \\ u = \dfrac{2+v-3v+2}{2} = 2-v \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1-x^2} = 2 - \sqrt{1+x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 11

BT 306. Giải phương trình: $x - 3 = \sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1-x^2}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 307. Giải phương trình: $x + 6 = 4\sqrt{1-x} - 5\sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 308. Giải phương trình: $(4 - \sqrt{1-x})\sqrt{1+x} = 1 + 3x + 2\sqrt{1-x}$. $(x \in \mathbb{R})$

12. Dạng 12. Đặt ba ẩn phụ dựa vào hằng đẳng thức.

Ý tưởng bài toán và phương pháp giải:

Xuất phát từ hằng đẳng thức: $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

Khi đó nếu phương trình có dạng: $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ thì ta luôn khẳng định được rằng lượng $3(a+b)(b+c)(c+a)$ trong hằng đẳng thức sẽ bằng 0. Khi đó ta chỉ cần giải phương trình tích số $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 163. Giải phương trình: $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$ $\quad(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/1999

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $a=\sqrt[3]{7x+1};\ b=-\sqrt[3]{x^2-x-8};\ c=\sqrt[3]{x^2-8x-1}.$

Từ đó được hệ: $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^3+b^3+c^3=(7x+1)-(x^2-x-8)+(x^2-8x-1)=8 \\ (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a) \end{cases}$

Suy ra: $8=8+3(a+b)(b+c)(c+a)\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7x+1}=\sqrt[3]{x^2-x-8} \\ \sqrt[3]{x^2-x-8}=\sqrt[3]{x^2-8x-1} \\ \sqrt[3]{x^2-8x-1}=-\sqrt[3]{7x+1} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\ \vee\ x=9 \\ x=1 \\ x=1\ \vee\ x=0 \end{array}\right..$$

Kết luận: Thế vào $(*)$, nghiệm cần tìm là $x=0,\ x=\pm1,\ x=9.$

Ví dụ 164. Giải: $\sqrt[3]{1945x+1975}+\sqrt[3]{60x+15}+\sqrt[3]{15-x}=\sqrt[3]{2004x+2005}$ $\quad(*)$

Học sinh giỏi tỉnh Gia Lai

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $a=\sqrt[3]{7x+1};\ b=-\sqrt[3]{x^2-x-8};\ c=\sqrt[3]{x^2-8x-1}.$

Suy ra hệ: $\begin{cases} a+b+c=\sqrt[3]{2004x+2005} \\ a^3+b^3+c^3=2004x+2005 \\ (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a) \end{cases}\Rightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{1945x+1975}=-\sqrt[3]{60x+15} \\ \sqrt[3]{60x+15}=-\sqrt[3]{15-x} \\ \sqrt[3]{15-x}=-\sqrt[3]{1945x+1975} \end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{1990}{2005},\ x=-\frac{30}{59},\ x=-\frac{1990}{1944}.$$

Kết luận: Thế vào $(*)$, nghiệm cần tìm là $x=-\dfrac{1990}{2005},\ x=-\dfrac{30}{59},\ x=-\dfrac{1990}{1944}.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 12

BT 309. Giải: $\sqrt[3]{x^2-7x+8}+\sqrt[3]{x^2-6x+7}-\sqrt[3]{2x^2-13x-12}=3.$ $\quad(x\in\mathbb{R})$

BT 310. Giải: $\sqrt[3]{8x+5}+\sqrt[3]{9x-x^2+15}+\sqrt[3]{x^2-17x+7}=3.$ $\quad(x\in\mathbb{R})$

BT 311. Giải: $\sqrt[3]{3x^2-x+2013}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2014}-\sqrt[3]{6x-2015}=\sqrt[3]{2014}.$

BT 312. Giải: $\sqrt[3]{x^2+4x+3}+\sqrt[3]{4x^2-9x-3}=\sqrt[3]{3x^2-2x+2}+\sqrt[3]{2x^2-3x-2}.$

BT 313. Giải: $x^2-6x+29+2\sqrt{3x^2+10x+3}=(10-2x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}).$

BT 314. Giải: $\frac{x^2}{x-1}+\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$. $(x\in\mathbb{R})$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 –Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm – Vĩnh Long

13. Dạng 13. $x=\sqrt{m-x}.\sqrt{n-x}+\sqrt{n-x}.\sqrt{p-x}+\sqrt{p-x}.\sqrt{m-x}$

Trong đó m, n, p lần lượt là các số tự nhiên liên tiếp theo thứ tự đó.

Phương pháp giải:

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{m-x}\ge 0\\ b=\sqrt{n-x}\ge 0\\ c=\sqrt{p-x}\ge 0\end{cases}$, bình phương và kết hợp với đề bài ta được hệ mới là:

$$\begin{cases}x=m-a^2=ab+bc+ca\\ x=n-b^2=ab+bc+ca\\ x=p-c^2=ab+bc+ca\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab+bc+ca=m\\ b^2+ab+bc+ca=n\\ c^2+ab+bc+ca=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)(a+c)=m & (1)\\ (a+b)(b+c)=n & (2)\\ (b+c)(a+c)=p & (3)\end{cases}$$

$$(1),(2),(3)\Rightarrow\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2=mnp\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=\sqrt{mnp}\quad(4)$$

Lấy $\frac{(4)}{(1)},\frac{(4)}{(2)},\frac{(4)}{(3)}\Rightarrow\begin{cases}b+c=\frac{\sqrt{mnp}}{m}\\ c+a=\frac{\sqrt{mnp}}{n}\\ a+b=\frac{\sqrt{mnp}}{p}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-a=\frac{\sqrt{mnp}}{m}-\frac{\sqrt{mnp}}{n}\\ a+b=\frac{\sqrt{mnp}}{p}\end{cases}\Rightarrow a,\ b,\ c\Rightarrow x.$

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 165. Giải: $x=\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{3-x}$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Quảng Bình năm 2014

Lời giải. Điều kiện: $x\le 3$.

Đặt $a=\sqrt{3-x}\ge 0,\ b=\sqrt{4-x}\ge 0,\ c=\sqrt{5-x}\ge 0$.

Suy ra: $\begin{cases}x=3-a^2=ab+bc+ca\\ x=4-b^2=ab+bc+ca\\ x=5-c^2=ab+bc+ca\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab+bc+ca=3\\ b^2+ab+bc+ca=4\\ c^2+ab+bc+ca=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)(a+c)=3 & (1)\\ (a+b)(b+c)=4 & (2)\\ (b+c)(a+c)=5 & (3)\end{cases}$

Lấy: $(1).(2).(3)\Rightarrow\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2=60\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=2\sqrt{15}$ (4)

Lập: $\frac{(4)}{(1)},\frac{(4)}{(2)},\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \begin{cases} b+c=\frac{2\sqrt{15}}{3} \\ c+a=\frac{2\sqrt{15}}{4} \\ a+b=\frac{2\sqrt{15}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=\frac{\sqrt{15}}{6} \\ a+b=\frac{2\sqrt{15}}{5} \end{cases} \Rightarrow b=\frac{17\sqrt{15}}{60} \Rightarrow x=\frac{671}{240}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{671}{240}\cdot$

Ví dụ 166. Giải: $x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}.\sqrt{2-x}+1$ (*)

Nhận xét. Bài toán có dạng tương tự nhưng thay thế x bằng $x-1$.

Lời giải. Điều kiện: $1\le x\le 2$. Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{2-x}\ge 0 \\ b=\sqrt{3-x}\ge 0 \\ c=\sqrt{4-x}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=2-x \\ b^2=3-x \\ c^2=4-x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1-a^2=ab+bc+ca \\ x-1=2-b^2=ab+bc+ca \\ x-1=3-c^2=ab+bc+ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+bc+ca=1 \\ b^2+ab+bc+ca=2 \\ c^2+ab+bc+ca=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a+c)=1 \quad (1) \\ (a+b)(b+c)=2 \quad (2) \\ (b+c)(a+c)=3 \quad (3) \end{cases}$$

Lấy: $(1).(2).(3) \Rightarrow \left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2=6 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=\sqrt{6}$ (4)

Lập: $\frac{(4)}{(1)},\frac{(4)}{(2)},\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \begin{cases} b+c=\sqrt{6} \\ c+a=\frac{\sqrt{6}}{2} \\ a+b=\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=\frac{\sqrt{6}}{2} \\ a+b=\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow b=\frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow x=\frac{47}{24}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, và thử lại phương trình thấy $x=\frac{47}{24}$ không thỏa mãn nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét. Do việc biến đổi trong các giải là biến đổi hệ quả. Do đó khi giải xong ta cần thử lại nghiệm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 13

BT 315. Giải: $x=\sqrt{5-x}.\sqrt{6-x}+\sqrt{6-x}.\sqrt{7-x}+\sqrt{7-x}.\sqrt{5-x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 316. Giải: $2x=\sqrt{2-x}\sqrt{10-4x}+\sqrt{5-2x}\sqrt{6-2x}+2\sqrt{3-x}\sqrt{2-x}+1.$

14. <u>Dạng 14</u>. Đặt 1 hoặc 2 ẩn phụ đưa về phương trình tích hoặc hệ cơ bản.

Phương pháp giải:

Ở trên, tôi đã nêu những dạng toán đặt ẩn phụ với những dạng toán có dấu hiệu nhận dạng tương đối. Ở dạng này, tôi xin trình bày một số cách đặt ẩn phụ dạng khác mà không theo nguyên tắc nhất định nào cả, nó chủ yếu dựa vào tính chủ quan của người ra đề. Hiển nhiên cách giải cần phải đòi hỏi chút kinh nghiệm và phán đoán chính xác của người giải.

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

<u>Ví dụ 167.</u> Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24$ $\quad (*)$

Olympic 30/04/2013

Điều kiện: $-x^2-8x+48\ge 0 \Leftrightarrow -12\le x\le 4.$

✍ ***<u>Lời giải 1</u>***. Đặt 2 ẩn $u,\ v$ đưa về hằng đẳng thức: $(u\pm v)^2=k^2,\ (k=const).$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{-x^2-8x+48}\ge 0 \\ v=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2=-x^2-8x+48 & (1) \\ v^2=x^2+6x+9 & (2) \\ 2uv=2x-48 & (3) \end{cases}$

(phương trình (3) có được là do nhân số 2 ở hai vế của $(*)$)

Lấy $(1)+(2)+(3),$ suy ra: $(u+v)^2=9=3^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=3 \\ u+v=-3 \end{array}\right.$.

- Với $u+v=3,$ suy ra: $\sqrt{-x^2-8x+48}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2+4x-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2-2\sqrt{7}.$
- Với $\sqrt{-x^2-8x+48}=-6-x \Leftrightarrow x=-5-\sqrt{31}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-2-2\sqrt{7},\ x=-5-\sqrt{31}.$

✍ ***<u>Lời giải 2</u>***. Đưa về dạng $A^2=B^2 \Leftrightarrow A=\pm B.$

$(*) \Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=2x-48$

$\Leftrightarrow (-x^2-8x+48)+2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}+x^2+6x+9=9$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-x^2-8x+48}+x+3\right)^2=3^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-8x+48}=-x \\ \sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-2\sqrt{7} \\ x=-5-\sqrt{31} \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-2-2\sqrt{7},\ x=-5-\sqrt{31}.$

✍ ***<u>Lời giải 3</u>***. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

$(*) \Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=2x-48$

$\Leftrightarrow (-x^2-8x+48)+2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}+x^2+6x=0 \qquad (i)$

Đặt $t=\sqrt{-x^2-8x+48}\ge 0,$ suy ra: $t^2=-x^2-8x+48.$ Khi đó:

$(i) \Leftrightarrow t^2+2(x+3)\cdot t+x^2+6x=0$ có $\Delta'_t=(x+3)^2-(x^2+6x)=9.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} t=-x \\ t=-x-6 \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-8x+48}=-x \\ \sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-2\sqrt{7} \\ x=-5-\sqrt{31} \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-2-2\sqrt{7}$, $x=-5-\sqrt{31}$.

Lời giải 4. Liên hợp sau khi sử dụng casio tìm nhân tử $x^2+4x-24$.

$(*) \Leftrightarrow (x^2+4x-24)-(x+3)\left[\sqrt{-x^2-8x+48}+x\right]=0 \qquad (i)$

Nếu $\sqrt{-x^2-8x+48}-x=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{7}-2$ không là nghiệm (i).

Nếu $x \neq 2\sqrt{7}-2$ thì $(i) \Leftrightarrow (x^2+4x-24)+\dfrac{2(x+3)(x^2+4x-24)}{\sqrt{-x^2-8x+48}-x}=0$

$\Leftrightarrow x^2+4x-24=0 \vee \sqrt{-x^2-8x+48}=x-6 \Leftrightarrow x=-2-2\sqrt{7} \vee x=-5-\sqrt{31}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-2-2\sqrt{7}$, $x=-5-\sqrt{31}$.

Ví dụ 168. Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3 \qquad (*)$

Điều kiện: $-x^2-2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

Lời giải 1. Đặt 2 ẩn u, v đưa về hằng đẳng thức: $(u \pm v)^2=k^2$, $(k=const)$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{-x^2-2x+3} \geq 0 \\ v=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2=-x^2-2x+3 & (1) \\ v^2=x^2+4x+4 & (2) \\ 2uv=2x+6 & (3) \end{cases}$

Lấy $(1)+(2)-(3)$, suy ra: $(u-v)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v=1 \\ u-v=-1 \end{array}\right.$.

- Với $u-v=1$, suy ra: $\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$
- Với $u-v=-1$, suy ra: $\sqrt{-x^2-2x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-1$, $x=\sqrt{2}-1$.

Lời giải 2. Đưa về dạng $A^2=B^2 \Leftrightarrow A=\pm B$.

$(*) \Leftrightarrow -2(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}+2x+6=0$

$\Leftrightarrow (-x^2-2x+3)-2(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}+x^2+4x+4=1$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{-x^2-2x+3}-(x+2)\right]^2=1^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-2x+3}-(x+2)=1 \\ \sqrt{-x^2-2x+3}-(x+2)=-1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-2x+3}=x+3 \\ \sqrt{-x^2-2x+3}=x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\sqrt{2}-1 \end{array}\right.$.

Lời giải 3. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

$(*) \Leftrightarrow -2(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}+2x+6=0$

$\Leftrightarrow (-x^2-2x+3)-2(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}+x^2+4x+3=0 \qquad (i)$

Đặt $t=\sqrt{-x^2-2x+3}\ge 0,$ thì $(i)\Leftrightarrow t^2-2(x+2)\cdot t+x^2+4x+3=0$ có:

$$\Delta_t=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=x+3\\ t=x+1\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-2x+3}=x+3\\ \sqrt{-x^2-2x+3}=x+1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=\sqrt{2}-1\end{array}\right..$$

Lời giải 4. Liên hợp sau khi nhẩm được 1 nghiệm $x=-1.$

$(*)\Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{-x^2-2x+3}-2)+(x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(-x^2-2x-1)}{\sqrt{-x^2-2x+3}+2}+(x+1)=0\Leftrightarrow -\frac{(x+2)(x+1)^2}{\sqrt{-x^2-2x+3}+2}+(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot\left(1-\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{-x^2-2x+3}+2}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ \sqrt{-x^2-2x+3}=x^2+3x \qquad (i)\end{array}\right.$$

Do sử dụng table tìm được nhân tử x^2+2x-1 của phương trình (i) nên:

$(i)\Leftrightarrow (x^2+2x-1)-\left[\sqrt{-x^2-2x+3}-(x+1)\right]=0 \qquad (ii)$

- Xét: $\sqrt{-x^2-2x+3}=-(x+1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1\\ 2x^2+4x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1-\sqrt{2}$ và nghiệm này không thỏa phương trình (ii).
- Với $\sqrt{-x^2-2x+3}+(x+1)\ne 0\Leftrightarrow x\ne -1-\sqrt{2},$ thì:

$$(ii)\Leftrightarrow (x^2+2x-1)+\frac{2(x^2+2x-1)}{\sqrt{-x^2-2x+3}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=0\\ \sqrt{-x^2-2x+3}=-x-3: VN_o\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\pm 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-1,\ x=\sqrt{2}-1.$

Nhận xét. *Dạng tổng quát là* $(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}=px+q,\ (a<0),$ *khi đó ta thường đặt 2 ẩn phụ* $u,\ v$ *để đưa về dạng* $(u\pm v)^2=k^2,\ (k=const),$ *tương ứng với lời giải 1. Nếu giải được bằng phương pháp này thì ta hoàn toàn giải được bằng cách 2 (đưa về dạng* $A^2=B^2\Leftrightarrow A=\pm B$*) hoặc cách 3 (đặt ẩn phụ không hoàn toàn). Còn cách giải 4 bằng phương pháp liên hợp tỏ ra khá mạnh mẽ, nhưng đòi hỏi sự hỗ trợ của máy tính bỏ túi và kinh nghiệm tách ghép khi giải toán. Nhưng vấn đề ở đây là nếu đặt 2 ẩn phụ mà không đưa về dạng* $(u\pm v)^2=k^2,\ (k=const)$ *thì sẽ xử lý như thế nào ?!. Để trả lời câu hỏi này, ta cùng tìm hiểu ví dụ sau:*

Ví dụ 169. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{2x^2+7x-9}=9x+39 \qquad (*)$

Điều kiện: $2x^2+7x-9\ge 0 \Leftrightarrow x\le -\dfrac{9}{2}$ hoặc $x\ge 1$.

Lời giải 1. Đặt hai ẩn phụ đưa về dạng: $(a+m.b)^2=\left[f(x)\right]^2$.

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=\sqrt{2x^2+7x-9}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=x^2+2x+1 & (1) \\ 4b^2=8x^2+28x-36 & (2) \\ 4ab=36x+156 & (3) \end{cases}$

Lấy $(1)+(2)+(3)\Rightarrow (a+2b)^2=9x^2+66x+121=(3x+11)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+2b=3x+11 \\ a+2b=-3x-11 \end{array}\right.$.

- Với $a+2b=3x+11 \Rightarrow x+1+2\sqrt{2x^2+7x-9}=3x+11 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+7x-9}=x+5$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -5 \\ 2x^2+7x-9=x^2+10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -5 \\ x^2-3x-34=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{145}}{2}$.
- Với $a+2b=-3x-11 \Rightarrow \sqrt{2x^2+7x-9}=-2x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -3 \\ 2x^2+17x+45=0 \end{cases} : VN_o$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{145}}{2}$.

Bình luận. *Để đưa về dạng* $(a+m.b)^2=\left[f(x)\right]^2$, *ta cần nhân thêm hệ số của phương trình (2) để khi cộng (1) với (2) được hệ số trước* x^2 *là số chính phương* $(1,4,9,16,...)$ *và khả năng rất thấp xuất hiện hiện dạng:* $(a+m.b)^2=\left[f(x)\right]^2$. *Cách ra đề dạng này chủ yếu dựa vào tính chủ quan của người ra đề.*

Lời giải 2. Đặt hai ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II với ba biến.

$(*)\Leftrightarrow (x+5)^2-(x^2+x-14)=(x+1)\sqrt{(x+1)(x+5)+(x^2+x-14)} \qquad (i)$

Đặt $\begin{cases} u=x+5 \\ v=\sqrt{(x+1)(x+5)+(x^2+x-14)}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2-(x^2+x-14)=(x+1)\cdot v \\ v^2-(x^2+x-14)=(x+1)\cdot u \end{cases}$

$\Rightarrow u^2-v^2=(x+1)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x+1=0 \end{array}\right.$.

- Với $u=v$, suy ra: $\sqrt{2x^2+7x-9}=x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -5 \\ x^2-3x-34=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{145}}{2}$.
- Với $u+v+x+1=0, \sqrt{2x^2+7x-9}=-2x-6$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{145}}{2}$.

Bình luận. *Bài toán này có dạng* $\left[f(x)\right]^n + b(x) = a(x)\cdot\sqrt[n]{a(x)\cdot f(x) - b(x)}$ *ta đã tìm hiểu ở dạng 7: đưa về hệ đối xứng ba ẩn. Nó khác với hai ví dụ trước là hệ số trước* x^2 *trong căn thức là số dương* $(a>0)$ *mà ta cần phải phân biệt.*

Ví dụ 170. Giải phương trình: $3x^2 - 5x - 2 + 2(x-1)\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 0$ (*)

Điều kiện: $2x^2 - 3x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{2}$ hoặc $x \ge 1$.

Lời giải 1. Đặt 2 ẩn $u,\ v$ đưa về hằng đẳng thức: $(u \pm v)^2 = k^2$, $(k = const)$.

Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 - 2x + 1 \\ v^2 = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 3x^2 - 5x + 2 \\ 2uv = -3x^2 + 5x + 2 \end{cases}$

$\overset{\oplus}{\Rightarrow} (u+v)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v = 2 \\ u + v = -2 \end{array}\right.$.

- Với $u + v = 2$, suy ra: $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x^2 + 3x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$.
- Với $u + v = -2$, suy ra: $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = -1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Lời giải 2. Đưa về dạng $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$.

$(*) \Leftrightarrow (2x^2 - 3x + 1) + 2(x-1)\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x^2 - 2x + 1 = 4$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x - 1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 3 - x \\ \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = -x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Lời giải 3. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

$(*) \Leftrightarrow (2x^2 - 3x + 1) + 2(x-1)\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x^2 - 2x - 3 = 0$ (i)

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \ge 0$, thì $(i) \Leftrightarrow t^2 + 2(x-1)\cdot t + x^2 - 2x - 3 = 0$ có $\Delta_t = 4$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 3 - x \\ t = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = -x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Lời giải 4. Liên hợp sau khi sử dụng casio tìm được nhân tử $x^2 + 3x - 8$.

$(*) \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 8) + 2(x-1)\left[\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + (x-3)\right] = 0$ (i)

- Xét $\sqrt{2x^2-3x+1}-(x-3)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x^2+3x-8=0 \end{cases}: VN_o$.
- Xét $\sqrt{2x^2-3x+1}-(x-3)\neq 0$ thì $(i) \Leftrightarrow (x^2+3x-8)+\dfrac{2(x-1)(x^2+3x-8)}{\sqrt{2x^2-3x+1}+3-x}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-8=0 \\ \sqrt{2x^2-3x+1}=-x-1: VN_o \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$.

Bình luận. *Qua ví dụ trên và các ví dụ của các dạng trước, nhận thấy rằng phương trình có dạng $mx^2+nx+p=(ax+b)\sqrt{cx^2+dx+e}$ có rất nhiều cách giải, chẳng hạn: đặt ẩn phụ không hoàn toàn, đặt một ẩn (hoặc hai) để đưa về dạng đẳng cấp, liên hợp, đặt hai ẩn phụ đưa về hệ đối xứng ba biến, đặt hai ẩn phụ đưa về dạng $(u\pm v)^2=k^2$, đưa trực tiếp về dạng $A^2=B^2$ hoặc tổng các số không âm, … Tùy thuộc vào đặc điểm của bài toán mà ta chọn phương án phù hợp, theo kinh nghiệm của tôi, bạn nên chọn phương pháp giải theo thứ tự phương pháp trên.*

Lớp bài toán đặt 1 hoặc 2 ẩn phụ đưa về hệ đối xứng hoặc hệ cơ bản

Ví dụ 171. Giải phương trình: $\dfrac{2+3x}{\sqrt{13-6x}}+\dfrac{2-3x}{\sqrt{13+6x}}=\dfrac{36}{5}$ (*)

Nhận xét. *Bài toán có dạng tổng quát $\dfrac{a+bx}{\sqrt{c-dx}}+\dfrac{a-bx}{\sqrt{c+dx}}=e$. Khi đó ta thường đặt hai ẩn phụ $u=\sqrt{c-dx}\geq 0$, $v=\sqrt{c+dx}$ đưa về hệ đối xứng loại I.*

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{13}{6}<x<\dfrac{13}{6}$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{13-6x}>0 \\ v=\sqrt{13+6x}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=13-6x \\ v^2=13+6x \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} u^2+v^2=26$ (1)

Ta lại có: $x=\dfrac{13-u^2}{6}=\dfrac{v^2-13}{6}$ nên $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2+\dfrac{13-u^2}{2}}{u}+\dfrac{2-\dfrac{v^2-13}{2}}{v}=\dfrac{36}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{17-u^2}{2u}+\frac{17-v^2}{2v}=\frac{36}{5} \Leftrightarrow \frac{17}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)=\frac{36}{5}+\frac{1}{2}(u+v)$$

$$\Leftrightarrow \frac{17(u+v)}{2uv}=\frac{1}{2}(u+v)+\frac{36}{5} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2=26 \\ \dfrac{17}{2}\cdot\dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{u+v}{2}+\dfrac{36}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=26 \\ \dfrac{17}{2}\cdot\dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{u+v}{2}+\dfrac{36}{5} \end{cases}$ (I)

Đặt $\begin{cases} S = u + v > 0 \\ P = uv > 0 \end{cases}$, $(S^2 \geq 4P)$, thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 26 \\ \dfrac{17S}{2P} = \dfrac{S}{2} + \dfrac{36}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P = S^2 - 26 \\ \dfrac{17S}{S^2 - 26} = \dfrac{5S + 72}{10} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5S^3 + 72S^2 - 330S - 1872 = 0 \\ P = \dfrac{S^2 - 26}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 5 \end{cases}: \text{ thỏa } S^2 \geq 4P.$$

Theo Viét thì u, v là nghiệm của $X^2 - 6X + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 5 \\ v = 1 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} u = \sqrt{13 - 6x} = 1 \\ v = \sqrt{13 + 6x} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - 6x = 1 \\ 13 + 6x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$
- Với $\begin{cases} u = \sqrt{13 - 6x} = 5 \\ v = \sqrt{13 + 6x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - 6x = 25 \\ 13 + 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \pm 2$.

Ví dụ 172. Giải phương trình: $\dfrac{x+2}{\sqrt{7-6x}} + \dfrac{1-x}{\sqrt{13+6x}} = \dfrac{11}{8}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 7 - 6x > 0 \\ 13 + 6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{13}{6} < x < \dfrac{7}{6}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{11}{4} = \frac{3 + (2x+1)}{\sqrt{10 - 3(2x+1)}} + \frac{3 - (2x+1)}{\sqrt{10 + 3(2x+1)}} \quad (1)$$

Đặt $t = 2x + 1$ thì: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{11}{4} = \dfrac{3+t}{\sqrt{10-3t}} + \dfrac{3-t}{\sqrt{10+3t}}$ (2)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{10 - 3t} > 0 \\ v = \sqrt{10 + 3t} > 0 \end{cases}$, suy ra: $u^2 + v^2 = 20$ (3)

Mặt khác, ta có: $t = \dfrac{10 - u^2}{3} = \dfrac{v^2 - 10}{3}$ nên $(2) \Leftrightarrow \dfrac{11}{4} = \dfrac{3 + \dfrac{10 - u^2}{3}}{u} + \dfrac{3 - \dfrac{v^2 - 10}{3}}{v}$

$$\Leftrightarrow \frac{33}{4} = \frac{19 - u^2}{u} + \frac{19 - v^2}{v} \Leftrightarrow 19\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) = \frac{33}{4} + u + v \Leftrightarrow \frac{19(u+v)}{uv} = \frac{33}{4} + u + v$$

Kết hợp với (3) được hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{19(u+v)}{uv} = \dfrac{33}{4} + u + v \\ u^2 + v^2 = 20 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 76(u+v) = 33uv + 4(u+v)uv \\ (u+v)^2 - 2uv = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 76S = 33P + 4SP \\ S^2 - 2P = 20 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} S = u + v > 0 \\ P = uv > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 152S = 33.2P + 2P.4S \\ 2P = S^2 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 152S = 33(S^2 - 20) + 4S(S^2 - 20) \\ 2P = S^2 - 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4S^3 + 33S^2 - 232S - 660 = 0 \\ 2P = S^2 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S-6)(4S^2 + 57S + 110) = 0 \\ 2P = S^2 - 20;\ S, P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 8 \end{cases}.$$

Theo Viét thì $u,\ v$ là nghiệm của $X^2 - 6X + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} v = 2 \\ u = 4 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} u = \sqrt{10 - 3t} = 4 \\ v = \sqrt{10 + 3t} = 2 \end{cases}$, suy ra: $t = 2x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}\cdot$
- Với $\begin{cases} u = \sqrt{10 - 3t} = 2 \\ v = \sqrt{10 + 3t} = 4 \end{cases}$, suy ra: $t = 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = -\dfrac{3}{2},\ x = \dfrac{1}{2}\cdot$

Ví dụ 173. Giải phương trình: $\dfrac{x^2 - 2x + 14}{\sqrt{(7 - 2x)(2x + 3)}} + \dfrac{12 + 2x - x^2}{\sqrt{4x^2 - 8x + 29}} = 20 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{7}{2}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{13 + (x-1)^2}{\sqrt{25 - 4(x-1)^2}} + \frac{13 - (x-1)^2}{\sqrt{25 + 4(x-1)^2}} = 20 \quad (1)$$

Đặt $t = (x-1)^2,\ \left(0 \le t < \dfrac{25}{4}\right)$ thì $(1) \Leftrightarrow \dfrac{13 + t}{\sqrt{25 - 4t}} + \dfrac{13 - t}{\sqrt{25 + 4t}} = 20 \quad (2)$

Đặt $u = \sqrt{25 - 4t} > 0,\ v = \sqrt{25 + 4t} > 0,$ suy ra: $u^2 + v^2 = 50 \quad (3)$

Mặt khác: $t = \dfrac{25 - u^2}{4} = \dfrac{v^2 - 25}{4}$ nên $(2) \Leftrightarrow \dfrac{13 + \dfrac{25 - u^2}{4}}{u} + \dfrac{13 - \dfrac{v^2 - 25}{4}}{v} = 20$

$$\Leftrightarrow \frac{77 - u^2}{u} + \frac{77 - v^2}{v} = 80 \Leftrightarrow \frac{77(u+v)}{uv} = u + v + 80 \quad (4)$$

Từ $(3), (4) \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 50 \\ \dfrac{77(u+v)}{uv} = u + v + 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 50 \\ 154(u+v) = 2uv(u+v) + 160uv \end{cases} \quad (I)$

Đặt $S = u + v > 0,\ P = uv > 0,\ (S^2 \ge 4P)$ thì

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2P = S^2 - 50 \\ 154S = 2P.S + 80.2P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P = S^2 - 50 \\ 154S = S(S^2 - 50) + 80(S^2 - 50) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^3 + 80S^2 - 204S - 4000 = 0 \\ 2P = S^2 - 50;\ S, P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 8 \\ P = 7 \end{cases}.$$

Theo Viét thì u, v là nghiệm của $X^2 - 8X + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 7 \\ v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 7 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} u = \sqrt{25 - 4t} = 7 \\ v = \sqrt{25 + 4t} = 1 \end{cases}$, suy ra: $t = (x-1)^2 = -6$: vô nghiệm.
- Với $\begin{cases} u = \sqrt{25 - 4t} = 1 \\ v = \sqrt{25 + 4t} = 7 \end{cases}$, suy ra: $t = (x-1)^2 = 6 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{6}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 1 \pm \sqrt{6}$.

Nhận xét. *Bản chất của bài toán là tác giả thay thế x bởi $(x-1)^2$. Khi đó cần chọn một đại lượng làm chuẩn để thử dần và tìm ra các đại lượng còn lại dựa vào dạng tổng quát của bài toán mà phân tích.*

Ví dụ 174. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2}} - \dfrac{1}{x} = 2$ (*)

Chọn đội tuyển VMO năm 2014 – 2015 tỉnh Bình Thuận

Lời giải. Điều kiện: $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}$.

Đặt $y = \sqrt{2 - x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + 2xy = 2 \\ x - y = 2xy \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + (x-y) - 2 = 0 \\ 2xy = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - y = -2 \\ xy = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x(x-1) = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = x + 2 \\ x(x+2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = -1,\ x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = -1,\ x = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$.

Ví dụ 175. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 1 = 3.\sqrt{3x - 1}$. b) $x^3 + 1 = 2.\sqrt[3]{2x - 1}$.

Nhận xét. *Dạng tổng quát của bài toán là $x^n + b = a.\sqrt[n]{ax - b}$. Khi đó ta luôn đặt ẩn phụ $y = \sqrt[n]{ax - b} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} ax = y^n + b \\ ay = x^n + b \end{cases}$ và đây là hệ đối xứng loại II (lấy vế trừ vế).*

Lời giải câu a). Đặt $y = \sqrt{3x - 1} \Rightarrow \begin{cases} 3x = y^2 + 1 \\ 3y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 3(x - y) = (y^2 - x^2)$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ x+y+3=0: VN_o \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}=x \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

➢ ***Lời giải câu b)***. Đặt $y=\sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow \begin{cases} 2x=y^3+1 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Rightarrow 2(x-y)=y^3-x^3$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0 \Leftrightarrow x=y \Rightarrow \sqrt[3]{2x-1}=x \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Ví dụ 176. Giải các phương trình sau:

a) $x=2014+\sqrt{2014+\sqrt{x}}$. b) $x=(2015+\sqrt{x})(1-\sqrt{1-\sqrt{x}})^2$.

Nhận xét. *Dạng cơ bản của 2 bài toán là* $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$. *Khi đó ta cũng đặt một ẩn phụ* $y=a+\sqrt{x}\ge a \Rightarrow \begin{cases} y=a+\sqrt{x} \\ x=a+\sqrt{y} \end{cases}$ *và đây là hệ đối xứng loại II.*

➢ ***Lời giải câu a)***. Điều kiện: $x\ge 2014$. Đặt $y=2014+\sqrt{x}\ge 2014+\sqrt{2014}$.

Suy ra: $\begin{cases} x=2014+\sqrt{y} \\ y=2014+\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y} \Leftrightarrow x=y$ nên $x-\sqrt{x}-2014=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{8057}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{4029+\sqrt{8057}}{2}$: thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\frac{4029+\sqrt{8057}}{2}$.

➢ ***Lời giải câu b)***. Điều kiện: $0\le x\le 1$. Đặt $y=\sqrt{1-\sqrt{x}},\ (0\le y\le 1)$.

Suy ra: $y^2=1-\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}=1-y^2 \Leftrightarrow x=(1-y^2)^2$ nên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le y\le 1 \\ (1-y^2)^2=(2015-y^2)(1-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le y\le 1 \\ (1-y)^2(1+y)^2=(2015-y^2)(1-y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le y\le 1 \\ (1-y)^2\cdot\left[(1+y)^2+y^2-2015\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le y\le 1 \\ (1-y)^2(y^2+y-1007)=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=1$$

Với $y=1 \Rightarrow x=(1-y^2)^2=0$: thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Ví dụ 177. Giải phương trình: $(\sqrt{x^2+1}-x)^3+(\sqrt{x^2+1}+x)^3+4x^2-2=0 \quad (*)$

Học sinh giỏi tỉnh Phú Yên năm 2014 – 2015

Lời giải. Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+1}-x \\ b=\sqrt{x^2+1}+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2\sqrt{x^2+1} \Rightarrow (a+b)^2=4x^2+4 \\ ab=(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1 \end{cases}$

Kết hợp với $(*)$, được hệ phương trình: $\begin{cases} ab=1 \\ a^3+b^3+(a+b)^2-6=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)+(a+b)^2-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ (a+b)^3+(a+b)^2-3(a+b)-6=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases}$ nên theo Viét thì $a,\ b$ là nghiệm của: $X^2-2X+1=0$

Suy ra: $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{x^2+1}-x=1 \\ b=\sqrt{x^2+1}+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}=1+x \\ \sqrt{x^2+1}=1-x \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Bình luận. *Việc phương trình có chứa cặp số mà tích của chúng bằng hằng số k thì hướng xử lý bằng phép đặt 2 ẩn phụ là hoàn toàn khả thi, một lối đi thường gặp.*

Ví dụ 178. Giải: ***(Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Phan Châu Trinh – Đà Nẵng)***

$$\sqrt{x^2+91}=\sqrt{\sqrt{x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93}-2}+x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93 \quad (*)$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2$ và $\sqrt{x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93}-2\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93}\ge 0$, suy ra: $t^2=x^4+2x^2\sqrt{x-2}+x-93$

$$\Leftrightarrow t^2=(x^2+\sqrt{x-2})^2-91 \Leftrightarrow x^2+\sqrt{x-2}=\sqrt{t^2+91} \quad (1)$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+91}=\sqrt{t-2}+t^2 \Leftrightarrow t^2+\sqrt{t-2}=\sqrt{x^2+91} \quad (2)$$

$$\stackrel{-}{\Rightarrow} \begin{cases} x^2-t^2+(\sqrt{x-2}-\sqrt{t-2})=(\sqrt{t^2+91}-\sqrt{x^2+91}) \\ x\ge 2;\ t\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-t)(x+t)+\dfrac{x-t}{\sqrt{x-2}+\sqrt{t+2}}+\dfrac{(x-t)(x+t)}{\sqrt{t^2+91}+\sqrt{x^2+91}}=0 \\ t\ge 2;\ x\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-t)\cdot\left(x+t+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{t+2}}+\dfrac{x+t}{\sqrt{t^2+91}+\sqrt{x^2+91}}\right)=0 \\ x\ge 2;\ t\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=t.$$

Suy ra: $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+91}-10)=(\sqrt{x-2}-1)+(x^2-9)$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x^2+91}+10} = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left[\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} - \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - (x+3)\right] = 0 \qquad (3)$$

Do: $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} - (x+3) < \dfrac{x+3}{10} - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} - (x+3)$

$= -\dfrac{9}{10}(x+3) - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} < 0$ nên $(3) \Leftrightarrow x = 3.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3.$

★ **Lớp bài toán đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình tích số**

Trước hết, ta tìm hiểu lớp bài tập mà sau khi biến đổi và đặt ẩn phụ đưa được về loại phương trình đối xứng 2 biến với các dạng sau: $\left[\begin{array}{l} m.a^2+n.a = m.b^2+n.b \\ m.a^3+n.a^2+p.a = m.b^3+n.b^2+p.b \end{array}\right.$.

Khi đó ta sẽ biến đổi về tích số bằng phép nhóm phù hợp. Nhưng trong rất nhiều trường hợp, ta không thể đưa về 1 trong 2 dạng trên nhưng vẫn đặt 2 ẩn phụ đưa được về phương trình tích số. Ta cùng xét các ví dụ sau để hiểu kỹ hơn về vấn đề này:

Ví dụ 179. Giải phương trình: $x^2 - 2x = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x^2+1}$ $\qquad (*)$

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{2}\cdot$

Nhận xét & lời giải 1. Đặt 2 ẩn phụ đưa về tích số.

Nhận thấy: $x^2 - 2x = (x^2+1) - (2x+1) = (\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{2x+1})^2$ nên có:

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{2x+1})^2 = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1})^2 + \sqrt{x^2+1} = (\sqrt{2x+1})^2 + \sqrt{2x+1} \qquad (i)$$

Đặt $a = \sqrt{x^2+1} \ge 1,\ b = \sqrt{2x+1} \ge 0$ thì $(i) \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (a - b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)\cdot(a+b+1) = 0 \Leftrightarrow a = b,\ (do: a+b+1 > 0)$$

Suy ra: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x = 0,\ x = 2.$

Nhận xét & lời giải 2. Ghép căn thức để liên hợp.

Nhận thấy: $(x^2+1) - (2x+1) = x^2 - 2x$ có nhân tử với vế trái nên ghép 2 căn thức lại với nhau để liên hợp và đưa về tích số dạng: $(x^2 - 2x).f(x) = 0.$

$$(*) \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x+1}) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2x+1}}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.\cdot$$

Ví dụ 180. Giải phương trình: $3x^3+x^2-8x+4=2\sqrt{2x-1}-x\sqrt{3x+1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}2x-1\ge 0\\3x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow 3x^3+x^2-8x+4=\sqrt{8x-4}-\sqrt{3x^3+x^2}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{3x^3+x^2})^2+\sqrt{3x^3+x^2}=(\sqrt{8x-4})^2+\sqrt{8x-4}\qquad (i)$$

Đặt: $a=\sqrt{3x^3+x^2}\ge 0,\ b=\sqrt{8x-4}\ge 0$ thì $(i)\Leftrightarrow a^2+a=b^2+b$

$$\Leftrightarrow(a^2-b^2)+(a-b)=0\Leftrightarrow(a-b)\cdot(a+b+1)=0\Leftrightarrow a=b,\ (do: a+b+1>0)$$

Suy ra: $\sqrt{3x^3+x^2}=\sqrt{8x-4}\Leftrightarrow 3x^3+x^2-8x+4=0\Leftrightarrow x=-2\ \vee\ x=1\ \vee\ x=\dfrac{2}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=1,\ x=\dfrac{2}{3}\cdot$

Bình luận: *Vấn đề đặt ra là tại sao biết được cần biến đổi về dạng đối xứng để đặt được 2 ẩn phụ đưa về tích số ?! Rất đơn giản, do ta đã sử dụng casio tìm được 2 nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{2}{3}$ và giá trị của hai biểu thức chứa căn thức tại 2 vị trí nghiệm này đều bằng nhau, tức luôn có $\sqrt{3x^3+x^2}=\sqrt{8x-4}$, nên sẽ luôn có $a=b$. Hiển nhiên khi dự đoán được 2 nghiệm, ta hoàn toàn có thể ghép bậc nhất để liên hợp cũng dẫn đến đáp số tương tự (dành cho bạn đọc).*

Ví dụ 181. Giải phương trình: $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ hoặc $-1\le x\le 0$.

Nhận thấy $\left(2x-\dfrac{5}{x}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x-\dfrac{4}{x}$ nên đặt $a=\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}\ge 0,\ b=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\cdot$

Suy ra: $a^2-b^2=x-\dfrac{4}{x}$ thì $(*)\Leftrightarrow x-\dfrac{4}{x}+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=0\Rightarrow a^2-b^2+a-b=0$

$$\Leftrightarrow(a-b)(a+b+1)=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow\sqrt{2x-\frac{5}{x}}=\sqrt{x-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow x-\frac{4}{x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=2$.

Ví dụ 182. Giải phương trình: $x^3+3x^2+5x+3=(x^2+3)\sqrt{x^2+1}$ (*)

Phân tích. $VP_{(*)}=(x^2+3)\sqrt{x^2+1}=\left[(\sqrt{x^2+1})^2+2\right]\sqrt{x^2+1}=(\sqrt{x^2+1})^3+2\sqrt{x^2+1}.$

Do đó ta hy vọng vế trái của $(*)$ sẽ phân tích thành dạng: $(x+m)^3+2(x+m)$. Khai triễn và đồng nhất hệ số, ta sẽ tìm được ngay $m=1$. Nhưng đồng nhất thức thì dài,

nên ta sẽ khắc phục đều đó bằng cách tìm 1 nghiệm của phương trình là $x=0$. *Khi đó cần viết:* $x^3+3x^2+5x+3=(x+m)^3+2(x+m)$, *và cho* $x=0$ *vào phương trình này cũng tìm được* $m=1$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x^3+3x^2+5x+3>0$?! $\Leftrightarrow x\ge -1$.

$$(*)\Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=(\sqrt{x^2+1})^3+2\sqrt{x^2+1} \qquad (i)$$

Đặt $a=x+1\ge 0,\ b=\sqrt{x^2+1}>2$ thì $(i)\Leftrightarrow a^3+2a=b^3+2b$

$\Leftrightarrow (a^3-b^3)+2(a-b)=0\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+2)=0\Leftrightarrow a=b.$

Suy ra: $\sqrt{x^2+1}=x+1\ge 0\Leftrightarrow x=0.$

Lưu ý. *Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp liên hợp khi sử dụng casio tìm được 1 nghiệm* $x=0$. *Ngoài ra, từ* $(i)\Rightarrow f(x+1)=f(\sqrt{x^2+1})$ *với hàm đặc trưng* $f(t)=t^3+2t$ *luôn đơn điệu 1 chiều nên* $x+1=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow x=0$. *Dạng này ta sẽ tìm hiểu kỹ ở phần giải phương trình bằng phương pháp đánh giá bằng hàm số.*

Ví dụ 183. Giải phương trình: $(\sqrt{x+1}-1)(x+5-2\sqrt{x+1})=2(x+1)\sqrt{2x-1}$ $(*)$

Điều kiện: $2x+1\ge 0$.

Phân tích. $VP_{(*)}=2(x+1)\sqrt{2x-1}=\left[(\sqrt{2x-1})^2+3\right]\sqrt{2x-1}=(\sqrt{2x-1})^3+3\sqrt{2x-1}$

và $VT_{(*)}=(\sqrt{x+1}-1)\left[(\sqrt{x+1})^2-2\sqrt{x+1}+1+3\right]=(\sqrt{x+1}-1)\left[(\sqrt{x+1}-1)^2+3\right]$

$=(\sqrt{x+1}-1)^3+3(\sqrt{x+1}-1)$ *sẽ đưa* $(*)$ *về dạng đối xứng* $a^3+3a=b^3+3b$ *sau khi đặt ẩn phụ* $a=\sqrt{x+1}-1,\ b=\sqrt{2x-1}$ *và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Ta có: $(*)\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^3+3(\sqrt{x+1}-1)=(\sqrt{2x-1})^3+3\sqrt{2x-1}$ $\quad(i)$

Đặt $a=\sqrt{x+1}-1,\ b=\sqrt{2x-1},\ \left(a>0,\ b\ge 0,\ do: x\ge \dfrac{1}{2}\right)$. Khi đó:

$(i)\Leftrightarrow a^3+3a=b^3+3b\Leftrightarrow (a^3-b^3)+3(a-b)=0\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+3)=0$

$\Leftrightarrow a=b,\ (do: a^2+ab+b^2+3>0,\ \forall a,b\in\mathbb{R}).$

Suy ra: $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{2x-1}+1\Leftrightarrow x+1=2x+2\sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=1-x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1\\ x^2-10x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=5-2\sqrt{5}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=5-2\sqrt{5}$.

Ví dụ 184. Giải phương trình: $(8x-6)\sqrt{x-1}=(2+\sqrt{x-2})(x+4\sqrt{x-2}+3)$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2$. Ta có:

$VP_{(*)}=(2+\sqrt{x-2})\left[(\sqrt{x-2})^2+4\sqrt{x-2}+2^2+1\right]=(2+\sqrt{x-2})\left[(\sqrt{x-2}+2)^2+1\right]$

$=(2+\sqrt{x-2})^3+(2+\sqrt{x-2})$.

$VT_{(*)}=(4x-3)\sqrt{4x-4}=\left[(\sqrt{4x-4})^2+1\right]\sqrt{4x-4}=(\sqrt{4x-4})^3+\sqrt{4x-4}$. Nên:

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt{4x-4})^3+\sqrt{4x-4}=(2+\sqrt{x-2})^3+(2+\sqrt{x-2})\qquad (i)$

Đặt $a=\sqrt{4x-4}>0,\ b=2+\sqrt{x-2}\ge 2$. Khi đó: $(i)\Leftrightarrow a^3+a=b^3+b$

$\Leftrightarrow(a^3-b^3)+(a-b)=0\Leftrightarrow(a-b)(a^2+ab+b+1)=0\Leftrightarrow a=b$.

Suy ra: $2+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x-4}\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}=3x-6\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 9x^2-40x+44=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{22}{9}\\ x=2\end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\dfrac{22}{9},\ x=2$.

Ví dụ 185. Giải phương trình: $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\qquad (*)$

Phân tích*. Sử dụng casio, ta tìm được phương trình có 1 nghiệm $x=5$. Do đó sẽ thử xét phân tích: $(x+m)^3+(x+m)=7x^2+9x-4+\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$ và phương trình có 1 nghiệm bằng $x=5$ nên thế vào và sử dụng shift solve của casio, tìm được ngay $m=1$, (hoặc sử dụng đồng nhất hệ số với đề sau khi khai triễn). Do đó sẽ đặt 2 ẩn phụ đưa về dạng đối xứng và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có:

$(*)\Leftrightarrow(x+1)^3+(x+1)=7x^2+9x-4+\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\qquad (i)$

Đặt $a=x+1,\ b=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$ thì $(i)\Leftrightarrow a^3+a=b^3+b\Leftrightarrow a=b$.

Suy ra: $\sqrt[3]{7x^2+9x-4}=x+1\Leftrightarrow(x-5)(x^2+x-1)=0\Leftrightarrow x=5\ \vee\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=5,\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 186. Giải phương trình: $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}\qquad (*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Do $x=0$ không là nghiệm $(*)$ nên:

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{7}{x}-13\cdot\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{x}-1\right)^3+2\left(\dfrac{2}{x}-1\right)=\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3\right)+2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}\qquad (i)$

Đặt $a=\dfrac{2}{x}-1,\ b=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$ thì $(i)\Leftrightarrow a^3+2a=b^3+2b\Leftrightarrow a=b$.

Suy ra: $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3}=\frac{2}{x}-1 \Leftrightarrow 3x^3+3x^2-13x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-5\pm\sqrt{89}}{4} \end{array}\right.\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=1,\ x=\frac{-5\pm\sqrt{89}}{4}\cdot$

Bình luận. *Trên đây là các ví dụ nếu các em học sinh nhìn nhận đặc điểm của mỗi bài sẽ tìm ra cấu trúc chung và dễ dàng đưa được về dạng đối xứng, dẫn đến phương trình tích số. Nhưng rất nhiều bài toán không chuẩn mực như thế, khi đó ta cần phân tích phù hợp và đặt ẩn phụ. Để minh chứng điều đó, ta cùng xét các ví dụ kế sau đây:*

Ví dụ 187. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x-3}+2x^2=x(\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1})$ $(*)$

Nhận xét. *Bài toán chỉ có hai căn thức, nếu đặt* $a=\sqrt{x+3},\ b=\sqrt{2x-1}$ *thì sẽ thu được phương trình đẳng cấp dạng* $ab+2x^2=x(a+b)$ *và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}\cdot$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x+3}\ge 0 \\ b=\sqrt{2x-1}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow ab=\sqrt{(x+3)(2x-1)}=\sqrt{2x^2+5x-3}$. Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow ab+2x^2=x(a+b)\Leftrightarrow (ab-ax)+(2x^2-2bx)=0\Leftrightarrow a(b-x)+2x(x-b)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-x)(a-2x)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x \\ a=2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}=2x \\ \sqrt{2x-1}=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4x^2-x-3=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1$.

Ví dụ 188. Giải: $2x+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}+(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}+3=0$ $(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 –THPT Mạc Đĩnh Chi, Q.6, Tp. Hồ Chí Minh

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lời giải 1. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình tích số.

$$(*)\Leftrightarrow\left[(x+1)+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\right]+\left[(x+2)+(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(1+\sqrt{x^2+2x+3})+(x+2)(1+\sqrt{x^2+4x+6}=0 \quad (1)$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+2x+3}>0 \\ b=\sqrt{x^2+4x+6}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=x^2+2x+3 \\ b^2=x^2+4x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-a^2=2x+3 \\ x=\frac{b^2-a^2-3}{2} \end{cases}$. Suy ra:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{b^2-a^2-1}{2}\cdot(1+a)+\frac{b^2-a^2+1}{2}\cdot(1+b)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+a)\cdot(b^2-a^2-1)+(1+b)\cdot(b^2-a^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(1+a)(b^2-a^2)+(1+b)(b^2-a^2)\right]+b-a=0 \Leftrightarrow (b^2-a^2)(a+b+2)+(b-a)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\underbrace{\left[(a+b)(a+b+2)+1\right]}_{>0,\ \forall a,b>0}=0 \Leftrightarrow b-a=0 \Leftrightarrow a=b.$$

Suy ra: $\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+4x+6} \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

Lời giải 2. Biến đổi về dạng $A^2=B^2$.

$$(*) \Leftrightarrow 4x+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}+2(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}+6=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}+(x^2+4x+6)$$
$$=(x+1)^2-2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}+x^2+2x+3$$

$$\Leftrightarrow (x+2+\sqrt{x^2+4x+6})^2=(x+1-\sqrt{x^2+2x+3})^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2+\sqrt{x^2+4x+6}=x+1-\sqrt{x^2+2x+3} \\ x+2+\sqrt{x^2+4x+6}=\sqrt{x^2+2x+3}-x-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<1+\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{x^2+2x+3}=0 : VN \\ 2x+3+\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{x^2+2x+3}}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

_Ví dụ 189._ Giải: $(2\sqrt{2x-1}-4)x^2+(7-4\sqrt{2x-1})x+\sqrt{2x-1}-3=0$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Bắc Quảng Nam – Quảng Nam

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow (2x^2-4x+1)\sqrt{2x-1}=4x^2-7x+3 \Leftrightarrow (2x^2-4x+1)\sqrt{2x-1}=(4x-3)(x-1)$$

Đặt $\begin{cases} a=x-1 \\ b=\sqrt{2x-1}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=x^2-2x+1 \\ b^2=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2-1=2x^2-4x+1 \\ 2b^2-1=4x-3 \end{cases}$ thì:

$$PT \Leftrightarrow (2a^2b-2b^2a)+(a-b)=0 \Leftrightarrow 2ab(a-b)+(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)(2ab+1)=0$$

$\Leftrightarrow a=b$ hoặc $2ab+1=0.$

- Nếu $a=b,$ suy ra: $\sqrt{2x-1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}.$
- Nếu $2ab+1=0 \Leftrightarrow 2(x-1)\sqrt{2x-1}+1=0 \Leftrightarrow \left[(\sqrt{2x-1})^2-1\right]\cdot\sqrt{2x-1}+1=0$

  $\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1})^3-\sqrt{2x-1}+1=0 \Leftrightarrow t^3-t+1=0$ (i) với $t=\sqrt{2x-1}\geq 0$

Xét hàm số $f(t)=t^3-t+1$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t)=3t^2-1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $t\geq 0.$

t	$-\infty$	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(t)$	(hatched)		$-$	0	$+$	
$f(t)$	(hatched)	1	$\searrow$	$\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow VT_{(i)} = f(t) \ge f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{9-2\sqrt{3}}{9} > 0$ nên (i) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2+\sqrt{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 14

BT 317. Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = 28-x.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 318. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{-x^2-4x+5} = 3x+\dfrac{3}{2}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 319. Giải phương trình: $2(x-5)\sqrt{-x^2+5x-4} = 5x-20.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 320. Giải phương trình: $(x+2).\sqrt{-x^2-2x+3} = x+3.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 321. Giải phương trình: $5x^2+4(x-2)\sqrt{x^2+x+1} = 1.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 322. Giải phương trình: $2x^2-4x-21 = 2(1-x)\sqrt{x^2-2x+3}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 323. Giải phương trình: $2x^2-6x+3+2(x-2)\sqrt{x^2-2x} = 0.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 324. Giải phương trình: $5x^2-20x+12+4(x-2)\sqrt{x^2-4x+5} = 0.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 325. Giải phương trình: $x^2-2x-4 = (x-1).\sqrt{x^2-2x}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 326. Giải phương trình: $\dfrac{5+x}{\sqrt{5-2x}} + \dfrac{5-x}{\sqrt{5+2x}} = 8.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 327. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{10-x}} - \dfrac{1}{\sqrt{10+x}} = \dfrac{3}{2x}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 328. Giải phương trình: $\dfrac{1+x}{\sqrt{17-4x}} + \dfrac{1-x}{\sqrt{17+4x}} = \dfrac{4}{5}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 329. Giải phương trình: $\dfrac{2+x}{\sqrt{20-x}} + \dfrac{2-x}{\sqrt{20+x}} = \dfrac{20}{3}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 330. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{6-x-x^2}} = \dfrac{7}{12}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 331. Giải phương trình: $\dfrac{4x^2+4x+11}{2\sqrt{(x+3)(2-x)}} + \dfrac{9-4x-4x^2}{\sqrt{4x^2+4x+26}} = 32.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 332. Giải phương trình: $\dfrac{1}{7x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{(7x+11)\cdot(9-7x)}}=\dfrac{7}{24}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 333. Giải phương trình: $x^4-2x^2\sqrt{3}+x+3-\sqrt{3}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 334. Giải phương trình: $x+1=(2x+1)\sqrt{2+\sqrt{x+1}}.$

BT 335. Giải: $2x^2-2x\sqrt{2}-\sqrt{2015}-\sqrt{2015}.\sqrt{2+4x\sqrt{2015}}=\sqrt{4030}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 336. Giải phương trình: $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{-x^2-3x+10}+1=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 337. Giải phương trình: $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 338. Giải phương trình: $4x=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 339. Giải phương trình: $2(4\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}-3)+\sqrt[3]{4(\sqrt{x^2+2}-x)}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 340. Giải phương trình: $8x^2-8x+\sqrt{1-3x}=\sqrt{1+x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 341. Giải phương trình: $2x^2+2x-4+5\sqrt{x^2+1}=5\sqrt{3-x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 342. Giải phương trình: $8x^2+2x+5=6\sqrt{2x^2+x+1}+3\sqrt{2x-1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 343. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x-1}}=\dfrac{2.(3x-2)\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{(2x-1)^3}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 344. Giải phương trình: $(x+5)\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 345. Giải phương trình: $x^3-15x^2+78x-141=5\sqrt[3]{2x-9}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 346. Giải phương trình: $x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 347. Giải phương trình: $(5x^2+4x+3).\sqrt{x}=(x+3).\sqrt{5x^2+4x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

15. Dạng 15. Đặt ẩn phụ bằng phương pháp lượng giác hóa

Ý tưởng bài toán và phương pháp giải:

– Một lớp các phương trình vô tỷ có thể giải được bằng phương pháp chuyển về phương trình lượng giác. Dấu hiệu nhận biết là trong phương trình xuất hiện các biểu thức $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2+1}$, $\sqrt{x^2-1}$,... Lợi thế của phương pháp này là đưa phương trình ban đầu về một phương trình lượng giác cơ bản đã biết cách giải như: phương trình đẳng cấp, đối xứng, cổ điển,… Vì hàm lượng giác là tuần hoàn, nên khi đặt điều kiện các biểu thức lượng giác thật khéo léo sao cho lúc khai căn không có giá trị tuyệt đối, có nghĩa là luôn luôn dương (dựa vào điều kiện và vòng tròn lượng giác). Tuy nhiên, nhược điểm của phương pháp này là khi chuyển về lượng giác lại khó tìm được nghiệm tường minh của phương trình.

– Một số dấu hiệu và phương pháp lượng giác hóa thường gặp

- Chứa: $\sqrt{a^2-x^2}$ $\xrightarrow{P^2}$ Đặt: $\left[\begin{array}{l} x=|a|\sin t,\ \left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right) \\ x=|a|\cos t,\ \left(t\in[0;\pi]\right)\end{array}\right.$.
- Chứa: $\sqrt{x^2-a^2}$ $\xrightarrow{P^2}$ Đặt: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{|a|}{\sin t},\ \left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}\right) \\ x=\dfrac{|a|}{\cos t},\ \left(t\in[0;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\right)\end{array}\right.$.
- Chứa: $\sqrt{a^2+x^2}$ $\xrightarrow{P^2}$ Đặt: $\left[\begin{array}{l} x=|a|\tan t,\ \left(t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\right) \\ x=|a|\cot t,\ \left(t\in(0;\pi)\right)\end{array}\right.$.
- Chứa: $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ $\xrightarrow{P^2}$ Đặt: $x=a+(b-a)\sin^2 t$.
- Chứa: $\sqrt{\dfrac{a\pm x}{a\mp x}}$ $\xrightarrow{P^2}$ Đặt: $x=a\cos t,\ \left(\cos t\in[-1;1]\right)$.

– Bản chất của phương pháp là lợi dụng các công thức lượng giác, chủ yếu là $\sin^2 t+\cos^2 t=1,\ 1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t},\ 1+\cot^2 t=\dfrac{1}{\sin^2 t}\cdots$ để khai căn dễ hơn.

Để tìm hiểu kỹ dạng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

<u>Ví dụ 190.</u> Giải các phương trình sau:

a) $4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$ (a) b) $x^3-3x=\sqrt{x+2}$ (b)

<u>Phân tích</u>*. Câu a) đã quá rõ ràng, ở vế phải có chứa $\sqrt{1-x^2}$, nên ta có 2 phương án lựa chọn ẩn phụ. Một là đặt $x=\sin t$, hai là đặt $x=\cos t$, nhưng ta sẽ chọn phương án 2, tức đặt $x=\cos t$, để cho vế trái có dạng công thức $4\cos^3 t-3\cos t=\cos 3t$ sẽ dễ dàng hơn. Còn với câu b), đặt $x=2\cos t$, thì $VT=2(4\cos^3 t-3\cos t)=2\cos 3t$ và vế phải là $\sqrt{x+2}=\sqrt{2(1+\cos t)}=2\sqrt{\cos^2\dfrac{t}{2}}\cdot$ Khi đó chọn điều kiện thích hợp sẽ khai căn thức dễ dàng và đưa về những phương trình lượng giác cơ bản.*

✍ ***<u>Lời giải câu a)</u>***. Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $x=\cos t$, do $x\in[-1;1]$ nên $t\in[0;\pi]\cdot$

Suy ra: $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t,\ \left(do: t\in[0;\pi]\Rightarrow \sin t\ge 0\right)$.

$$(*)\Leftrightarrow 4\cos^3 t-3\cos t=\sin t\Leftrightarrow \cos 3t=\sin t=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \\ t=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Do $t \in [0;\pi]$, suy ra: $t = \frac{\pi}{8} \vee t = \frac{5\pi}{8} \vee t = \frac{3\pi}{4}$.

Ta có: $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \Rightarrow x = \cos t = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$ nên:

- Với: $t = \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\left(do : \cos\frac{\pi}{8} > 0\right)$.
- Với: $t = \frac{5\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\left(do : \cos\frac{5\pi}{8} < 0\right)$.
- Với: $t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm là $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

✍ ***<u>Lời giải câu b)</u>***. Điều kiện: $x \geq -2$.

- Với: $x > 2 \Rightarrow x^3 - 3x = x + x.\underbrace{(x^2-4)}_{>0} > 2x > \sqrt{x+2}$ nên $(*)$ vô nghiệm.
- Với: $-2 \leq x \leq 2$, đặt $x = 2\cos t$, $t \in [0;\pi]$. Suy ra:

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2(1+\cos t)} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{t}{2}} = 2\left|\cos\frac{t}{2}\right| = 2\cos\frac{t}{2}, \left(do : \frac{t}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right).$$

$(*) \Leftrightarrow 2(4\cos^3 t - 3\cos t) = 2\cos\frac{t}{2} \Leftrightarrow 8\cos^3 t - 6\cos t = 2\cos\frac{t}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2}$

$\Leftrightarrow 3t = \frac{t}{2} + k2\pi$ hoặc $3t = -\frac{t}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{k4\pi}{5}$ hoặc $t = \frac{k4\pi}{7}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Do $\begin{cases} t \in [0;\pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$, suy ra: $t = \left\{0; \frac{4\pi}{7}; \frac{4\pi}{5}\right\}$ nên $x = 2\cos t = \left\{2;\ 2\cos\frac{4\pi}{7};\ 2\cos\frac{4\pi}{5}\right\}$.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm là $x = 2$, $x = 2\cos\frac{4\pi}{7}$, $x = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

<u>Nhận xét</u>. *Trong lời giải trên, tôi đã sử dụng công thức nhân ba là công thức mở rộng trong chương trình phổ thông hiện hành. Các công thức này chứng minh như sau:*

- $\cos 3t = \cos(2t+t) = \cos 2t\cos t - \sin 2t\sin t = (1-2\sin^2 t)\cos t - 2\sin^2 t\cos t$

  $= \cos t - 4\sin^2 t\cos t = \cos t - 4(1-\cos^2 t)\cos t = \boxed{4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t}$.
- $\sin 3t = \sin(t+2t) = \sin t\cos 2t + \cos t\sin 2t = \sin t(1-2\sin^2 t) + 2\cos^2 t\sin t$

  $= \sin t - 2\sin^3 t + 2(1-\sin^2 t)\sin t = \boxed{3\sin t - 4\sin^3 t = \sin 3t}$.
- $\sin 5t = \sin(3t+2t) = \sin 3t\cos 2t + \cos 3t\sin 2t$

  $= (3\sin t - 4\sin^3 t)(1-2\sin^2 t) + (4\cos^3 t - 3\cos t)2\sin t\cos t$

$$= 3\sin t - 6\sin^3 t - 4\sin^3 t + 8\sin^5 t + 8\sin t\cos^4 t - 6\sin t\cos^2 t$$
$$= 8\sin^5 t - 10\sin^3 t + 3\sin t + 8\sin t(1-\sin^2 t)^2 - 6\sin t(1-\sin^2 t)$$
$$= 8\sin^5 t - 10\sin^3 t + 3\sin t + 8\sin t(1 - 2\sin^2 t + \sin^4 t) - 6\sin t + 6\sin^3 t$$
$$= \boxed{16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = \sin 5t}.$$

Ví dụ 191. Giải phương trình: $\sqrt{x+1} = 32x^3 + 48x^2 + 18x + 1 \quad (*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – THPT Chuyên Tiền Giang – Tiền Giang

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{4x+4} = 64x^3 + 96x^2 + 36x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(4x+2)+2} = (4x+2)^3 - 3(4x+2) \quad (i)$

Đặt $t = 4x+2$, do $x \ge -1$ nên $t = 4x + 2 \ge -2$. Khi đó: $(i) \Leftrightarrow \sqrt{t+2} = t^3 - 3t \quad (ii)$

- Với: $t > 2$ thì $t^3 - 3t = (t^3 - 4t) + t = t(t^2-4) + \sqrt{t^2} > \sqrt{t^2} = \sqrt{(t^2 - t - 2) + t + 2}$
  $= \sqrt{(t+1)(t-2) + t + 2} > \sqrt{t+2}$, nên (ii) vô nghiệm khi $t > 2$.
- Với: $-2 \le t \le 2$, đặt $t = 2\cos u$, $\left(u \in [0;\pi]\right)$. Suy ra:

$$\sqrt{t+2} = \sqrt{2(1+\cos u)} = 2\sqrt{\cos^2\frac{u}{2}} = 2\left|\cos\frac{u}{2}\right| = 2\cos\frac{u}{2},\ \left(do: \frac{u}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)\cdot$$

$$(ii) \Leftrightarrow 2\cos\frac{u}{2} = 8\cos^3 u - 6\cos u \Leftrightarrow \cos 3u = \cos\frac{u}{2} \Leftrightarrow u = \frac{k4\pi}{7} \vee u = \frac{k4\pi}{5},\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $u \in [0;\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, suy ra: $u = \left\{0;\ \frac{4\pi}{5};\ \frac{4\pi}{7}\right\}\cdot$ Nên $t = \left\{0;\ 2\cos\frac{4\pi}{5};\ 2\cos\frac{4\pi}{7}\right\}\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm là $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\left(-1 + \cos\frac{4\pi}{5}\right)$, $x = \frac{1}{2}\left(-1+\cos\frac{4\pi}{7}\right)\cdot$

Ví dụ 192. Giải phương trình: $2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} = 4x^3 + \sqrt{1-x^2} \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$. Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\cdot$

Suy ra: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, $\left(do: t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin t + (4\sin^2 t - 1)\cos t = 4\sin^3 t + \cos t$$
$$\Leftrightarrow 2\sin t + 4\sin^2 t\cos t - 2\cos t - 2\sin^3 t = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sin t - \cos t) - 2\sin^2 t(\sin t - \cos t) = 0 \Leftrightarrow (\sin t - \cos t)(1 - 2\sin^2 t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\cos 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) = 0\\ \cos 2t = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Do $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra: $t = \pm\frac{\pi}{4}$ nên $x = \sin t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Ví dụ 193. Giải: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-x^2}{3}}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$. Đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$.

Suy ra: $$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \\ \sqrt{(1+x)^3} = (\sqrt{1+\cos t})^3 = \left(\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2}\left|\cos^3\frac{t}{2}\right| = 2\sqrt{2}\cos^3\frac{t}{2} \\ \sqrt{(1-x)^3} = (\sqrt{1-\cos t})^3 = \left(\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2}\left|\sin^3\frac{t}{2}\right| = 2\sqrt{2}\sin^3\frac{t}{2} \\ \sqrt{1+\sin t} = \sqrt{\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)^2} = \left|\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2} \end{cases}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1+\sin t}\left[2\sqrt{2}\left(\cos^3\frac{t}{2} - \sin^3\frac{t}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+\sin t)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)\left(1 + \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+\sin t)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin t\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+\sin t)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos t(2+\sin t) - \frac{1}{\sqrt{3}}(2+\sin t) = 0 \Leftrightarrow (2+\sin t)\left(\sqrt{2}\cos t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos t - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot$

Ví dụ 194. Giải phương trình: $\sqrt{2-2\sqrt{1-x^2}} = x(1+\sqrt{1-x^2})$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2-2\sqrt{1-x^2} \ge 0 \\ 1-x^2 \ge 0 \\ x \ge 0 \quad ?! \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1.$

Đặt $x = \sin t,\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2(1-\cos t)} = \sin t(1+\cos t) \Leftrightarrow \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 2\sin t\cos^2\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2\sin\frac{t}{2}\cos^3\frac{t}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{t}{2} = 2\sin\frac{t}{2}\cos^3\frac{t}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{t}{2}\left(1-2\cos^3\frac{t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{t}{2} = 0\\ \cos\frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} t = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\frac{t}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2} = \sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sin t = 0 \\ x = \sin t = \sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 0,\ x = \sqrt{\sqrt[3]{4}-1}$.

Bình luận. *Trong lời giải trên, nếu ta tìm điều kiện không chính xác, tức* $x \in [-1;1]$ *thì khi đặt* $x = \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *thì biểu thức* $\sqrt{2 - 2\sqrt{1-x^2}} = \left|\sin\frac{t}{2}\right|$ *sẽ không bỏ dấu trị tuyệt đối được ngay mà cần chia ra 2 trường hợp để giải.*

Ví dụ 195. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1 - 2x^2 \qquad (*)$

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ thì $1 + 2x\sqrt{1-x^2} = (x + \sqrt{1-x^2})^2 \ge 0$: luôn đúng.

Lời giải 1. Đặt $x = \cos t,\ t \in [0;\pi]$, suy ra: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(\cos t + \sin t)^2} = \sqrt{2}\left(1 - 2\cos^2 t\right) \Leftrightarrow |\cos t + \sin t| = -\sqrt{2}\cos 2t$$

$$\Leftrightarrow \left|\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| = -\cos 2t \Leftrightarrow \left|\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \cos(\pi - 2t) = -\cos 2t \qquad (i)$$

- Nếu $t \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow t - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \ge 0$ thì

$$(i) \Leftrightarrow -\cos 2t = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ t = \frac{3\pi}{4} - k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{5\pi}{12} \\ t = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.,\ \left(do: t \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]\right).$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x=\cos\dfrac{5\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ x=\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

- Nếu $t\in\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]\Rightarrow t-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow\cos\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$ thì:

$$(i)\Leftrightarrow -\cos 2t=-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ t=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. : \nexists k\in\mathbb{Z} \text{ để } t\in\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right].$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

__Lời giải 2__. Đưa về hằng đẳng thức và sử dụng $\sqrt{A^2}=|A|$.

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(x+\sqrt{1-x^2})^2}=\sqrt{2}(1-2x^2)\Leftrightarrow\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=\sqrt{2}(1-2x^2)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x^2\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}(1-2x^2)\\ x+\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}(1-2x^2)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x^2\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}(\sqrt{1-x^2}-x)(\sqrt{1-x^2}+x)\\ x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}(\sqrt{1-x^2}-x)(\sqrt{1-x^2}+x)\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x^2\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} (x+\sqrt{1-x^2})\left[1-\sqrt{2}(\sqrt{1-x^2}-x)\right]=0\\ (x+\sqrt{1-x^2})\left[1-\sqrt{2}(x-\sqrt{1-x^2})\right]=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{array}\right..$$

Ví dụ 196. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{x}{4x^2-1}$ (*)

__Lời giải__. Điều kiện: $x\in[-1;1]\setminus\left\{\pm\dfrac{1}{2}\right\}$. Đặt $x=\cos t$, $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\cos t}{4\cos^2 t-1}\Leftrightarrow(4\cos^2 t-1)\sqrt{\sin^2 t}=\cos t$$

$$\Leftrightarrow\sin t\left[4(1-\sin^2 t)-1\right]=\cos t\Leftrightarrow 3\sin t-4\sin^3 t=\cos t\Leftrightarrow\sin 3t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\\ t=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z},\ t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}\right)\Rightarrow t=\frac{\pi}{8}\ \vee\ t=\frac{5\pi}{8}\ \vee\ t=\frac{\pi}{4}.$$

Ta có: $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2} \Rightarrow \cos t = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}\cdot$ Nên:

- Với $t = \dfrac{\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \left(do : \cos\dfrac{\pi}{8} > 0\right)\cdot$
- Với $t = \dfrac{5\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\dfrac{5\pi}{8} = -\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{5\pi}{4}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \left(do : \cos\dfrac{5\pi}{8} < 0\right)\cdot$
- Với $t = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm là $x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ x = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Ví dụ 197. Giải phương trình: $(16x^4 - 12x^2 + 1)\sqrt{1-x^2} = x$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x = \cos t,\ t \in [0;\pi] \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t.$

$(*) \Leftrightarrow (16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1)\sin t = \cos t$

$\Leftrightarrow \sin t\left[16(1-\sin^2 t)^2 - 12(1-\sin^2 t) + 1\right] = \cos t$

$\Leftrightarrow \sin t(16\sin^4 t - 20\sin^2 t + 5) = \cos t \Leftrightarrow 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = \cos t$

$\Leftrightarrow \sin 5t = \cos t \Leftrightarrow \sin 5t = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}$ hoặc $t = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\cdot$

Do $t \in [0;\pi]$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $t = \dfrac{\pi}{12} \vee t = \dfrac{\pi}{8} \vee t = \dfrac{5\pi}{12} \vee t = \dfrac{5\pi}{8} \vee t = \dfrac{3\pi}{4}\cdot$

Ta có: $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2} \Rightarrow \cos t = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}\cdot$ Nên:

- Với $t = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$
- Với $t = \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow x = \cos\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{6}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \left(do : \cos\dfrac{\pi}{12} > 0\right)\cdot$
- Với $t = \dfrac{\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \left(do : \cos\dfrac{\pi}{8} > 0\right)\cdot$
- Với $t = \dfrac{5\pi}{12} \Rightarrow x = \cos\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{5\pi}{6}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \left(do : \cos\dfrac{5\pi}{12} > 0\right)\cdot$

- Với $t=\frac{5\pi}{8}\Rightarrow x=\cos\frac{5\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \left(do:\cos\frac{5\pi}{8}<0\right)\cdot$

Kết luận: Các nghiệm là $x=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4},\ x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ x=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Ví dụ 198. Giải phương trình: $\sqrt{1+x^2}=\frac{5}{2\sqrt{1+x^2}}+x$ (*)

Phân tích. *Trong phương trình có chứa* $\sqrt{1+x^2}$ *giúp ta liên tưởng đến công thức lượng giác* $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ *và các biến còn lại đều biểu diễn được về các hàm lượng giác cơ bản, do đó ta chọn hướng lượng giác hóa* $x=\tan t$ *và có lời giải:*

Lời giải. Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, suy ra: $\begin{cases}0<\cos t<1\\ -1<\sin t<1,\ \sin t\neq 0\end{cases}$.

$\Rightarrow\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\tan^2 t}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{1}{|\cos t|}=\frac{1}{\cos t},\ \left(do:t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot$

$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{\cos t}=\frac{5\cos t}{2}+\tan t\Leftrightarrow\frac{1}{\cos t}-\frac{5\cos t}{2}-\frac{\sin t}{\cos t}=0\Leftrightarrow 2-5\cos^2 t-2\sin t=0$

$\Leftrightarrow 5\sin^2 t-2\sin t-3=0\Leftrightarrow\sin t=1$ (loại) hoặc $\sin t=-\frac{3}{5}$ (nhận).

Suy ra: $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}=-\frac{3}{4}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=-\frac{3}{4}\cdot$

Ví dụ 199. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0,\ x\neq\pm 1$. Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{0;\pm\frac{\pi}{4}\right\}\cdot$

Ta có:
$$\begin{cases}\bullet\ x^2+1=\tan^2 t+1=\frac{1}{\cos^2 t}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\cos t}\\ \bullet\ \sin 2t=2\frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t=2\tan t.\frac{1}{1+\tan^2 t}=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow\frac{x^2+1}{2x}=\frac{1}{\sin 2t}\\ \bullet\ \cos 2t=2\cos^2 t-1=\frac{2}{1+\tan^2 t}-1=\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}=\frac{1-x^2}{1+x^2}\\ \quad\Rightarrow 2\sin 2t\cos 2t=\frac{4x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\Leftrightarrow\frac{2}{\sin 4t}=\frac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}\end{cases}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin 2t} = \frac{2}{\sin 4t} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2\sin t\cos t} - \frac{1}{2\sin t\cos t\cos 2t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2\sin t} - \frac{1}{2\sin t(1-2\sin^2 t)} = 0 \Leftrightarrow 2\sin t(1-2\sin^2 t) + (1-2\sin^2 t) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3 t + \sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ (loại)} \vee \sin t = -1 \text{ (loại)} \vee \sin t = \frac{1}{2}\cdot$$

$$\Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Do $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \backslash \left\{0;\pm\frac{\pi}{4}\right\}$, suy ra: $t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$

<u>Ví dụ 200.</u> Giải phương trình: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$ (*)

<u>Phân tích</u>*. Phương trình có chứa* $\sqrt{x^2-1}$, *nếu ta đặt* $x = \frac{1}{\sin t} \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \frac{|\sin t|}{|\cos t|}$ *thì các biến còn lại được biểu diễn hết theo hàm lượng giác. Công việc còn lại là chọn điều kiện thích hợp để bỏ giá trị tuyệt đối. Thông thường thì học sinh đặt điều kiện:* $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1 \Rightarrow t \in (0;\pi)$ *thì* $\sin t$ *dương, nhưng còn* $\cos t$ *chưa xác định được dương hay âm và lúc đó cần phải chia ra hai khoảng* $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ *và khoảng* $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. *Nhưng nếu để ý điều kiện kéo theo là* $x > 0$, *tức luôn có* $x > 1$. *Khi đó điều kiện t sẽ là* $t \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$: *thuộc góc phần tử thứ nhất thì* $\sin t,\ \cos t > 0$. *Từ đó có lời giải 1 chi tiết như sau:*

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \ ?! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

☙ ***<u>Lời giải 1</u>***. Đặt $x = \frac{1}{\sin t},\ t \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin t > 0 \\ \cos t > 0 \end{cases}.$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \left|\frac{\cos t}{\sin t}\right| = \frac{\cos t}{\sin t}\cdot \text{ Khi đó:}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin t + \cos t = 2\sqrt{2}\sin t\cos t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2t \Leftrightarrow \sin 2t=\sin\left(t+\frac{t}{4}\right)\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Do $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên $t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{2}.$

Lời giải 2. Đặt $\begin{cases}a=x>1\\ b=\sqrt{x^2-1}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=x^2\\ b^2=x^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=1\\ ab+a=2\sqrt{2}b\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2\sqrt{2}b}{b+1},\ (do:b>0)\\ \dfrac{8b^2}{b^2+2b+1}-b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2\sqrt{2}b}{b+1},\ b>0,\ a>1\\ b^4+2b^3-6b^2+2b+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2\sqrt{2}b}{b+1},\ b>0,\ a>1\\ (b-1)^2(b^2+4b+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ \sqrt{x^2-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{2}.$

Ví dụ 201. Giải phương trình: $x+\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{36}{x}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x<-3\\ x>3\end{array}\right.$ · Đặt $x=\dfrac{3}{\cos t},\ t\in(0;\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\Rightarrow\sin t>0.$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2-9}=\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}=\sqrt{\frac{9(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}}=3\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=3\cdot\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right|=3\cdot\frac{\sin t}{|\cos t|}\cdot$$

- Với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos t>0\\ \tan t>0\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x^2-9}=3\dfrac{\sin t}{|\cos t|}=\dfrac{3\sin t}{\cos t}$ thì:

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}=4\cos t\Leftrightarrow\sin t+\cos t=4\cos^2 t\sin t$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin t}{\cos^3 t}+\frac{\cos t}{\cos^3 t}=\frac{4\cos^2 t\sin t}{\cos^3 t}\Leftrightarrow\tan t(1+\tan^2 t)+(1+\tan^2 t)=4\tan t$$

$$\Leftrightarrow\tan^3 t+\tan t-3\tan t+1=0\Leftrightarrow\tan t=1\ \vee\ \tan t=-1+\sqrt{2}.$$

Ta có: $\dfrac{9}{\cos^2 t}=9(1+\tan^2 t)\Rightarrow x=\dfrac{3}{\cos t}=3\sqrt{1+\tan^2 t},\ \left(do:\dfrac{3}{\cos t}>0\right)\cdot$

Suy ra: $\tan t=1\Rightarrow x=3\sqrt{2}$ và $\tan t=-1+\sqrt{2}\Rightarrow x=3\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$

- Với $t\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos t<0\\ \tan t<0\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x^2-9}=\dfrac{3\sin t}{|\cos t|}=-\dfrac{3\sin t}{\cos t}$ thì:

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos t} - \dfrac{1}{\sin t} = 4\cos t \Leftrightarrow \sin t - \cos t = 4\cos^2 t \sin t$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin t}{\cos t} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 t} - \dfrac{\cos t}{\cos^3 t} = \dfrac{4\cos^2 t \sin t}{\cos^3 t} \Leftrightarrow \tan t(1+\tan^2 t) - (1+\tan^2 t) = 4\tan t$

$\Leftrightarrow \tan t = -1$ hoặc $\tan t = 1 - \sqrt{2}.$

Ta có: $\dfrac{9}{\cos^2 t} = 9(1+\tan^2 t) \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\cos t} = -3\sqrt{1+\tan^2 t},\ \left(do: \dfrac{3}{\cos t} < 0\right)\cdot$

Suy ra: $\tan t = -1 \Rightarrow x = -3\sqrt{2}$ và $\tan t = 1-\sqrt{2} \Rightarrow x = -3\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \pm 3\sqrt{2},\ x = \pm 3\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$

Ví dụ 202. Giải phương trình: $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ $\quad(*)$

Phân tích. *Trong phương trình có chứa* $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}};\ \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ *nên ta có thể lượng giác hóa bằng cách đặt* $x = a\cos t$. *Cụ thể* $\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}};\ \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ □ $\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}-x}{\frac{1}{2}+x}};\ \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}+x}{\frac{1}{2}-x}}$ *nên ta đặt:* $x = \dfrac{1}{2}\cos t$ *và có lời giải 1. Ngoài ra, do hai vế không âm và dự đoán phương trình có một nghiệm* $x=0$ *nên có thể giải bằng phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức cổ điển hoặc bất đẳng thức hình học (xem bài học tiếp theo).*

Điều kiện: $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}\cdot$

Lời giải. Đặt $x = \dfrac{1}{2}\cos t,\ t \in (0;\pi)$. Khi đó:

- $\sqrt{1-2x} = \sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2 \dfrac{t}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\dfrac{t}{2}\right| = \sqrt{2}\sin\dfrac{t}{2},\ \left(do: \dfrac{t}{2} \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cdot$
- $\sqrt{1+2x} = \sqrt{1+\cos t} = \sqrt{2\cos^2 \dfrac{t}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\dfrac{t}{2}\right| = \sqrt{2}\cos\dfrac{t}{2},\ \left(do: \dfrac{t}{2} \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cdot$

Suy ra: $\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}} = \dfrac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}} = \tan\dfrac{t}{2}$ và $\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}} = \cot\dfrac{t}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\dfrac{t}{2} + \sqrt{2}\cos\dfrac{t}{2} = \tan\dfrac{t}{2} + \cot\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin\dfrac{t}{2} + \cos\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{2}{\sin t}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}=0 \ \vee \ \sin t=\sqrt{2} \text{ (loại).}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z},\ t\in(0;\pi)\right) \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=0.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN DẠNG 15

BT 348. Giải phương trình: $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 349. Giải phương trình: $x^3+\sqrt{1-3x^2+3x^4-x^6}=x\sqrt{2-2x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 350. Giải phương trình: $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 351. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-4x^2}}=x\left(1+\sqrt{1+2\sqrt{1-4x^2}}\right).$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 352. Giải phương trình: $\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{2}{|x-1|}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 353. Giải phương trình: $4x^3-12x^2+9x-1=\sqrt{2x-x^2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 354. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{4x^3-3x}{16x^4-12x^2+1}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 355. Giải phương trình: $\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{2}{x^2+1}=4.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 356. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+25}=x+\dfrac{50}{\sqrt{x^2+25}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 357. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{(x^2+1)^3}{6x^5-20x^3+6x}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 358. Giải phương trình: $x^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=4(x^2-1).$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 359. Giải phương trình: $1+\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{5}{6x}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

<u>Bài 4</u>. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

☆☆☆

Trong bài này, tôi xin giới thiệu đến quý độc giả phương pháp giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp đánh giá với các công cụ sau đây:

- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.
- Sử dụng bất đẳng thức (Cauchy, Cauchy – Schwarz, Véctơ,…).
- Sử dụng tổng các số không âm hoặc biến đổi về dạng $A^n = B^n$.

Ngoài những dấu hiệu nhận dạng đặc trưng được nêu trong từng ví dụ, tôi xin lưu ý rằng, đối với phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_o$ thì có rất nhiều khả năng sử dụng phương pháp đánh giá bằng hàm số hoặc bất đẳng thức cổ điển hoặc liên hợp,… tùy vào đặc điểm bài toán, đó là một lối đi thường gặp.

I. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình vô tỷ.
Vận dụng thành thạo kết quả : "Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đơn điệu một chiều trên miền D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) thì số nghiệm trên D của $f(x) = 0$ không nhiều hơn một và $\forall u, v \in D: f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$".

1. Các ví dụ vận dụng hàm số $y = f(x)$ đơn điệu 1 chiều trên miền D thì phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

<u>Ví dụ 203.</u> Giải phương trình: $\sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x = 4$ (*)

<u>Phân tích</u>. *Quan sát vế trái của phương trình thấy khi x tăng thì giá trị của biểu thức trong căn cũng tăng. Từ đó có thể dự đoán vế trái là hàm đồng biến, còn vế phải là hằng số và sử dụng casio tìm được nghiệm duy nhất $x = 1$, nên đây là những điều kiện thích hợp cho việc sử dụng phương pháp hàm số để giải. Ngoài ra, công thức đạo hàm sau đây thường hay được sử dụng là* $(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$.

Điều kiện: $5x^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

✍ ***<u>Lời giải 1</u>***. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x - 4 = 0$ (i)

x = $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ không thỏa mãn *(i)*

x > $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x - 4$ trên $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$ có:

$f'(x) = \dfrac{15x^2}{2\sqrt{5x^3 - 1}} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} + 1 > 0,\ \forall x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$. Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$ và $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (i).

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Lời giải 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy với điểm rơi $x=1$.

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{5x^3-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(5x^3-1)\cdot 4}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5x^3+3}{2}=\dfrac{5x^3+3}{4}\\ \sqrt[3]{(2x-1).1.1}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{2x+1}{3}\end{cases}$ · Suy ra:

$$VT_{(*)}=\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x\le\frac{5x^3+3}{4}+\frac{2x+1}{3}+x=\frac{15x^3+20x+13}{12}\cdot$$

Mà: $\dfrac{15x^3+20x+13}{12}\le 4\Leftrightarrow 3x^3+4x-7\le 0\Leftrightarrow(x-1)(3x^2+3x+7)\le 0\Leftrightarrow x\le 1.$

Suy ra: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x\le\dfrac{15x^3+20x+13}{12}\le 4$ và dấu $"="$ xảy ra khi $x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1.$

Lời giải 3. Liên hợp khi sử dụng casio tìm được $x=1$ là nghiệm duy nhất.

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt{5x^2-1}-2)+(\sqrt[3]{2x-1}-1)+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{5(x-1)(x+1)}{\sqrt{5x^2-1}+2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}+1}+(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{5(x+1)}{\sqrt{5x^2-1}+2}+\frac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}+1}+1\right]=0\Leftrightarrow x=1.$$

Do $\dfrac{5(x+1)}{\sqrt{5x^2-1}+2}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}+1}+1>0,\ \forall x\ge\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1.$

Ví dụ 204. Giải phương trình: $3(\sqrt{2x^2+1}-1)=x(1+3x+8\sqrt{2x^2+1})$ $(*)$

Phân tích. *Sử dụng casio tìm được $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Để ý rằng: $\sqrt{2x^2+1}\ge 1\Rightarrow\sqrt{2x^2+1}-1\ge 0$ và $8\sqrt{2x^2+1}+3x>8\sqrt{x^2}+3x=8|x|+3x>0$ nên để phương trình có nghiệm thì điều kiện kéo theo là $x\ge 0$. Tìm điều kiện chặt chẽ sẽ thuận lợi cho việc đánh giá $f'(x)$ luôn dương hay âm trong cách giải bằng hàm số.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0.$

$(*)\Leftrightarrow 3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3=0$ (i)

Xét hàm số $f(x)=3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có:

$$f'(x)=6x+1+8\left(\sqrt{2x^2+1}+\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}\right)-\frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}}=6x+1+\frac{32x^2-6x+8}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot$$

Do: $32x^2-6x+8>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f'(x)>0,\ \forall x\ge 0.$ Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$ và có $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của (i).

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0.$

Ví dụ 205. Giải phương trình: $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=12(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$ (*)

Phân tích*. Sử dụng casio, tìm được $x=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Với điều kiện $0\le x\le 4$ thì nháp đạo hàm ở vế trái thấy hàm số đồng biến, đạo hàm vế phải thấy là hàm nghịch biến. Từ đó nghĩ đến việc vận dụng nội dung: "Nếu hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đơn điệu* ***ngược chiều*** *trên miền D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x)=g(x)$ không nhiều hơn 1" và có lời giải chi tiết bằng hàm số như sau:*

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $0\le x\le 4$.

- Xét hàm số $f(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ xác định và liên tục trên $\left[0;4\right]$, có:

  $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+12}}>0,\ \forall x\in\left(0;4\right]$, nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[0;4\right]$ (i)

- Xét hàm số $g(x)=12(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$ xác định và liên tục trên $\left[0;4\right]$, có:

  $g'(x)=12\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)<0,\ \forall x\in\left[0;4\right)$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;4\right]$. (ii)

Từ (i), (ii), suy ra $f(x)=g(x)$ có nghiệm duy nhất và $f(4)=g(4)=12$ nên $x=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(*)$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

Ví dụ 206. Giải phương trình: $(x-1)(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6})=x+6$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Thái Bình năm 2010

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\ge 1$.

Do $x=1$ không là nghiệm của phương trình nên chỉ xét $x\in(1;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}=\dfrac{x+6}{x-1}$ (i)

- Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ có:

  $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+6}}>0,\ \forall x>1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

- Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x+6}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ có $g'(x)=\dfrac{-7}{(x-1)^2}<0,\ \forall x>1$.

  Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

- Ta lại có: $f(2)=g(2)=8$ nên $x=2$ là nghiệm duy nhất của (i).

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2$.

Ví dụ 207. Giải phương trình: $(4x-1)(\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3})=4x+8$ (*)

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x+3\ge 0\Leftrightarrow x\ge -3$.

Do $x=\frac{1}{4}$, $x=-3$ không là nghiệm của $(*)$ nên chỉ xét $x\in(-3;+\infty)\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3}=\frac{4x+8}{4x-1}\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3}-\frac{4x+8}{4x-1}=0\qquad(i)$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt{x+3}-\frac{4x+8}{4x-1}$ trên $x\in\left(-3;+\infty\right)\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$ có:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+\frac{36}{(4x-1)^2}>0,\ \forall x\in\left(-3;+\infty\right)\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trong các khoảng $\left(-3;\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3			$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	(gạch chéo)		$+$		||	$+$	
$f(x)$	(gạch chéo)	$-\sqrt[3]{4}-\frac{4}{13}$	↗	$+\infty$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

Ta có (i) là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $f(x)$ và trục Ox có phương trình $y=0$. Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình (i) có tối đa hai nghiệm và có $f(-2)=f(1)=0$ nên $x=-2$, $x=1$ là 2 nghiệm cần tìm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=-2$, $x=1$.

Ví dụ 208. Giải: $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}\quad(*)$

Học sinh giỏi tỉnh Cao Bằng năm 2014 – 2015

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

$$(*)\Leftrightarrow\left[\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+2}\right]+\left[\sqrt{(x+6)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}\right]=4$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}(\sqrt{2x-1}-3)+\sqrt{x+6}(\sqrt{2x-1}-3)=4$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})=4\qquad(i)$$

Do $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}>0,\ \forall x\ge\frac{1}{2}$ và vế phải dương nên để phương trình (i) có thì cần điều kiện kéo theo là $\sqrt{2x-1}-3>0\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}>3\Leftrightarrow x>5$.

- Xét hàm số dương $f(x)=\sqrt{2x-1}-3$ trên nửa khoảng $(5;+\infty)$ có:

  $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0,\ \forall x>5$ nên $f(x)$ là hàm số dương đồng biến $(5;+\infty)$ (1)

- Xét hàm số dương $g(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}$ trên nửa khoảng $(5;+\infty)$ có:

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}>0,\ \forall x>5 \text{ nên } g(x) \text{ đồng biến trên } (5;+\infty) \qquad (2)$$

Từ $(1),(2)\Rightarrow h(x)=f(x).g(x)=(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})$ là hàm số đồng biến trên $(5;+\infty)$ và có $h(7)=4$ nên $x=7$ là nghiệm duy nhất của (i).

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=7$.

Nhận xét. *Trong thí dụ trên, tôi đã sử dụng kết quả: "Tích của hai hàm số dương đồng biến (nghịch biến) trên D là một hàm đồng biến (nghịch biến) trên D".*

Ví dụ 209. Giải: $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 8$. Đặt $t=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow x=t^3+1\ge 8\Rightarrow t\ge\sqrt[3]{7}$.

$(*)\Leftrightarrow t^2-2t-(t^3-4)\sqrt{t^3-7}-3t^3+28=0$

$\Leftrightarrow 3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}=0 \qquad (i)$

Nhận thấy $t=\sqrt[3]{7}$ không là nghiệm nên chỉ xét $t\in(\sqrt[3]{7};+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}$ trên $(\sqrt[3]{7};+\infty)$ có:

$$f'(t)=\underbrace{(9t^2-2t+2)}_{>0,\ \forall t}+3t^2\sqrt[3]{t^3-7}+\frac{t^2(t^3-4)}{\sqrt[3]{(t^3-7)^2}}>0,\ \forall t\in(\sqrt[3]{7};+\infty).$$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt[3]{7};+\infty)$.

Ta lại có: $f(2)=0\Rightarrow t=2\Leftrightarrow x=9$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=9$.

2. Các ví dụ vận dụng hàm số $y=f(x)$ đơn điệu 1 chiều trên miền D và tồn tại $u,\ v\in D$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

Ví dụ 210. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2x^2+1}=\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{x+1} \qquad (*)$

Phân tích. *Nếu lập phương hai vế thì phương trình rất phức tạp, nhưng nếu quan tâm đến mối liên hệ giữa các biến trong căn thức, ta nhận thấy:* $2x^2+1=(2x^2)+1$ *và* $x+2=(x+1)+1$. *Tức* $(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{(x+1)+1}+\sqrt[3]{(x+1)}=\sqrt[3]{(2x^2)+1}+\sqrt[3]{(2x^2)}$ *với vế trái và phải đều có dạng* $f(t)=\sqrt[3]{t+1}+\sqrt[3]{t}$ *mà ta gọi đây là hàm đặc trưng. Khi đó phương trình viết dạng* $f(x+1)=f(2x^2)$ *nên sẽ sử dụng phương pháp hàm như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{(x+1)+1}+\sqrt[3]{(x+1)}=\sqrt[3]{(2x^2)+1}+\sqrt[3]{(2x^2)}\Leftrightarrow f(x+1)=f(2x^2) \qquad (1)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t+1}$ có $f'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(t+1)^2}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}.$ 0

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\qquad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(x+1)=f(2x^2)\Leftrightarrow x+1=2x^2\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=-\dfrac{1}{2},\ x=1.$

Ví dụ 211. Giải phương trình: $2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1+\sqrt[3]{x^2+2}$ (*)

HSG các trường chuyên khu vực Duyên Hải & Đồng Bằng Bắc Bộ 2010

Phân tích. *Bậc cao nhất của phương trình là bậc ba, thường thì ta sẽ xây dựng hàm đặc trưng của bậc ba dạng* $f(t)=mt^3+nt$. *Nghĩa là ta cần viết lại phương trình dưới dạng:* $2x^3-3x+1+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=x^2+2+\sqrt[3]{x^2+2}$ *(theo biểu thức trong dấu căn) và xem* $2x^3-3x+1=(\sqrt[3]{2x^3-3x+1})^3,\ x^2+2=(\sqrt[3]{x^2+2})^3$ *thì ta đã đưa về hàm đặc trưng với* $m=n=1$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow 2x^3-3x+1+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=x^2+2+\sqrt[3]{x^2+2}$

$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{2x^3-3x+1})^3+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=(\sqrt[3]{x^2+2})^3+\sqrt[3]{x^2+2}$

$\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{2x^3-3x+1})=f(\sqrt[3]{x^2+2})$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2), suy ra: $f(\sqrt[3]{2x^3-3x+1})=f(\sqrt[3]{x^2+2})\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=\sqrt[3]{x^2+2}$

$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-3x-1=0\Leftrightarrow(2x+1)(x^2-x-1)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\ \vee\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Ví dụ 212. Giải phương trình: $24x^2-60x+36-\dfrac{1}{\sqrt{5x-7}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=0$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Quảng Ninh năm 2011

Lời giải. Điều kiện: $x>\dfrac{7}{5}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow(5x-6)^2-\dfrac{1}{\sqrt{(5x-6)-1}}=x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow f(5x-6)=f(x)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^2-\dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$ trên $(1;+\infty)$ có $f'(t)=2t+\dfrac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}}>0,\ \forall t>1.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(5x-6)=f(x)\Leftrightarrow 5x-6=x\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3}{2}\cdot$

Ví dụ 213. Giải phương trình: $\dfrac{x^3+6x^2+15x+13}{x^2+4x+7} = \sqrt{x+9} - \dfrac{1}{x+12}$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x > -9$.

$$(*) \Leftrightarrow x+2-\frac{1}{x^2+4x+7} = \sqrt{x+9}-\frac{1}{x+12}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)-\frac{1}{(x+2)^2+3} = \sqrt{x+9}-\frac{1}{(\sqrt{x+9})^2+3} \Leftrightarrow f(x+2) = f(\sqrt{x+9}) \quad (1)$$

Xét $f(t) = t - \dfrac{1}{t^2+3}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 1 + \dfrac{2t}{(t^2+3)^2} = \dfrac{t^4+5t^2+8+(t+1)^2}{(t^2+3)^2} > 0,\ \forall t.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(x+2) = f(\sqrt{x+9}) \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{x+9} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{29}-3}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{\sqrt{29}-3}{2}\cdot$

Xét hai dạng chuẩn: $\left[\begin{array}{ll} ax^3+bx^2+cx+d = n\sqrt[3]{ex+f} & (i) \\ ax^3+bx^2+cx+d = (a'x+b')\sqrt{c'x+d} & (ii) \end{array}\right.$

Hai dạng này có thể xây dựng hàm đặc trưng ở 2 vế dạng $f(t) = m.t^3 + n.t$.

Đối với dạng (i), *ta xét:* $m.(px+u)^3 + n.(px+u) = m.(\sqrt[3]{ex+f})^3 + n.\sqrt[3]{ex+f}$ *và đồng nhất hệ số với đề bài tìm được giá trị* $m,\ n,\ p,\ u$.

Đối với dạng (ii), *ta có thể dựa vào căn thức để biến đổi, từ đó định hướng được dạng của hàm số đặc trưng và biến đổi vế còn lại. Để hiểu kỹ nó, ta cùng xét các ví dụ sau:*

Ví dụ 214. Giải phương trình: $x^3-15x^2+78x-141 = 5\sqrt[3]{2x-9}$ $(*)$

Olympic 30/04/2011

Phân tích. *Xét phương trình:* $(x+m)^3 + 5.(x+m) = (\sqrt[3]{2x-9})^3 + 5.\sqrt[3]{2x-9}$ *và khai triển ta được:* $x^3+3mx^2+(3m^2+4)x+m^3+4m = 5.\sqrt[3]{2x-9}$. *Đồng nhất hệ số với phương trình đã cho, được hệ:* $\begin{cases} 3m = -15 \\ 3m^2+4 = 78 \\ m^3+4m = -141 \end{cases} \Leftrightarrow m = -5$. *Khi đó ta viết phương trình* $(*) \Leftrightarrow (x-5)^3 + 5.(x-5) = (\sqrt[3]{2x-9})^3 + 5.\sqrt[3]{2x-9} \Leftrightarrow f(x-5) = f(\sqrt[3]{2x-9})$ *với hàm số đặc trưng ở hai vế có dạng* $f(t) = t^3+5t$ *luôn đơn điệu trên* $\mathbb{R}$ *và có lời giải 1. Ngoài ra, ta có thể giải bài toán này bằng phép đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình mà đã được học ở bài học 3 (lời giải 3).*

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Lời giải 1. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

$(*) \Leftrightarrow (x-5)^3 + 5(x-5) = (\sqrt[3]{2x-9})^3 + 5\sqrt[3]{2x-9} \Leftrightarrow f(x-5) = f(\sqrt[3]{2x-9})$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t$ có $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(x-5) = f(\sqrt[3]{2x-9}) \Leftrightarrow x-5 = \sqrt[3]{2x-9} \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 4,\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

Lời giải 2. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình tích số.

$(*) \Leftrightarrow (x-5)^3 + 5(x-5) = (\sqrt[3]{2x-9})^3 + 5\sqrt[3]{2x-9}$ (i)

Đặt $a = x-5,\ b = \sqrt[3]{2x-9}$ thì $(i) \Leftrightarrow a^3 + 5a = b^3 + 5b \Leftrightarrow a^3 - b^3 + 5(a-b) = 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-9} = x-5 \Leftrightarrow x = 4,\ x = \frac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 4,\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

Lời giải 3. Đặt 1 ẩn phụ đưa về hệ phương trình gần đối xứng loại II.

Đặt $y - 5 = \sqrt[3]{2x-9} \Rightarrow \begin{cases} (y-5)^3 = 2x-9 \\ x^3 - 15x^2 + 78x - 141 = 5(y-5) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 15y^2 + 75y - 2x - 116 = 0 \\ x^3 - 15x^2 + 78x - 5y - 116 = 0 \end{cases} \Rightarrow (y^3 - x^3) - 15(y^2 - x^2) + 80(y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left[y^2 + yx + x^2 - 15(y+x) + 80\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y^2 + (x-15)y + x^2 - 15x + 80 = 0 \end{array}\right.$$

- Với $y = x \Rightarrow x - 5 = \sqrt[3]{2x-9} \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$
- Với $y^2 + (x-15)y + x^2 - 15x + 80 = 0$ và xem đây là phương trình bậc hai với ẩn là y có: $\Delta_y = -3x^2 + 30x - 95 < 0,\ \forall x$ nên phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 4,\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

Nhận xét. *Việc tìm ra phép đặt ẩn phụ có thể tiếp cận bằng công cụ đạo hàm thông qua việc xét hàm số ngoài dấu căn* $f(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 141 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 30x + 78$ $\Rightarrow f'' = 6x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ *và sẽ đặt* $y - 5 = \sqrt[3]{2x-9}$. *Hoặc ta có thể tìm ra phép đặt ẩn phụ từ dạng tổng quát (dạng 8, bài 3):* $(ax+b)^n = p.\sqrt[n]{cx+d} + q.x + r$ *với* $n \in \{2;3\}$ *thì sẽ đặt* $ay + b = \sqrt[n]{cx+d}$ *nếu* $p.c > 0$, *đặt* $-(ay+b) = \sqrt[n]{cx+d}$ *nếu* $p.c < 0$.

Lời giải 4. Đặt ẩn phụ để đơn giản hơn, rồi sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Đặt $y=\sqrt[3]{2x-9} \Rightarrow \begin{cases} y^3=2x-9 \\ 5y=x^3-15x^2+78x-141 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} y^3+5y=x^3-15x^2+80x-150$

$\Leftrightarrow y^3+5y=(x-5)^3+5.(x-5) \Leftrightarrow f(y)=f(x-5)$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t^3+5t$ có $f'(t)=3t^2+5>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow f(y)=f(x-5) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-9}=x-5 \Leftrightarrow x=4$ hoặc $x=\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Bình luận. *Lời giải 4 sẽ gọn hơn lời giải 1 khi ta sử dụng ẩn phụ để đưa về hệ tạm, rồi sau đó cộng hai phương trình này lại với nhau (đôi khi nhân thêm hằng số rồi mới cộng với phương trình còn lại để tạo ra hàm đặc trưng). Hiển nhiên, chúng ta cũng cần đến đồng nhất thức, tức ở trên cần có* $y^3+5y=(x+m)^3+5(x+m)$ *và khai triển vế trái, đồng nhất với phương trình ban đầu được* $m=-5$. *Nói chung, cách nào cũng có lợi thế riêng của nó, tùy thuộc đặc điểm bài toán, sự nhạy bén của người giải toán.*

Ví dụ 215. Giải phương trình: $16x^3-168x^2+580x-655=\sqrt[3]{5x-19}$ (*)

Phân tích. *Xét:* $m(px+u)^3+(px+u)=m(\sqrt[3]{5x-19})^3+\sqrt[3]{5x-19}$ *và khai triển được:* $mp^3x^3+3mp^2ux^2+(3mpu^2+p-5m)x+mu^3+u+19m=\sqrt[3]{5x-19}$. *Nếu đồng nhất hệ số bậc ba được* $mp^3=16$ *nên có thể chọn:* $\left[\begin{array}{l} m=2,\ p=2 \\ m=16,\ p=1 \end{array}\right.\cdot$ *Nếu* $m=2,\ p=2$ *và đồng nhất hệ số bậc hai được* $24u=-168 \Leftrightarrow u=-7$ *và lúc này phương trình được viết lại là* $2(2x-7)^3+(2x-7)=2(\sqrt[3]{5x-19})+\sqrt[3]{5x-19}$. *Khai triển và rút gọn phương trình này thì giống với đề bài, chứng tỏ hướng chọn* $m=2,\ p=2$ *là đúng hướng. Nếu không khớp với đề bài thì sẽ chọn lại, nhưng thường thì* $m,\ p$ *là những số nguyên. Những bước phân tích trên nhìn tuy dài nhưng đã quen rồi thì rất nhanh.*

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 2(2x-7)^3+(2x-7)=2(5x-19)+\sqrt[3]{5x-19} \Leftrightarrow f(2x-7)=f(\sqrt[3]{5x-19})$ (1)

Lời giải 1. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=6t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(2x-7)=f(\sqrt[3]{5x-19}) \Leftrightarrow 2x-7=\sqrt[3]{5x-19}$

$\Leftrightarrow 8x^3-84x^2+289x-324=0 \Leftrightarrow (x-4)(8x^2-52x+81)=0 \Leftrightarrow x=4,\ x=\dfrac{13\pm\sqrt{7}}{4}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=4,\ x=\dfrac{13\pm\sqrt{7}}{4}\cdot$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ để đơn giản hơn, rồi sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Đặt: $y=\sqrt[3]{5x-19}\Rightarrow\begin{cases}y^3=5x-19 & (3)\\ y=16x^3-168x^2+580x-655 & (4)\end{cases}$

Nhận xét. *Nếu cộng hai phương trình lại với nhau thì vế trái sẽ là* y^3+y *tức đang xây dựng hàm đặc trưng* $f(t)=t^3+t$ *và vế phải không đưa được về hàm này, tức không sử dụng được phương pháp hàm. Để ý phương trình* (4) *có số 16, theo kinh nghiệm thì* $16x^3=2.(2x)^3$ *nên sẽ thử nhân phương trình (3) với 2, rồi cộng với phương trình (4) được:* $2y^3+y=16x^3-168x^2+590x-693.$ *Mong muốn lúc này là cần biến đổi về dạng:* $2y^3+y=2(2x+m)^3+(2x+m)$ *và đồng nhất được* $m=-7$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y^3=10x-38\\ y=16x^3-168x^2+580x-655\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}2y^3+y=16x^3-168x^2+590x-693$$

$$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(2x-7)^3+(2x-7)\Leftrightarrow f(y)=f(2x-7)\qquad(5)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=6t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (6)

Từ (5), (6) $\Rightarrow f(y)=f(2x-7)\Leftrightarrow y=2x-7=\sqrt[3]{5x-19}\Leftrightarrow x=4,\ x=\dfrac{13\pm\sqrt7}{4}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=4,\ x=\dfrac{13\pm\sqrt7}{4}\cdot$

Lời giải 3. Đặt 2 ẩn phụ đưa về phương trình tích số.

Đặt $a=2x-7,\ b=\sqrt[3]{5x-19}$ thì $(1)\Leftrightarrow 2a^3+a=2b^3+b\Leftrightarrow 2(a^3-b^3)+(a-b)=0$

$\Leftrightarrow(a-b)(2a^2+2ab+2b^2+1)=0\Leftrightarrow a=b,\ (do:2a^2+2ab+2b^2+1>0)$

Suy ra: $\sqrt[3]{5x-19}=2x-7\Leftrightarrow(x-4)(8x^2-52x+81)=0\Leftrightarrow x=4,\ x=\dfrac{13\pm\sqrt7}{4}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=4,\ x=\dfrac{13\pm\sqrt7}{4}\cdot$

Lời giải 4. Đặt 1 ẩn phụ đưa về hệ phương trình gần đối xứng loại II.

Phân tích. *Xét hàm số* $y=16x^3-168x^2+580x-655$ *có* $y'=48x^2-336x+580$ *và* $y''=96x-336=0\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$ *nên tìm ra phép đặt ẩn phụ* $2y-7=\sqrt[3]{5x-19}$.

Đặt $2y-7=\sqrt[3]{5x-19}\Rightarrow\begin{cases}(2y-7)^3=5x-19\\ 16x^3-168x^2+580x-655=2y-7\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8y^3-84y^2+294y-5x-324=0\\ 8x^3-84x^2+290x-y-324=0\end{cases}\Rightarrow 8(y^3-x^3)-84(y^2-x^2)+295(y-x)=0$$

$\Leftrightarrow y=x$ hoặc $8y^2+4(2x-21)y+8x^2-84x+295=0.$

- Với $y = x \Rightarrow 2y - 7 = \sqrt[3]{5x - 19} \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = \dfrac{13 \pm \sqrt{7}}{4}$.
- Với $8y^2 + 4(2x - 21)y + 8x^2 - 84x + 295 = 0$ có $\Delta'_y = -48x^2 + 336x - 596 < 0, \forall x$ nên phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 4,\ x = \dfrac{13 \pm \sqrt{7}}{4}$.

Ví dụ 216. Giải phương trình: $8x^3 - 13x^2 + 7x = 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3}$ (*)

Phân tích. *Xét* $(2x + m)^3 + 2(2x + m) = (\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3})^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3}$ *và đồng nhất hệ số ta được* $m = 1$ *nên có lời giải 1 như sau:*

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (2x - 1)^3 + 2.(2x - 1) = (\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3})^3 + 2.\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3}$ (i)

Lời giải 1. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

$(i) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3}) = f(2x - 1)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ (1), $(2) \Rightarrow f(\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3}) = f(2x - 1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} = 2x - 1$

$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{89}}{16}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 1,\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{89}}{16}$.

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ để đơn giản hơn, rồi sử dụng tính đơn điệu của hàm số hoặc đặt ẩn phụ.

Đặt: $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = x^2 + 3x - 3 \\ 2y = 8x^3 - 13x^2 + 7x \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} y^3 + 2y = (2x - 1)^3 + 2(2x - 1)$

Đặt $t = 2x - 1$ thì phương trình $\Leftrightarrow y^3 + 2y = t^3 + 2t \Leftrightarrow y = t$.

Suy ra: $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 1,\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{89}}{16}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 1,\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{89}}{16}$.

Lời giải 3. Đặt hai ẩn phụ trực tiếp đưa về hệ đối xứng loại II.

$(*) \Leftrightarrow (2x - 1)^3 - (x^2 - x - 1) = 2\sqrt[3]{2(2x - 1) + (x^2 - x - 1)}$ (3)

Đặt $\begin{cases} u = 2x - 1 \\ v = \sqrt[3]{2(2x - 1) + (x^2 - x - 1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = 2v \\ v^3 - (x^2 - x - 1) = 2u \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} u^3 - v^3 = 2(v - u)$

$\Leftrightarrow u = v \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{89}}{16}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=1,\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{16}$.

Bình luận. *Trong lời giải 3, tôi đưa về dạng:* $\left[f(x)\right]^n \pm b(x)=a(x).\sqrt[n]{a(x).f(x)\mp b(x)}$ *và đặt 2 ẩn phụ đã được tìm hiểu ở bài học 3. Điều này muốn nhắc ta rằng, trong toán học có rất nhiều hướng đi, tùy thuộc vào đặc điểm của bài toán mà ta chọn hướng đi cho phù hợp, hiển nhiên cần có đầy đủ "phương tiện" mới đến "địa điểm" cần đến.*

Ví dụ 217. Giải phương trình: $x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{9x^2-x^3-19x+11}$ (*)

Phân tích. *Xét* $m(px+u)^3+(px+u)=m(9x^2-x^3-19x+11)+\sqrt[3]{9x^2-x^3-19x+11}$ $\Leftrightarrow (mp^3+m)x^3+(3mup^2-9m)x^2+(3u^2mp+p+19m)x+mu^3+u-11m=VP$ *và so sánh hệ số với* (*) *thu được hệ:* $\begin{cases} mp^3+m=1\\ 3mup^2-9m=-6\\ 3u^2mp+p+19m=12\\ mu^3+u-11m=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1\\ m=\dfrac{1}{2}\\ u=-1\end{cases}$. *Khi đó phương trình* $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x-1)^3+(x-1)=\dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{9x^2-x^3-19x+11})^3+\sqrt[3]{9x^2-x^3-19x+11}.$ *Khai triển và rút gọn tthu được phương trình giống đề bài nên có lời giải 1. Tuy nhiên cách phân tích sẽ dài dòng, để khắc phục ta có thể đặt* $y=\sqrt[3]{9x^2-x^3-19x+11}$ *để đưa về hệ tạm, sau đó cộng lại để tìm hàm đặc trưng và có lời giải 2.*

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x-1)^3+(x-1)=\dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{9x^2-x^3-19x+11})^3+\sqrt[3]{9x^2-x^3-19x+11}.$

Lời giải 1. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

$\Leftrightarrow f(x-1)=f(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11})$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{2}t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\dfrac{3}{2}t^2+1>0,\ \forall t.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(x-1)=f(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11})\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$ hoặc $x=3.$

Kết luận: Phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=1,\ x=2,\ x=3.$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ để đơn giản hơn, rồi dùng tính đơn điệu của hàm số.

Đặt: $y=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\Rightarrow \begin{cases} y^3=-x^3+9x^2-19x+11 & (3)\\ y=x^3-6x^2+12x-7 & (4)\end{cases}$

Nhận xét. *Nếu cộng hai phương trình lại thì vế trái là hàm bậc ba, vế phải là hàm bậc hai, lệch bậc nhau sẽ không sử dụng được phương pháp hàm. Suy nghĩ rất tự nhiên, ta*

sẽ nhân phương trình (4) cho 2, rồi cộng với phương trình (3) sẽ thu được hai vế đều có dạng bậc ba, khả năng sử dụng được phương pháp hàm số là rất cao.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 \\ 2y = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 14 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} y^3 + 2y = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 2y = (x-1)^3 + 2(x-1) \Leftrightarrow f(y) = f(x-1) \quad (5)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (6)

Từ (5), (6) $\Rightarrow f(y) = f(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} = x - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 3$.

Kết luận: Phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = 1,\ x = 2,\ x = 3$.

Ví dụ 218. Giải phương trình: $(9x+1)\sqrt{9x-1} = 8x^3 - 12x^2 + 10x - 3$ (*)

Phân tích. *Phương trình có dạng cơ bản 2:* $ax^3 + bx^2 + cx + d = (a'x + b')\sqrt{c'x + d}$ *như đã nêu ở trên. Khi đó ta cần bám sát vào đại lượng chứa căn để phân tích, dự kiến hàm đặc trưng và biến đổi vế còn lại. Cụ thể:* $VT = (9x+1)\sqrt{9x-1} = \left[(9x-1) + 2\right]\sqrt{9x-1}$ $= (\sqrt{9x-1})^3 + 2\sqrt{9x-1}$ *nên sẽ dự kiến hàm đặc trưng là* $f(t) = t^3 + 2t$. *Từ đó, sẽ phân tích vế phải:* $8x^3 - 12x^2 + 10x - 3 = (2x+m)^3 + 2(2x+m)$ *và đồng nhất hệ số ta sẽ tìm được* $m = -1$ *và có lời giải. Hiển nhiên ta hoàn toàn có thể đặt hai ẩn phụ a, b để đưa về phương trình dạng đối xứng (dành cho lớp 10, 11), rồi kết thúc bằng việc giải phương trình tích số (bạn đọc tự giải).*

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{9}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{9x-1})^3 + 2\sqrt{9x-1} = (2x-1)^3 + 2(2x-1) \Leftrightarrow f(\sqrt{9x-1}) = f(2x-1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(\sqrt{9x-1}) = f(2x-1) \Leftrightarrow \sqrt{9x-1} = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{13 + \sqrt{137}}{8}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{13 + \sqrt{137}}{8}\cdot$

Ví dụ 219. Giải phương trình: $x(4x^2 + 1) + (x-3)\sqrt{5-2x} = 0$

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Tuy Phước

Phân tích. *Tương tự thí dụ trên, xuất phát từ* $(x-3)\sqrt{5-2x}$, *có chứa* $-2x$ *trong căn nên chuyển vế và nhân cho 2 sẽ được:* $(6-2x)\sqrt{5-2x} = \left[(5-2x) + 1\right]\sqrt{5-2x}$

$=\left[(\sqrt{5-2x})^2+1\right]\sqrt{5-2x}=(\sqrt{5-2x})^3+\sqrt{5-2x}$ *và từ đó định hướng phân tích vế trái* $2x(4x^2+1)=(2x)^3+(2x),$ *đã đưa hai vế về dạng hàm đặc trưng* $f(t)=t^3+t.$

Lời giải. Điều kiện: $x\le\frac{5}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow(2x)^3+(2x)=(\sqrt{5-2x})^3+\sqrt{5-2x}\Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2x})$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2x})\Leftrightarrow\sqrt{5-2x}=2x\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{21}-1}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình đã cho là $x=\frac{\sqrt{21}-1}{4}\cdot$

Ví dụ 220. Giải phương trình: $(4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$ (*)

Olympic 30/04 – Đồng Bằng Sông Cửu Long

Phân tích. *Chuyển vế ta được:* $(4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1})=-3x(2+\sqrt{9x^2+3})$ *và lợi dụng tính chất của số chính phương, ta viết* $VP=(-3x)\left[2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right]$ *nên hy vọng vế trái đưa được về hàm đặc trưng dạng:* $f(t)=t.(2+\sqrt{t^2+3}).$ *Thật vậy, nếu có*

$(4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1})=(2x+1)(2+\sqrt{4x^2+4x+4})=(2x+1)\left[2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right]$

thì đã xây dựng được hàm đặc trưng dạng: $f(t)=t.(2+\sqrt{t^2+3})$ *ở hai vế.*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow(2x+1)\left[2+\sqrt{(2x+1)^2+1}\right]=(-3x)\left[2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right]\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)$

Xét hàm số $f(t)=t.(2+\sqrt{t^2+3})$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$

Nên $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(2x+1)=f(-3x)\Leftrightarrow 2x+1=-3x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{5}\cdot$

Ví dụ 221. Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{x+1}+(x-3)\sqrt{1-x}+2x=0$ (*)

Điều kiện: $-1\le x\le 1.$

Lời giải 1. Sử dụng phương pháp hàm số.

$(*)\Leftrightarrow(x+3)\sqrt{x+1}+x+1=(3-x)\sqrt{1-x}+1-x$

$\Leftrightarrow\left[(x+1)+2\right]\sqrt{x+1}+(x+1)=\left[(1-x)+2\right]\sqrt{1-x}+(1-x)$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x+1})^3+(\sqrt{x+1})^2+2\sqrt{x+1}=(\sqrt{1-x})^3+(\sqrt{1-x})^2+2\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt{1-x})$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$ và $f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 0.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0.$

Lời giải 2. Ghép hằng số để liên hợp sau khi sử dụng casio tìm được $x = 0.$

$(*) \Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{x+1} - 1) + (x-3)(\sqrt{1-x} - 1) + 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+3)}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{x(x-3)}{\sqrt{1-x}+1} + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt{x+1}+1} + 4 = \dfrac{x-3}{\sqrt{1-x}+1} \quad (i) \end{array}\right.$$

Do $x \in [-1;1]$, suy ra: $VT_{(i)} > 0, \ VP_{(i)} < 0$ nên phương trình (i) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0.$

Ví dụ 222. Giải: $(x+1)^2(4 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}) + x(x+1)(8 + 2\sqrt{4x^2 + 3}) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2x}$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0$. Do $x = -1$ không là nghiệm nên với $x \neq -1$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(4 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}) + x(8 + 2\sqrt{4x^2 + 3}) = \frac{1}{(x+1)} \cdot \frac{3x+1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[4 + \sqrt{(x+1)^2 + 3}\right] + 2x\left[4 + \sqrt{(2x)^2 + 3}\right] = \frac{3x+1}{2x^2 + 2x}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[4 + \sqrt{(x+1)^2 + 3}\right] = (-2x)\left[4 + \sqrt{(-2x)^2 + 3}\right] + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[4 + \sqrt{(x+1)^2 + 3}\right] - \frac{1}{x+1} = (-2x)\left[4 + \sqrt{(-2x)^2 + 3}\right] - \frac{1}{(-2x)}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = f(-2x).$$

Xét hàm số $f(t) = t(4 + \sqrt{t^2 + 3}) - \dfrac{1}{t}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ có:

$$f'(t) = 4 + \sqrt{t^2 + 3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} + \frac{1}{t^2} > 0, \ \forall t \neq 0$$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến.

Suy ra: $f(x+1) = f(-2x) \Leftrightarrow x + 1 = -2x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{1}{3}\cdot$

Nhận xét. *Trên đây tôi đã trình bày những dạng chuẩn, cơ bản trong việc sử dụng hàm số. Nhưng trong rất nhiều bài toán, hàm số đặc trưng được che dấu khá kỹ. Khi đó đòi hỏi người giải cần phải có kinh nghiệm biến đổi để bỏ đi lớp ngụy trang ấy, đưa về những dạng cơ bản quen thuộc, ta cùng xét các ví dụ sau để minh chứng điều này.*

Ví dụ 223. Giải phương trình: $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}$ $(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Do $x=0$ không là nghiệm nên xét $x\neq 0$.

Chia hai vế $(*)$ cho $x^3\neq 0$ ta được: $(*)\Leftrightarrow -2+\dfrac{10}{x}-\dfrac{17}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\dfrac{5}{x^2}-1}$ $\quad(i)$

Đặt $y=\dfrac{1}{x}$, $(y\neq 0)$ thì $(i)\Leftrightarrow 8y^3-17y+10y-2=2\sqrt[3]{5y^2-1}$

$\Leftrightarrow (2y-1)^3+2(2y-1)=(\sqrt[3]{5y^2-1})^3+2\sqrt[3]{5y^2-1}\Leftrightarrow f(2y-1)=f(\sqrt[3]{5y^2-1})$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$ và có:

$f(2y-1)=f(\sqrt[3]{5y^2-1})\Leftrightarrow 2y-1=\sqrt[3]{5y^2-1}\Leftrightarrow 8y^3-17y^2+6y=0$

$\Leftrightarrow y(8y^2-17y+6)=0\Leftrightarrow y=0$ (loại) hoặc $y=\dfrac{17\pm\sqrt{97}}{16}\Rightarrow x=\dfrac{1}{y}=\dfrac{17\mp\sqrt{97}}{12}$.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{17\mp\sqrt{97}}{12}$.

_Ví dụ 224._ Giải phương trình: $2x^2-x-\dfrac{1}{8}=\sqrt[3]{\dfrac{9}{8x^2}+\dfrac{1}{x}-1}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0$. Nhân hai vế $(*)$ cho x, ta được:

$(*)\Leftrightarrow 2x^3-x^2-\dfrac{1}{8}x=\sqrt[3]{\dfrac{9x}{8}+x^2-x^3}\Leftrightarrow x^3+x=-x^3+x^2+\dfrac{9x}{8}+\sqrt[3]{-x^3+x^2+\dfrac{9x}{8}}$

$\Leftrightarrow x^3+x=\left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\dfrac{9x}{8}}\right)^3+\sqrt[3]{-x^3+x^2+\dfrac{9x}{8}}\Leftrightarrow f(x)=f\left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\dfrac{9x}{8}}\right)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $f(x)=f\left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\dfrac{9x}{8}}\right)\Leftrightarrow x=-x^3+x^2+\dfrac{9x}{8}$

$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-\dfrac{9}{8}x=0\Leftrightarrow x(16x^2-8x-9)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{4}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có các nghiệm là $x=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{4}$.

_Ví dụ 225._ Giải phương trình: $\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{5-4x-x^2}=\dfrac{x}{2}+\sqrt{x+6}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $-5\le x\le 1$.

Đặt $y=\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}\ge 0\Rightarrow y^2=6+2\sqrt{(5+x)(1-x)}\Leftrightarrow \sqrt{5-4x-x^2}=\dfrac{y^2-6}{2}$.

$(*)\Leftrightarrow y+\dfrac{y^2-6}{2}=\dfrac{x}{2}+\sqrt{x+6}\Leftrightarrow y+\dfrac{y^2}{2}-3=\sqrt{x+6}+\dfrac{(\sqrt{x+6})^2}{2}-3$

$\Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{x+6})$.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{t^2}{2}-3$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t)=1+t>0,\ \forall t\ge 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ và có $f(y)=f(\sqrt{x+6})\Leftrightarrow y=\sqrt{x+6}.$

Suy ra: $\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{x+6}\Leftrightarrow 2\sqrt{5-4x-x^2}=x\Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{41}-8}{5}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{2\sqrt{41}-8}{5}\cdot$

Nhận xét. *Sự tinh tế trong lời giải trên là nhận ra* $\dfrac{x}{2}=\dfrac{(\sqrt{x+6})^2-6}{2}=\dfrac{(\sqrt{x+6})^2}{2}-3$ *dựa vào vế trái đã có hàm đặc trưng dự kiến* $y+\dfrac{y^2}{2}-3$ *và có lời giải đẹp như trên.*

Ví dụ 226. Giải: $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+4}+2\sqrt{12-x-x^2}=4x-2+\sqrt{4x+5}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $-4\le x\le 3.$

Đặt $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+4}\ge 0\Rightarrow y^2=7+2\sqrt{12-x-x^2}\Rightarrow 2\sqrt{12-x-x^2}=y^2-7.$

$(*)\Leftrightarrow y+y^2-7=4x-2+\sqrt{4x+5}\Leftrightarrow y+y^2-7=\sqrt{4x+5}+(\sqrt{4x+5})^2-7$

$\Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{4x+5}).$

Xét hàm số $f(t)=t+t^2-7$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t)=1+2t>0,\ \forall t\ge 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ và có $f(y)=f(\sqrt{4x+5})\Leftrightarrow y=\sqrt{4x+5}$

Suy ra: $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+5}\Leftrightarrow\sqrt{12-x-x^2}=2x-1\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{229}}{10}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{3+\sqrt{229}}{10}\cdot$

Nhận xét. *Một bài toán có dạng tổng – tích, nhưng khi đặt* $t=$ *tổng thì bình phương lên sẽ không biểu diễn x hết theo* t. *Lúc đó bạn hãy nháp thử có đưa được về dạng hàm số hay không, khi dựa vào hàm đặc trưng dự kiến bên vế phải* $f(t)=t+t^2-7$, *nếu không được lúc đó hãy suy nghĩ đến các phương án khác.*

Ví dụ 227. Giải phương trình: $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2+x+4}=\sqrt{x^2+x+5}+x$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $u=\sqrt{x^2+x+4}>0.$ Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{1+x^2}-u=\sqrt{u^2+1}+x\Leftrightarrow\sqrt{1+(-x)^2}+(-x)=\sqrt{1+u^2}+u\Leftrightarrow f(-x)=f(u).$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ trên $\mathbb{R}$ có:

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>0\ \forall t\in\mathbb{R};\ (do:\ 0<\sqrt{1+t^2}>\sqrt{t^2}=|t|>t).$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(-x)=f(u)\Leftrightarrow u=-x$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x+4}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2+x+4=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-4.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-4$.

Ví dụ 228. Giải: $5(x^2-x-6)\sqrt{5x-19}=(x+2)(x+5+4\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}+2)$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 3$.

$$(*)\Leftrightarrow 5(x+2)(x-3)\sqrt{5x-19}=(x+2)\left[(\sqrt{x-3})^2+4\sqrt{x-3}+2^2+4\right](\sqrt{x-3}+2)$$

$$\Leftrightarrow (5x-15)\sqrt{5x-19}=\left[(\sqrt{x-3}+2)^2+4\right](\sqrt{x-3}+2),\ (do: x+2>0,\ \forall x\ge 3)$$

$$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{5x-19})^2+4\right]\sqrt{5x-19}=(\sqrt{x-3}+2)^3+4.(\sqrt{x-3}+2)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-19})^3+4.\sqrt{5x-19}=(\sqrt{x-3}+2)^3+4.(\sqrt{x-3}+2)$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{5x-19})=f(\sqrt{x-3}+2) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+4t$ có $f'(t)=3t^2+4>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $\Leftrightarrow f(\sqrt{5x-19})=f(\sqrt{x-3}+2)\Leftrightarrow \sqrt{5x-19}=\sqrt{x-3}+2$

$$\Leftrightarrow 5x-19=x+1+4\sqrt{x-3}\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=x-5\Leftrightarrow x=7.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=7$.

Ví dụ 229. Giải phương trình: $\dfrac{4(1+\sqrt{1+4x})}{x+1+\sqrt{x^2+3x+2}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x>0$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{4+4\sqrt{1+4x}}{x+1+\sqrt{(x+1)(x+2)}}=\frac{1}{x}-\frac{x}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (4x)+(4x)\sqrt{1+(4x)}=\frac{(x+1)+\sqrt{(x+1)(x+2)}}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (4x)+(4x)\cdot\sqrt{1+(4x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}\Leftrightarrow f(4x)=f\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{1+t}$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=1+\sqrt{1+t}+\dfrac{t}{2\sqrt{1+t}}>0\ \forall t\in(0;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra: $f(4x)=f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\Leftrightarrow 4x=\dfrac{1}{x+1}\Leftrightarrow 4x^2+4x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\cdot$

Ví dụ 230. Giải: $\dfrac{(2x-1)^2(4x^2-4x+3)}{4}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}+2\sqrt{4x-4x^2+3}+4.$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\cdot$ Phương trình:

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x})+(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x})^2=\frac{(2x-1)^2}{2}+\left[\frac{(2x-1)^2}{2}\right]^2\quad(*)$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x})=f\left(\frac{(2x-1)^2}{2}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t+t^2$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t)=1+2t>0,\ \forall t\ge 0$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Suy ra: $f(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x})=f\left(\dfrac{(2x-1)^2}{2}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\dfrac{(2x-1)^2}{2}\quad(i)$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{2x+1}\ge 0\\ v=\sqrt{3-2x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2+v^2=4\\ u^2-v^2=4x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=4\\ \dfrac{1}{2}(u^2-v^2)=2x-1\end{cases}.$

Kết hợp với phương trình (i), được hệ $\begin{cases}u^2+v^2=4\\ u+v=\dfrac{(u^2-v^2)^2}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=4\\ 8=(u-v)^2(u+v)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=4\\ (u^2+v^2-2uv)(u+v)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^2-2uv=4\\ (2-uv)(u+v)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S^2-2P=4\\ (2-P)S=8\end{cases}$$

Với $\begin{cases}S=u+v\ge 0\\ P=uv\ge 0\end{cases}$, $(S^2\ge 4P)$ và giải hệ này được: $\begin{cases}P=0\\ S=2\end{cases}.$

Suy ra: $\begin{cases}u=2\\ v=0\end{cases}\vee\begin{cases}u=0\\ v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x+1}=2\\ \sqrt{3-2x}=0\end{cases}\vee\begin{cases}\sqrt{2x+1}=0\\ \sqrt{3-2x}=2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\vee x=-\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện nghiệm phương trình là $x=\dfrac{3}{2},\ x=-\dfrac{1}{2}\cdot$

Nhận xét. *Do tôi nhận ra:*
- $2\sqrt{4x-4x^2+3}=2\sqrt{(2x+1)(3-2x)}$
- $4=(\sqrt{2x+1})^2+(\sqrt{3-2x})^2$
- $(2x-1)^2(4x-4x+3)=(2x-1)^2\left[(2x-1)^2+2\right]$

nên đã mạnh dạn biến đổi về $(*)$, *để xây dựng hàm đặc trưng và sử dụng phương pháp hàm.*

Ví dụ 231. Giải phương trình: $1+\dfrac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{1-x}}=x+\dfrac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{2-2x}}\qquad(*)$

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.

Lời giải 1. Đánh giá bằng phương pháp hàm số.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{4-(x+3)}} - \dfrac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{4-(2x+2)}} = x-1 \Leftrightarrow f(x+3) - f(2x+2) = x-1 \quad (i)$

Nhận thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{4-t}}$ xác định trên đoạn $\left[0;4\right]$ có:

$f'(t) = \left(\dfrac{1+\sqrt{4-t}}{2\sqrt{t}} + \dfrac{\sqrt{t}}{2\sqrt{4-t}} \right) \cdot \dfrac{1}{(1+\sqrt{4-t})^2} > 0,\ \forall t \in \left(0;4\right)$. Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[0;4\right]$.

Nếu $x \in \left[-1;1\right)$, suy ra: $\begin{cases} x+3 > 2x+2 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+3) > f(2x+2) \\ x-1<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x+3) - f(2x+2) > 0 \\ x-1<0 \end{cases}$ thì phương trình (i) vô nghiệm khi $x \in \left[-1;1\right)$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bình luận. *Việc phát hiện ra hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{4-t}}$, $t \in \left[0;4\right]$ như trên là không khó, có thể thấy ngay từ việc quan sát biểu thức và đặt điều kiện xác định . Ở trên tôi đã sử dụng kết quả : " Nếu hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v;\ \forall\ u,\ v \in D$. Nếu $f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v;\ \forall\ u,\ v \in D$ ". Hiển nhiên kết quả trên cũng nhờ vào sự nhẩm được nghiệm duy nhất $x=1$ của phương trình nên sẽ chứng minh trong khoảng còn lại vô nghiệm. Ta hoàn toàn có thể đưa hẳn về dạng $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ bằng lời giải 2 như sau:*

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ, kết hợp với phương pháp hàm số.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{4-(x+3)}} - \dfrac{\sqrt{2x+2}}{1+\sqrt{4-(2x+2)}} = x-1 \qquad (i)$

Đặt $\begin{cases} u = x+3 \\ v = 2x+2 \end{cases} \Rightarrow v-u = x-1$ thì $(i) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{4-u^2}} - \dfrac{\sqrt{v}}{1+\sqrt{4-v^2}} = v-u$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{4-u}} + u = \dfrac{\sqrt{v}}{1+\sqrt{4-v}} + v \Leftrightarrow f(u) = f(v) \qquad (1)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{4-t^2}} + t$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;4\right]$ có:

$f'(t)=\left(\dfrac{1+\sqrt{4-t^2}}{2\sqrt{t}}+\dfrac{t\sqrt{t}}{\sqrt{4-t^2}}\right)\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{4-t^2})^2}+1>0,\ \forall t\in\left(0;4\right).$ Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[0;4\right]$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v,$ suy ra: $x+3=2x+2\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 232. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}-\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{-x^2-x+4}}=x^2-1\quad(*)$

Học sinh giỏi tỉnh Bình Phước

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}0\le x^2-x+2\le 4\\0\le x^2+x\le 4\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{4-(x^2-x+2)}}-\frac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{4-(x^2+x)}}=x^2-1$$

$$\Leftrightarrow f(x^2-x+2)-f(x^2+x)=x^2-1\qquad(i)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{4-t}}$ xác định và liên tục trên đoạn trên $\left[0;4\right]$ có:

$$f'(t)=\left(\frac{1+\sqrt{4-t}}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{4-t}}\right)\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{4-t})^2}>0,\ \forall t\in(0;4).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[0;4\right]$.

- Nếu $x\in\left[-1;1\right)\Rightarrow\begin{cases}x^2-x+2>x^2+x\\x^2-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x^2-x+2)>f(x^2+x)\\x^2-1<0\end{cases}$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x^2-x+2)-f(x^2+x)>0\\x^2-1<0\end{cases}$, suy ra (i) vô nghiệm khi $x\in\left[-1;1\right)$.

- Nếu $x\in\left(1;\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}x^2-x+2<x^2+x\\x^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x^2-x+2)<f(x^2+x)\\x^2-1>0\end{cases}$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x^2-x+2)-f(x^2+x)<0\\x^2-1>0\end{cases}$, suy ra (i) vô nghiệm khi $x\in\left(1;\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

- Thử trực tiếp, thấy $x=1$ thỏa $(*)$, nên $x=1$ là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

II. Sử dụng bất đẳng thức cổ điển để giải phương trình vô tỷ

1. Ý tưởng giải bài toán

- Biến đổi phương trình về: $f(x)=a,(a=const$ hoặc $a=h(x))$, mà trong đó ta dùng bất đẳng thức chứng minh được kết quả $f(x)\geq a$ hoặc $f(x)\leq a$. Lúc đó nghiệm là tất cả các giá trị thỏa mãn dấu "=" xảy ra.
- Biến đổi phương trình về dạng $f(x)=g(x)$, mà trong đó ta dùng BĐT chứng minh được: $\begin{cases} f(x)\leq a \\ g(x)\geq a \end{cases}$ hay $\begin{cases} f(x)\geq a \\ g(x)\leq a \end{cases}$, $(a=const$ hoặc $a=h(x))$.

  Lúc đó, nghiệm của phương trình là các giá trị x thỏa hệ: $\begin{cases} f(x)=a \\ g(x)=a \end{cases}$.

2. Các bất đẳng thức cổ điển thường được sử dụng

- Bất đẳng thức Cauchy:
  - Với $a,\ b\geq 0$ thì: $a+b\geq 2\sqrt{a.b}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.
  - Với $a,\ b,\ c\geq 0$ thì: $a+b+c\geq 3.\sqrt[3]{a.b.c}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.
- Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpxki):
  - Với $a,\ b,\ x,\ y$ bất kỳ ta luôn có: $\begin{cases} (a.x+b.y)^2\leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \\ |a.x+b.y|\leq \sqrt{(a^2+b^2).(x^2+y^2)} \end{cases}$.

    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$ hay $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\cdot$
  - Với $x,\ y,\ z$ bất kỳ thì: $\begin{cases} (a.x+b.y+c.z)^2\leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \\ |a.x+b.y+c.z|\leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \end{cases}$.

    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$ hay $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\cdot$
- Bất đẳng thức véctơ: cho $\vec{u}=(a;b),\ \vec{v}=(x;y),\ \vec{w}=(m;n)$ và khi đó:
  - $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq |\vec{u}+\vec{v}|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}\cdot$
  - $|\vec{u}-\vec{v}|\geq |\vec{u}|-|\vec{v}|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}\cdot$
  - $|\vec{u}|.|\vec{v}|\geq \vec{u}.\vec{v}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}\cdot$
  - $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\geq |\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{m}{n}\cdot$

♦ **<u>Lưu ý</u>**. Thông thường, tôi sẽ sử dụng casio để đi tìm nghiệm của phương trình (điểm rơi). Dựa vào điểm rơi này để ghép hợp lý khi sử dụng BĐT.

★ Các ví dụ sử dụng bất đẳng thức Cauchy, Cauchy – Schwarz

Ví dụ 233. Giải phương trình: $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=x^2-10x+27$ (*)

Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 402

Phân tích. *Do* $VP_{(*)}=x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2$ *và nếu đánh giá được vế trái* $VT_{(*)}=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\le 2$ *thì khả năng sử dụng bất đẳng thức để giải là rất cao. Thật vậy VT có dạng* $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ *với* $A+B=$ *hằng số, đó là dấu hiện nhận dạng sử dụng bất đẳng thức Cauchy hoặc Cauchy – Schwarz. Nếu* ***sử dụng Cauchy****, thì* ***chỉ số căn thức bấy nhiêu thì trong căn sẽ có bấy nhiêu hạng tử tích số bằng nhau****. Đối với căn thức* $\sqrt{x-4}$ *có một hạng tử, cần thêm một hạng tử hằng số dạng* $\sqrt{m.(x-4)}$ *với* $m=x-4=5-1$ *(do dự đoán được nghiệm duy nhất* $x=5$ *bằng casio và phù hợp với dấu* "=" *xảy ra ở vế phải). Ta cũng làm tương tự với căn thức* $\sqrt{6-x}$.

Điều kiện: $4\le x\le 6$.

Lời giải 1. Sử dụng Cauchy dạng $\sqrt{a.b}\le\dfrac{a+b}{2}\cdot$

$VP_{(*)}=x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \sqrt{x-4}=\sqrt{1.(x-4)}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{1+(x-4)}{2}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{x}{2}\\ \bullet\ \sqrt{6-x}=\sqrt{1.(6-x)}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{1+(6-x)}{2}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{x}{2}\end{array}\right\}\overset{\oplus}{\Rightarrow}VT_{(*)}=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\le 2\quad (2)$$

Từ (1), (2), suy ra $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\le 2\\ x^2-10x+27\ge 2\end{cases}$, nên nghiệm phương trình (*) là các giá trị để dấu "=" trong (1), (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=5$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Lời giải 2. Sử dụng Cauchy – Schwarz dạng $a.x+b.y\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

- Ta có: $f(x)=x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2$ (1)
- Mà: $g(x)=1.\sqrt{x-4}+1.\sqrt{6-x}\overset{Cauchy-Schwarz}{\le}\sqrt{2}\sqrt{x-4+6-x}=2$ (2)

Từ (1), (2), suy ra $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\le 2\\ x^2-10x+27\ge 2\end{cases}$, nên nghiệm phương trình (*) là các giá trị để dấu "=" trong (1), (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=5$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Ví dụ 234. Giải phương trình: $16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Nguyễn Văn Linh – Phú Yên

Phân tích. *Do* $VT_{(*)}=16x^4+5>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, *nên phương trình có nghiệm thì cần điều kiện kéo theo là* $\sqrt[3]{4x^3+x}=\sqrt[3]{x(4x^2+1)}>0\Leftrightarrow x>0$. *Sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất của phương trình là* $x=\dfrac{1}{2}$ *nên dựa vào điểm rơi này để tìm trọng số hợp lý sao cho khi áp dụng Cauchy đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra tại* $x=\dfrac{1}{2}\cdot$ *Đối với* $6\sqrt[3]{4x^3+x}=6.\sqrt[3]{mx.(4x^2+1).n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{m.n}}\cdot$ *Khi* $x=\dfrac{1}{2}$ *thì* $\begin{cases}mx=4x^2+1\\ n=4x^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=4\\ n=2\end{cases}\cdot$ *Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x>0$.

$VP_{(*)}=6.\sqrt[3]{4x^3+x}=3.\sqrt[3]{4x(4x^2+1).2}\overset{Cauchy}{\le}4x+4x^2+3$ (1)

$VT_{(*)}=16x^4+5\ge 4x^2+4x+3\Leftrightarrow(2x-1)^2(2x^2+2x+1)\le 0$: đúng $\forall x>0$ (2)

Do đó nghiệm của phương trình $(*)$ là tất cả các giá trị làm cho dấu của đẳng thức (1) và (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}4x=4x^2+1=2\\ 2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Ví dụ 235. Giải phương trình: $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$ $(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lê Quý Đôn – Ninh Thuận

Phân tích. *Phương trình* $\Leftrightarrow x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}$ *và sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất của phương trình là* $x=3$. *Vế phải có căn bậc bốn nên trong căn thức sẽ có 4 hạng tử tích số bằng nhau. Tức có* $8\sqrt[4]{4x+4}=\sqrt[4]{(4x+4).16.16.16}$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $4x+4\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$.

$(*)\Leftrightarrow x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}$ (1)

Ta có: $VP_{(1)}=8\sqrt[4]{4x+4}=\sqrt[4]{(4x+4).16.16.16}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{4x+52}{4}=x+13$ (2)

Mà: $x^3-3x^2-8x+40\ge x+13\Leftrightarrow(x-3)^2(x+3)\ge 0$: đúng $\forall x\ge -1$ (3)

Từ (2), (3), suy ra nghiệm (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) và (3) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}4x+4=16\\ x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 236. Giải phương trình: $\sqrt[3]{1-3x}\cdot\sqrt{1+2x}=2x^3+2x^2+1$ $(*)$

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được phương trình có nghiệm duy nhất* $x=0$. *Hình thức bài toán khó cho việc sử dụng liên hợp, hoặc hàm số nên ta sẽ nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức. Nhưng nếu sử dụng Cauchy thì biểu thức trong căn thức (bậc ba) phải dương. Với điều kiện* $1+2x\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}$ *thì* $2x^3+2x^2+1=2x^2(x+1)+1>0$ *nên để phương trình có nghiệm cần điều kiện:* $\sqrt[3]{1-3x}.\sqrt{1+2x}>0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\cdot$ *Do đó sẽ thêm bớt* $\sqrt[3]{(1-3x).a.b}$, $\sqrt{(1+2x).c}$ *để áp dụng BĐT Cauchy với điểm rơi là* $x=0$ *và các hạng tử tích trong căn thức bằng nhau nên* $a=b=1-3.0=1,\ c=1+2.0=1.$ *Từ những định hướng này, ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\cdot$

Ta có: $\left|\begin{array}{l}\bullet\ 0<\sqrt[3]{(1-3x).1.1}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{1-3x+1+1}{3}=1-x\\ \bullet\ 0<\sqrt{(1+2x).1}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{1+2x+1}{2}=1+x\end{array}\right\}\overset{nhân}{\Rightarrow}\sqrt[3]{1-3x}\sqrt{1+2x}\le 1-x^2\quad (1)$

Dấu "=" trong (1) xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Mà: $2x^3+2x^2+1\ge 1-x^2\Leftrightarrow x^2(2x+3)\ge 0$: đúng $\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$ (2)

Dấu "=" trong (2) xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Từ (1), (2), suy ra: $\begin{cases}\sqrt[3]{1-3x}\sqrt{1+2x}\le 1-x^2\\ 2x^3+2x^2+1\ge 1-x^2\end{cases}$, nên nghiệm (*) là tất cả các giá trị làm cho dấu "=" trong (1), (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Ví dụ 237. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$ (*)

Phân tích. *Sử dụng casio, nhận thấy phương trình có nghiệm duy nhất* $x=1$. *Bài toán có dạng* $\sqrt{A}+\sqrt{B}=$ *đa thức, ta hoàn toàn có thể giải bằng bất đẳng thức Cauchy cho từng căn thức sau đó cộng lại và dựa vào đó chứng minh vế còn lại hoặc sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Hiển nhiên cả 2 cách cần dựa vào điểm rơi* $x=1$ *để ghép hằng số hợp lý. Từ những phân tích này, có 2 lời giải chi tiết như sau:*

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+x-1\ge 0\\ -x^2+x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\le x\le \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot$

Lời giải 1. Sử dụng Cauchy dạng $\sqrt{a.b}\le \dfrac{a+b}{2}\cdot$ Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

Ta có: $\left|\begin{array}{l} \bullet\ \sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{1.(x^2+x-1)} \overset{Cauchy}{\le} =\dfrac{x^2+x}{2} \quad (1) \\ \bullet\ \sqrt{-x^2+x+1}=\sqrt{1.(-x^2+x+1)} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{-x^2+x+2}{2} \quad (2) \end{array}\right.$

$\overset{\oplus}{\Rightarrow} VT_{(*)}=\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}\le x+1 \quad (3)$

Dấu "=" trong (3) xảy ra khi và chi khi dấu "=" trong (1), (2) đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=1 \\ -x^2+x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ -x^2+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=-2 \\ x=0 \vee x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ta lại có: $VP_{(*)}=x^2-x+2=(x^2-2x+1)+(x+1)=(x-1)^2+(x+1)\ge x+1 \quad (4)$

Dấu "=" trong (4) xảy ra khi và chỉ khi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Từ (3), (4), suy ra: $\begin{cases} \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}\le x+1 \\ x^2-x+2\ge x+1 \end{cases}$, nên nghiệm phương trình (*) là các giá trị làm cho dấu "=" trong (3), (4) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2. Sử dụng Cauchy – Schwarch dạng $a.x+b.y\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

$VT_{(*)}=1.\sqrt{x^2+x-1}+1.\sqrt{x-x^2+1}\le\sqrt{(1^2+1^2)(x^2+x-1+x-x^2+1)}=2\sqrt{x} \quad (1)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x^2+x-1}{1}=\dfrac{x-x^2+1}{1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$.

$VP_{(*)}=x^2-x+2\ge2\sqrt{x}\Leftrightarrow(x-1)^2+(\sqrt{x}-1)^2\ge0$: đúng $\forall x\in\mathbb{R}$. (2)

Dấu Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{x}-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Từ (*), (1), (2), suy ra nghiệm phương trình là các giá trị làm dấu "=" trong (1), (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 238. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+4\sqrt{5-x}=12 \quad (*)$

Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le5$.

Lời giải 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ \sqrt{x+3}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(x+3).4} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+7}{2} \quad (1) \\ \bullet\ \sqrt{3x+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(3x+1).4} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3x+5}{2} \quad (2) \\ \bullet\ 4\sqrt{5-x}=2.\sqrt{(5-x).4} \overset{Cauchy}{\le} 9-x \quad (3) \end{cases}$

Suy ra: $(1)+(2)+(3) \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+4\sqrt{5-x} \le 12 \quad (4)$

Từ $(*)$, (4), suy ra nghiệm phương trình là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (1), (2), (3) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2. Cauchy – Chwarz dạng $ax+by+cz \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$.

Ta có: $1.\sqrt{x+3}+1.\sqrt{3x+1}+2.\sqrt{20-4x} \overset{Cauchy-SChwarz}{\le} \sqrt{1^2+1^2+2^2}.\sqrt{24}=12 \quad (5)$

Suy ra nghiệm làm cho dấu đẳng thức trong (5) xảy ra:

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}=\frac{\sqrt{20-4x}}{2} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 239. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=(7x^2-x+4)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Phân tích. *Nhận thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình và vế trái có nhiều căn phức tạp nên ta sẽ nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz bộ ba số để đánh giá $VT \le f(x)$. Rồi dựa vào $f(x)$ và điểm rơi $x=-1$ để tách ghép vế phải nhằm chứng minh $VP \ge f(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy dạng $a+b \ge 2\sqrt{ab}$.*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 3x^2-1 \ge 0 \\ x^2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hoặc $x \ge 1$.

Áp dụng Cauchy – Schwarz dạng $ax+by+cz \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$ có:

$$1.\sqrt{3x^2-1}+1.\sqrt{x^2-x}+(-x)\sqrt{x^2+1} \overset{(i)}{\le} \sqrt{1^2+1^2+(-x)^2}\sqrt{3x^2-1+x^2-x+x^2+1}$$

Suy ra: $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1} \le \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} \quad (1)$

Ta có: $VP=(7x^2-x+4)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[(5x^2-x)+2(x^2+2)\right]$ và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $(5x^2-x)$; $2(x^2+2)$, ta được:

$$(5x^2-x)+2(x^2+2) \overset{Cauchy}{\ge} 2\sqrt{(5x^2-x).2(x^2+2)}=2\sqrt{2}\sqrt{(5x^2-x).(x^2+2)} \quad (2)$$

Từ (1), (2), suy ra: $\begin{cases} \sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1} \le \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} \\ (7x^2-x+4)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4} \ge \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} \end{cases}$, nên có nghiệm của phương trình đã cho là tất cả các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (1), (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-1=x^2-x \\ 5x^2-x=2(x^2+2) \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Ví dụ 240. Giải phương trình: $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ (*) ***(MO Yugoslavia)***

Phân tích. *Sử dụng casio tìm được nghiệm xấu và ta tiếp tục sử dụng casio tìm được nhân tử bậc hai dạng* x^2-x-1 *bằng chức năng table. Đối với* $\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot 1}$ *và áp dụng Cauchy thì dấu đẳng thức xảy ra khi* $x-\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0$ *phù hợp với nhân tử vừa tìm được. Còn* $\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}(x-1)}$ *và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cũng đạt dấu đẳng thức tại* $\frac{1}{x}=x-1=x^2-x-1=0.$ *Từ đó có lời giải như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$

Ta có:
$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{1.\left(x-\frac{1}{x}\right)}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{1+x-\frac{1}{x}}{2}\\ \bullet\ \sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}\cdot(x-1)}\overset{Cauchy}{\le}\dfrac{\frac{1}{x}+x-1}{2}\end{array}\right\}\overset{\oplus}{\Rightarrow} VP_{(*)}=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\le x \quad (1)$$

Suy ra nghiệm của phương trình (*) là tất cả các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\begin{cases}1=x-\frac{1}{x}\\ \frac{1}{x}=x-1\end{cases}\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \vee\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm là $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Ví dụ 241. Giải phương trình: $\sqrt[4]{6x-x^2-8}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}=x^3+30$

Phân tích. *Do biểu thức:* $\sqrt[4]{6x-x^2-8}=\sqrt[4]{(4-x)(x-2)}=\sqrt{\sqrt{(4-x).(x-2)}}$, *giúp ta suy nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng:* $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ *sẽ phù hợp với điểm rơi* $x=3$ *được tìm bằng casio và* $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}$ *thuộc dạng* $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ *có* $A+B$ *là một hằng số nên sẽ áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Công việc còn lại là tách ghép* $6x\sqrt{3x}$ *hợp lý dựa vào điểm rơi* $x=3.$ *Nếu dựa vào điểm rơi này, đa số học sinh sẽ áp dụng* $\sqrt{3.x}=\frac{3+x}{2}$ *thì sẽ khó khăn cho việc còn lại. Do ta ước lượng được tổng hai đánh giá trên* $\le 3,$ *nên ta sẽ áp dụng Cauchy cho* $6x\sqrt{3x}$ *sao cho*

$6x\sqrt{3x} \le 27 + x^3$ để $VT \le x^3 + 30$, tức: $6x\sqrt{3x} = 2.\sqrt{27.x^3} \overset{Cauchy}{\le} 27 + x^3$, vẫn đảm bảo dấu $"="$ xảy ra tại vị trí $x = 3$ và có lời giải chi tiết như sau:

Lời giải. Điều kiện: $2 \le x \le 4$.

Ta có: $\sqrt[4]{-x^2 + 6x - 8} = \sqrt{\sqrt{(4-x).(x-2)}} \overset{Cauchy}{\le} \sqrt{\dfrac{4 - x + x - 2}{2}} = 1 \qquad (1)$

Dấu $"="$ của (1) xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Mặt khác: $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 1.\sqrt{\sqrt{x-2}} + 1.\sqrt{\sqrt{4-x}} \overset{Cauchy-SChwarz}{\le} \sqrt{2(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})}$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1.\sqrt{x-2} + 1.\sqrt{4-x}} \overset{Cauchy-SChwarz}{\le} \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(1^2+1^2)(x-2+4-x)}} = 2 \quad (2)$$

Dấu $"="$ của (2) xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Ta lại có: $6x\sqrt{3x} = 2.\sqrt{27.x^3} \overset{Cauchy}{\le} 27 + x^3 \qquad (3)$

Dấu $"="$ của (2) xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

$(1) + (2) + (3) \Rightarrow VT_{(*)} = \sqrt[4]{-x^2 + 6x - 8} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \le x^3 + 30 = VP_{(*)}$

Suy ra nghiệm của phương trình là các giá trị làm cho dấu $"="$ trong (1), (2), (3) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ví dụ 242. Giải phương trình: $\sqrt{8 - x^2} + \sqrt{\dfrac{x^2 - 2}{2x^2}} = 5 - \dfrac{1 + x^2}{x} \qquad (*)$

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$. Do đó ta cần thêm trọng số để áp dụng được bất đẳng thức Cauchy đảm bảo dấu $"="$ xảy ra tại vị trí $x = 2$. Với $\sqrt{8 - x^2} = \sqrt{(8 - x^2)\cdot m} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{m}} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(8 - x^2)\cdot 4}$ (chọn $m = 4$ do sau khi áp dụng Cauchy có dấu $"="$ tại $8 - x^2 = m$, với $x = 2 \Rightarrow m = 4$). Ta sẽ làm tương tự cho $\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}} = \sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2} \cdot m} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{m}} = 2.\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2} \cdot \dfrac{1}{4}}$ và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2} \le x \le -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ta có:

- $\sqrt{8 - x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(8 - x^2)\cdot 4} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{12 - x^2}{2} = 3 - \dfrac{x^2}{4} \qquad (1)$
- $\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2} \cdot \dfrac{1}{4}} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{x^2-2}{2x^2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x^2} \qquad (2)$

$(1) + (2) \Rightarrow VT_{(*)} = \sqrt{8 - x^2} + \sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}} \le \dfrac{15}{4} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{x^2} \qquad (3)$

Dấu $"="$ trong (3) xảy ra khi dấu $"="$ trong (1), (2) đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x^2=4 \\ \dfrac{x^2-2}{2x^2}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 2.$$

Ta lại có: $5-\dfrac{1+x^2}{x} \ge \dfrac{15}{4}-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ (4)

Dấu "=" trong (4) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-1=0 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Từ (3), (4), suy ra: $\sqrt{8-x^2}+\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}} \le \dfrac{15}{4}-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{x^2} \le 5-\dfrac{1+x^2}{x}$, nên nghiệm phương trình $(*)$ là các giá trị làm cho dấu "=" trong (3), (4) xảy ra $\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2.$

Ví dụ 243. Giải phương trình: $x^2.\sqrt[4]{2-x^4}-1=x^4-x^3$ $(*)$

Phân tích. *Sử dụng casio tìm được phương trình có nghiệm duy nhất* $x=1$ *và do* $x=0$ *không là nghiệm nên* $(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{2-x^4}+x=x^2+\dfrac{1}{x^2}\cdot$ *Nhận thấy vế phải có dạng nghịch đảo gợi ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy, còn vế trái sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Cchwarz 2 lần sẽ triệt tiêu đi biến x và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $2-x^4 \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt[4]{2} \le x \le \sqrt[4]{2}.$

Do $x=0$ không là nghiệm nên $(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{2-x^4}+x=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (1)

Ta có: $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{x^2} \overset{Cauchy}{\ge} 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}=2 & (2) \\ 1.\sqrt[4]{2-x^4}+1.x \le \sqrt{2}.\sqrt{\sqrt{2-x^4}+x^2} \le \sqrt{2}.\sqrt{\sqrt{2}.\sqrt{(2-x^4)+x^4}}=2 & (3) \end{cases}$

Nghiệm phương trình (1) là các giá trị làm cho dấu "=" trong (2), (3) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{1}{x^2} \\ \sqrt[4]{2-x^4}=x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

Ví dụ 244. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\dfrac{4(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})}{3(\sqrt{x-2}+1)^2}=3$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 2.$ Suy ra: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}>0,\ \forall x \ge 2.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \frac{4}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}+1)} = 3 \qquad (1)$$

Đặt $a=\sqrt{x+1}, b=\sqrt{x-2},\ (a>b\geq 0)$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow a + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} = 3 \qquad (2)$

Ta có: $a + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} = (a-b) + \left(\dfrac{b+1}{2}\right) + \left(\dfrac{b+1}{2}\right) + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} - 1$

$$\overset{Cauchy}{\geq} 4.\sqrt[4]{(a-b)\cdot\left(\frac{b+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{b+1}{2}\right)\cdot\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}} - 1 = 3 \qquad (3)$$

Suy ra nghiệm của phương trình (2) là các giá trị làm cho dấu $"="$ trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{x-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3.$

Nhận xét. *Việc đánh giá* $a + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3$ *là một kỹ thuật tách cặp nghịch đảo để áp dụng được bất đẳng thức Cauchy khá cơ bản. Việc áp dụng này dựa theo ý tưởng: "tách phần nguyên theo mẫu số để sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy được hằng số hoặc biến số giống (hoặc gần giống) vế phải". Bạn đọc có thể tìm hiểu và rèn luyện các bài bất đẳng thức cơ bản này trong đề cương học tập toán 10 của cùng tác giả trên trang web: w.w.w.mathvn.com, trang 115.*

Ví dụ 245. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{x+5+\sqrt{2(x^2+1)}} = (1-x)\sqrt{1-x} + \dfrac{3-3\sqrt{x}}{2} \qquad (*)$

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất của phương trình là* $x=1.$ *Vế trái có dạng phân số với tử số dạng căn nên sẽ nghĩ đến việc áp dụng BĐT Cauchy dạng* $\sqrt{A}+\sqrt{B} \leq f(x).$ *Nên cần đánh giá mẫu số* $\geq ?...$ *để cả phân số cùng dấu* $\leq$ *và biểu thức mẫu có chứa* $\sqrt{2(x^2+1)} = \sqrt{(1^2+1^2)(x^2+1^2)},$ *gợi ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Chwarz viết ngược dạng:* $\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \geq a.x+b.y.$ *Kiểm tra lại thấy dấu* $"="$ *xảy ra khi* $x=1,$ *phù hợp với dự đoán bằng casio nên hướng đi là đúng.*

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $0 \leq x \leq 1.$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{3x+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(3x+1)\cdot 4} \overset{Cauchy}{\leq} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3x+5}{2} \\ \sqrt{x+3} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(x+3)\cdot 4} \overset{Cauchy}{\leq} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+7}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3} \leq x+3$

Dấu $"="$ trong (1) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3x+1=4 \\ x+3=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Mà: $x+5+\sqrt{2(x^2+1)}=x+5+\sqrt{(1^2+1^2)(x^2+1^2)}\overset{Cauchy-Schwarz}{\geq}x+5+x+1=2(x+3)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Suy ra: $\dfrac{1}{x+5+\sqrt{2(x^2+1)}}\leq\dfrac{1}{2(x+3)}$ (2)

Lấy (1) nhân (2) theo vế, suy ra: $VT_{(*)}=\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{x+5+\sqrt{2(x^2+1)}}\leq\dfrac{x+3}{2(x+3)}=\dfrac{1}{2}$ (3)

$VP_{(*)}=(1-x)\sqrt{1-x}+\dfrac{3-3\sqrt{x}}{2}\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)^3}+(1-\sqrt{x})\geq 0$: đúng $\forall x\in\left[0;1\right]$ (4)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

Từ (3), (4), suy ra: $\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{x+5+\sqrt{2(x^2+1)}}\leq\dfrac{1}{2}\leq(1-x)\sqrt{1-x}+\dfrac{3-3\sqrt{x}}{2}$, nên nghiệm (*) là các giá trị làm cho dấu "=" trong (3), (4) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 246. Giải phương trình: $2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10=\dfrac{5(x^2+4x+9)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{4}{3}\leq x\leq\dfrac{1}{3}\cdot$

Ta có: $2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}=2.\sqrt{10-6x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8+6x}\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq}\sqrt{4+\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{18}=9.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{10-6x}}{2}=\sqrt{2}.\sqrt{8+6x}\Leftrightarrow x=-1.$

Nên: $2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1\leq 10\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}\geq\dfrac{1}{10}$

Suy ra: $VP=\dfrac{5(x^2+4x+9)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}\geq\dfrac{5(x^2+4x+9)}{10}=\dfrac{x^2+4x+9}{2}$ (1)

$VT=2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10\leq\dfrac{x^2+4x+9}{2}\Leftrightarrow x^2-2x+29-4(x+5)\sqrt{1-3x}\geq 0$

$\Leftrightarrow(x+5)^2-2.(x+5).2\sqrt{1-3x}+4(1-3x)\geq 0\Leftrightarrow(x+5-2\sqrt{1-3x})^2\geq 0$: đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x+5-2\sqrt{1-3x}=0\Leftrightarrow x=-1.$

Hay: $VT=2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10\leq\dfrac{x^2+4x+9}{2},\ \forall x\in\left[-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right]$ (2)

Từ (1), (2), suy ra nghiệm phương trình tại vị trí dấu "=" ở (1), (2) $\Leftrightarrow x=-1$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Ví dụ 247. Giải phương trình: $\sqrt{3-2x^2}+\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}=1+\dfrac{(x^2+4x+1)^4}{16x^4}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lê Quý Đôn – Vũng Tàu

Lời giải. Điều kiện: $3-2x^2\ge 0$ và $3-\dfrac{2}{x^2}\ge 0$.

Đặt $y=\dfrac{x^2+4x+1}{2x}$, suy ra hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+4=2y & (1)\\ \sqrt{3-2x^2}+\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}=1+y^4 & (2)\end{cases}$

Lấy $(2)-2.(1)\Rightarrow(\sqrt{3-2x}-2x)+\left(\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}-\dfrac{2}{x}\right)=y^4-4y+9$ (3)

Ta có: $\begin{cases}\bullet\ 1.\sqrt{3-2x}+(-\sqrt{2}).(x\sqrt{2})\overset{Cauchy-Schwarz}{\le}\sqrt{1+2}.\sqrt{3-2x+2x}=3 & (4)\\ \bullet\ 1.\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}+(-\sqrt{2}).\dfrac{\sqrt{2}}{x}\overset{Cauchy-Schwarz}{\le}\sqrt{1+2}.\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}=3 & (5)\end{cases}$

Lấy $(4)+(5)\Rightarrow VT_{(3)}=(\sqrt{3-2x}-2x)+\left(\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}-\dfrac{2}{x}\right)\le 6$ (6)

$VP_{(3)}=y^4-4y+9=6+(y-1)^2(y^2+2y+3)=6+(y-1)^2\left[(y+1)^2+2\right]\ge 6$ (7)

Do đó nghiệm của phương trình (3) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức của (6), (7) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu đẳng thức ở (4), (5), (7) đồng thời xảy ra, tức:

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=\dfrac{x^2+4x+1}{2x}=1\\ \dfrac{\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}}{1}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{x}}{-\sqrt{2}};\ \dfrac{\sqrt{3-2x}}{1}=\dfrac{x\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3-2x}=-x\\ \sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}=-\dfrac{1}{x}\\ x^2+2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Ví dụ 248. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-x^2-2x$ (*)

Phân tích. *Để ý các biểu thức trong và ngoài căn có thể đưa về dạng hằng đẳng thức dạng* $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2\ge 0$ *và kết hợp với dự đoán nghiệm duy nhất* $x=-1$ *bằng casio nên sẽ có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $4-x^2-2x\ge 0$?! $\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le x\le -1+\sqrt{5}$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2$ (1)

Ta có: $\begin{cases} VT_{(1)}=\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}\ge\sqrt{4}+\sqrt{9}=5 & (2)\\ VP_{(1)}=5-(x+1)^2\le 5 & (3)\end{cases}$

Suy ra nghiệm phương trình đã cho là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2), (3) đồng thời xảy ra $x=-1$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Ví dụ 249. Giải phương trình: $\sqrt{4-x^2}+2.\sqrt[3]{x^4-4x^3+4x^2}=(x-1)^2+1-|x|$ (*)

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 lần 2 – THPT Chuyên Đại học Vinh

Lời giải. Điều kiện: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

$(*)\Leftrightarrow |x|+\sqrt{4-x^2}=x^2-2x-2.\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2$ (1)

Ta có: $\left(|x|+\sqrt{4-x^2}\right)^2=4+2|x|\sqrt{4-x^2}\ge 4,\ \forall x\in[-2;2]$.

Suy ra: $|x|+\sqrt{4-x^2}\ge 2,\ \forall x\in[-2;2]$ (2)

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $x=\pm 2$.

Đặt $t=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, và do $\forall x\in[-2;2]$ nên suy ra: $t\in[-1;2]$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow |x|+\sqrt{4-x^2}=t^3-2t^2+2$ với $t\in[-1;2]$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2+2$ trên $[-1;2]$ có $f'(t)=3t^2-4t=0\Leftrightarrow t=0\vee t=\frac{4}{3}\cdot$

Tính $f(-1)=-1,\ f(0)=2,\ f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{22}{27},\ f(2)=2\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} f(t)=2\Rightarrow f(t)\le 2$.

Do đó $x^2-2x-2\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2\le 2$ (4)

Dấu đẳng thức trong (4) xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $x=\pm 2$.

Suy ra nghiệm của phương trình (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) và trong (4) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=0,\ x=\pm 2$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-2,\ x=0,\ x=2$.

★ Các ví dụ sử dụng bất đẳng thức véctơ

Ví dụ 250. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$ (*)

Phân tích. *Các biểu thức trong căn thức đưa được về dạng bình phương, nhưng ta sẽ không làm được như ví dụ trên do điểm rơi của bài toán là* $x=\frac{1}{5}$ *khi dò bằng casio. Nhưng để ý, biểu thức trong căn thức có dạng tổng của 2 bình phương (môđun của véctơ) gọi ta sử dụng bất đẳng thức véctơ dạng:* $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$. *Tức biến đổi phương trình* $\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{29}$ *và chọn* $\vec{u}=(x-1;\ 2),\ \vec{v}=(x+1;\ 3)$. *Nhưng do vế phải là hằng số nên ta cần điều chỉnh lại cách chọn véctơ* $\vec{u}$ *hoặc* $\vec{v}$ *để triệt tiêu x khi tính* $\vec{u}+\vec{v}$ *và điều chỉnh đó có thể là* $\vec{u}=(1-x;\ 2),\ \vec{v}=(x+1;\ 3)$ *do tính chất số chính phương, ta luôn có:* $(x-1)^2=(1-x)^2$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{29}$ (1)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai véctơ $\vec{u}=(1-x;\ 2)$, $\vec{v}=(x+1;\ 3)$.

Suy ra: $\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(1-x)^2+2^2}\\ |\vec{v}|=\sqrt{(x+1)^2+3^2}\end{cases}$, $\begin{cases}\vec{u}+\vec{v}=(2;5)\\ |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}\end{cases}$

Mà ta luôn có: $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}\ge\sqrt{29}$ (2)

Từ (1), (2), suy ra nghiệm của phương trình $(*)$ là các giá trị làm cho dấu $"="$ trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x+1}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{5}\cdot$

Ví dụ 251. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-4x+2}+\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{9x^2-12x+13}$ $(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+1^2}+\sqrt{(x-1)^2+2^2}=\sqrt{(3x-2)^2+3^2}$ (1)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai véctơ: $\vec{u}=(2x-1;\ 1)$, $\vec{v}=(x-1;2)$.

Suy ra: $\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(2x-1)^2+1^2}\\ |\vec{v}|=\sqrt{(x-1)^2+2^2}\end{cases}$ và $\vec{u}+\vec{v}=(3x-2;\ 3)\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(3x-2)^2+3^2}$.

Ta có: $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+1^2}+\sqrt{(x-1)^2+2^2}\ge\sqrt{(3x-2)^2+3^2}$ (2)

Từ (1), (2), suy ra nghiệm của phương trình là các giá trị làm cho dấu $"="$ trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=\dfrac{1}{3}\cdot$

Ví dụ 252. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-6x+10}=\sqrt{5}$ $(*)$

Phân tích. *Phương trình* $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2}-\sqrt{(x-3)^2+1^2}=\sqrt{5}$ *với vế trái có dạng hiệu và biểu thức bên trong có dạng tổng hai bình phương gợi ý ta sử dụng bất đẳng thức véctơ dưới dạng* $|\vec{u}|-|\vec{v}|\le|\vec{u}-\vec{v}|$ *với việc chọn* $\vec{u}=(x-1;2)$ *và* $\vec{v}=(x-3;1)$ *vì khi tính* $\vec{u}-\vec{v}$ *thì x sẽ triệt tiêu phù hợp với vế phải là hằng số và có lời giải như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2}-\sqrt{(x-3)^2+1^2}=\sqrt{5}$ (1)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai véctơ: $\vec{u}=(x-1;2)$, $\vec{v}=(x-3;1)$.

Suy ra: $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(x-3)^2 + 1^2} \end{cases}$ và $\vec{u} - \vec{v} = (2;1) \Rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$

Ta luôn có: $|\vec{u}| - |\vec{v}| \le |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} - \sqrt{(x-3)^2 + 1^2} \le \sqrt{5}$ (2)

Từ (1), (2), suy ra nghiệm của phương trình là các giá trị làm cho dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-3} = \dfrac{2}{1} \Leftrightarrow x = 5.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 5.$

Ví dụ 253. Giải: $\sqrt{25x^2 - 20x + 13} - \sqrt{x^2 + 6x + 13} = \sqrt{16x^2 - 40x + 26}$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(5x-2)^2 + 3^2} - \sqrt{(x+3)^2 + 2^2} = \sqrt{(4x-5)^2 + 1^2}$ (1)

Chọn: $\begin{cases} \vec{u} = (5x-2;\ 3) \\ \vec{v} = (x+3;\ 2) \\ \vec{u} - \vec{v} = (4x-5;\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(5x-2)^2 + 3^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2} \\ |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(4x-5)^2 + 1^2} \end{cases}.$

Ta luôn có: $|\vec{u}| - |\vec{v}| \le |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(5x-2)^2 + 3^2} - \sqrt{(x+3)^2 + 2^2} \le \sqrt{(4x-5)^2 + 1^2}$ (2)

Từ (1), (2), suy ra nghiệm của phương trình (*) là các giá trị làm cho dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{5x-2}{x+3} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{7}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{13}{7}\cdot$

Ví dụ 254. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 - 20x + 34} + \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 1} = 6\sqrt{2}$ (*)

Phân tích. *Phương trình* $\Leftrightarrow \sqrt{(2x-5)^2 + 3^2} + \sqrt{(x+1)^2 + 2^2} + \sqrt{x^2 + 1} = 6\sqrt{2}$ *với các biểu thức trong căn đều có dạng* $\sqrt{f^2(x) + a^2}$, *gợi ta sử dụng bất đẳng thức véctơ dưới dạng* $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \ge |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$. *Cần biến đổi* $(2x-5)^2 = (5-2x)^2$ *để các biến x triệt tiêu do vế phải là hằng số và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(2x-5)^2 + 3^2} + \sqrt{(x+1)^2 + 2^2} + \sqrt{x^2 + 1} = 6\sqrt{2}$ (2)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét $\vec{u} = (5-2x;3)$, $\vec{v} = (1+x;2)$, $\vec{w} = (x;1)$.

Suy ra: $|\vec{u}| = \sqrt{(5-2x)^2 + 3^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(x+1)^2 + 2^2}$, $|\vec{w}| = \sqrt{x^2 + 1}$ và

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (6;6)$ nên $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = 6\sqrt{2}.$

Có: $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| + \left|\vec{w}\right| \ge \left|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right| \Leftrightarrow \sqrt{(2x-5)^2 + 3^2} + \sqrt{(x+1)^2 + 2^2} + \sqrt{x^2+1} = 6\sqrt{2}$ (2)

Từ (1), (2), suy ra nghiệm của phương trình là các giá trị làm cho dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng chiều $\Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 1$.

Nhận xét. *Qua các ví dụ, nhận thấy dấu hiệu nhận dạng giải phương trình vô tỷ bằng các bất đẳng thức* $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u} + \vec{v}\right|$; $\left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right| \le \left|\vec{u} - \vec{v}\right|$ *và* $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| + \left|\vec{w}\right| \ge \left|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right|$ *là các biểu thức trong căn đều có thể biến đổi được về dạng:* $\sqrt{(ax \pm b)^2 + \alpha^2}$ (*). *Lúc đó, ta cần chọn tọa độ véctơ dựa vào* (*) *theo công thức tính môđun véctơ hợp lý.*

Ví dụ 255. Giải phương trình: $x\sqrt{3x+2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2(x^2+1)(x+3)}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04 – THPT Bình Phú – Tp. HCM

Phân tích. *$VT = x.\sqrt{3x+2} + 1.\sqrt{4-x}$ làm ta nhớ đến "hoành nhân hoành + tung nhân tung", nghĩa là tích hai véctơ $\vec{u}.\vec{v} = x.\sqrt{3x+2} + 1.\sqrt{4-x}$ với véctơ $\vec{u} = (x;\ 1)$ và $\vec{v} = (\sqrt{3x+2}; \sqrt{4-x})$. Khi đó hiển nhiên liên quan đến bất đẳng thức véctơ dạng: $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ và nếu tính được $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = VP$ thì việc giải phương trình đi đúng hướng. Thật vậy $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2+1}.\sqrt{2x+6} = \sqrt{2(x^2+1)(x+3)} = VP$ và có lời giải như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{2}{3} \le x \le 4$.

$$(*) \Leftrightarrow x.\sqrt{3x+2} + 1.\sqrt{4-x} = \sqrt{x^2+1}.\sqrt{2x+6} \quad (1)$$

Chọn: $\begin{cases} \vec{u} = (x;1) \\ \vec{v} = (\sqrt{3x+2}; \sqrt{4-x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{u}\right| = \sqrt{x^2+1} \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{(\sqrt{3x+2})^2 + (\sqrt{4-x})^2} = \sqrt{2x+6} \end{cases}$

Suy ra: $\vec{u}.\vec{v} = x.\sqrt{3x+2} + 1.\sqrt{4-x}$ và $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2+1}.\sqrt{2x+6}$.

Ta luôn có: $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow x.\sqrt{3x+2} + 1.\sqrt{4-x} \le \sqrt{x^2+1}.\sqrt{2x+6}$ (2)

Từ (1), (2), suy ra nghiệm của phương trình là các giá trị làm cho dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{3x+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} \Leftrightarrow x\sqrt{4-x} = \sqrt{3x+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2(4-x) = 2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 1 + \sqrt{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm là $x = 2,\ x = 1 + \sqrt{2}$.

Ví dụ 256. Giải phương trình: $-x\sqrt{2-3x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{x^2+1}.\sqrt{3-4x}$ $(*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Long An – Tỉnh Long An

Lời giải. Điều kiện: $2-3x\le 0$. Chọn: $\vec{u}=(-x;1)$, $\vec{v}=(\sqrt{2-3x};\sqrt{1-x})$.

Suy ra: $\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{x^2+1}\\|\vec{v}|=\sqrt{3-4x}\end{cases}$ và $\begin{cases}|\vec{u}|.|\vec{v}|=\sqrt{x^2+1}.\sqrt{3-4x}\\\vec{u}.\vec{v}=-x\sqrt{2-3x}+\sqrt{1-x}\end{cases}$.

Ta luôn có: $\vec{u}.\vec{v}\le|\vec{u}|.|\vec{v}|\Leftrightarrow -x\sqrt{2-3x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{x^2+1}.\sqrt{3-4x}$ (1)

Từ $(*)$, (1), suy ra nghiệm của $(*)$ là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều $\dfrac{\sqrt{2-3x}}{-x}=\dfrac{\sqrt{1-x}}{1}\Leftrightarrow\sqrt{2-3x}=-x\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\2-3x=x^2(1-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\(x-2)(x^2+x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\text{: TMĐK.}$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 257. Giải phương trình: $(3-x)\sqrt{x-1}+\sqrt{5-2x}=\sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $1\le x\le\dfrac{5}{2}$. Chọn: $\vec{u}=(3-x;1)$ và $\vec{v}=(\sqrt{x-1};\sqrt{5-2x})$.

Suy ra: $\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(3-x)^2+1}\\|\vec{v}|=\sqrt{4-x}\end{cases}$ và $\begin{cases}\vec{u}.\vec{v}=(3-x)\sqrt{x-1}+\sqrt{5-2x}\\|\vec{u}|.|\vec{v}|=\sqrt{(3-x)^2+1}\sqrt{4-x}=\sqrt{40-34x+10x^2-x^3}\end{cases}$

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}\le|\vec{u}|.|\vec{v}|\Leftrightarrow(3-x)\sqrt{x-1}+\sqrt{5-2x}\le\sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$ (1)

Từ $(*)$, (1), suy ra nghiệm của $(*)$ là các giá trị làm cho dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow\dfrac{3-x}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}\Leftrightarrow(3-x)\sqrt{5-2x}=\sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0\\(3-x)^2(5-2x)=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\2x^3-17x^2+49x-46=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất: $x=2$.

III. Đưa về tổng các số không âm hoặc dạng $A^n = B^n$.

Dấu hiện nhận dạng: Hệ số trước căn thức thường là những số chẵn.

1. Đưa về tổng các số không âm

Dùng các biến đổi hoặc tách ghép (chủ yếu là hằng đẳng thức) để đưa về dạng tổng các số không âm $A^2 + B^2 + \sqrt{C} + \cdots = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$.

2. Biến đổi về dạng $A^n = B^n$.

Biến đổi đưa phương trình về dạng: $a^n = b^n$, $(n \in \mathbb{N}^+) \Leftrightarrow a = b$ nếu n lẻ và $a^n = b^n$, $(n \in \mathbb{N}^+) \Leftrightarrow |a| = |b|$ nếu n chẵn.

★ Các ví dụ đưa về tổng các số không âm

Ví dụ 258. Giải phương trình: $4\sqrt{x+1} = 2x^2 - 11x + 23$ (*)

Phân tích. *Nhận thấy hệ số trước dấu căn là số chẵn nên có rất nhiều khả năng đưa được về dạng tổng hai số không âm bằng hằng đẳng thức:* $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ *và khi phân tích nên xuất phát từ* $\pm 2.a.b$ *để thêm bớt dễ dàng hơn.*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1$.

$(*) \Leftrightarrow (x + 1 - 2.\sqrt{x+1}.2 + 2^2) + 2(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 2)^2 + 2(x-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 4 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ví dụ 259. Giải phương trình: $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$ (*)

Phân tích. *Cũng xuất phát từ* $-2.2.\sqrt{x+3};\ -2.1.\sqrt{3-2x}$ *sẽ đưa được về dạng :* $A^2 + B^2 = 0$ *và có cách giải 1. Ngoài ra, nếu sử dụng casio tìm được 1 nghiệm duy nhất* $x = 1$, *do đó ta sử dụng tách, ghép hợp lý để nhân lượng liên hợp đưa về phương trình tích số và có lời giải 2.*

Điều kiện: $\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ 3 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le \dfrac{3}{2}$.

Lời giải 1. Đưa về tổng hai số không âm

$(*) \Leftrightarrow 11 - x - 4\sqrt{x+3} - 2\sqrt{3-2x} = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4) + (3 - 2x - 2\sqrt{3-2x} + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + (\sqrt{3-2x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2 = 0 \\ \sqrt{3-2x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2. Liên hợp khi sử dụng casio tìm được nghiệm duy nhất $x=1$.

$(*) \Leftrightarrow 4(\sqrt{x+3}-2)+2(\sqrt{3-2x}-1)+(x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{4(x-1)}{\sqrt{3-2x}+1}+(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x+3}+2}-\dfrac{4}{\sqrt{3-2x}+1}+1=0 \quad (i)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+2}-\dfrac{4}{\sqrt{3-2x}+1}+1$ trên đoạn $\left[-3;\dfrac{3}{2}\right]$ có:

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+2)^2}+\frac{4}{\sqrt{3-2x}(\sqrt{3-2x}+1)^2}>0,\ \forall x\in\left(-3;\frac{3}{2}\right).$$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên đoạn $\left[-3;\dfrac{3}{2}\right]$.

Suy ra $\min\limits_{\left[-3;\frac{3}{2}\right]} f(x)=f(-3)=2$ hay $VT_{(i)}\geq 2$ nên phương trình (i) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét. *Qua hai lời giải, nhận thấy lời giải 1 ngắn gọn và dễ dàng hơn. Do đó khi bắt gặp phương trình vô tỷ mà hệ số trước căn thức là những số chẵn, bạn hãy ưu tiên phương pháp đưa về tổng các số không âm hoặc dạng $A^n=B^n$.*

Ví dụ 260. Giải phương trình: $4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}=4x^2+3x+3$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $2x-1\geq 0$.

$(*) \Leftrightarrow (4x^2-2.2x.\sqrt{x+3}+x+3)+(1-2.\sqrt{2x-1}+2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow (2x-\sqrt{x+3})^2+(1-\sqrt{2x-1})^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\sqrt{x+3}=0 \\ 1-\sqrt{2x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bình luận. *Đây là một bài toán khá đơn giản nếu nhìn nhận với góc độ tổng các số không âm với dấu hiệu là có hằng số chẵn trước căn thức. Tuy nhiên, trong quá trình giảng dạy, khi tôi đưa bài toán này ra, đa số các bạn học sinh đều sử dụng liên hợp do đã quen tay với thao tác casio và tìm được nghiệm duy nhất $x=1$. Hiển nhiên sẽ gặp nhiều rắc rối cho dù đó là liên hợp thông thường hay truy ngược dấu ?!.......*

Ví dụ 261. Giải phương trình: $x^4-x^2+3x+5-2\sqrt{x+2}=0$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq -2$.

$(*) \Leftrightarrow (x^4-2x^2+1)+(x^2+2x+1)+(x+2-2\sqrt{x+2}+1)=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2+(x+1)^2+(\sqrt{x+2}-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x+1=0 \\ \sqrt{x+2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất: $x=-1$.

Ví dụ 262. Giải phương trình: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\ 2x^2+5x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\left[(x+1)^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}+3x+1\right]+\left[x+2-2\sqrt{(x+2)(2x+1)}+2x+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1-\sqrt{3x+1})^2+(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1})^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3x+1}=x+1\\ \sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 263. Giải phương trình: $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}) \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $1\le x\le\dfrac{9}{5}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow 4x^2+12+\sqrt{x-1}-4x\sqrt{5x-1}-4\sqrt{9-5x}=0$$

$$\Leftrightarrow(4x^2-2.2x.\sqrt{5x-1}+5x-1)+\left[4-2.2.\sqrt{9-5x}+9-5x\right]+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow(2x-\sqrt{5x-1})^2+(2-\sqrt{9-5x})^2+\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\sqrt{5x-1}=0\\ 2-\sqrt{9-5x}=0\\ \sqrt{x-1}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1$.

Ví dụ 264. Giải: $12x^2+16x+1-2\sqrt{24x^3+12x^2-6x}-4\sqrt{x^2-x}=4\sqrt{8x^3+9x^2+x}$

Lời giải. Điều kiện: $24x^3+12x^2-6x\ge 0\ \wedge\ x^2-x\ge 0\ \wedge\ 8x^3+9x^2+x\ge 0.$

$$(*)\Leftrightarrow\left[6x-2\sqrt{6x(4x^2+2x-1)}+4x^2+2x-1\right]+(1-2\sqrt{4x^2-4x}+4x^2-4x)$$

$$+\left[4x^2+4x-2\sqrt{(4x^2+4x)(1+8x)}+1+8x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{6x}-\sqrt{4x^2+2x-1})^2+(1-\sqrt{4x^2-4x})^2+(\sqrt{4x^2+4x}-\sqrt{1+8x})^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{6x}-\sqrt{4x^2+2x-1}=0\\ 1-\sqrt{4x^2-4x}=0\\ \sqrt{4x^2+4x}-\sqrt{1+8x}=0\end{cases}\Leftrightarrow 4x^2-4x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}\cdot$$

Kết luận: Thế vào điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot$

Ví dụ 265. Giải phương trình: $3x+\dfrac{1}{\sqrt{2x-7}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}=2(\sqrt[4]{2x-7}+\sqrt[4]{x-3}+5).$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-7>0 \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{7}{2}\cdot$ Phương trình

$$\Leftrightarrow\left[(2x-7)-2\sqrt[4]{2x-7}+\frac{1}{\sqrt{2x-7}}\right]+\left[(x-3)-2\sqrt[4]{x-3}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left((\sqrt[4]{2x-7})^2\right)^2-2\sqrt[4]{2x-7}+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x-7}}\right)^2+\left((\sqrt[4]{x-3})^2\right)^2-2\sqrt[4]{x-3}+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x-3}}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[(\sqrt[4]{2x-7})^2-\frac{1}{\sqrt[4]{2x-7}}\right]^2+\left[(\sqrt[4]{x-3})^2-\frac{1}{\sqrt[4]{x-3}}\right]^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt[4]{2x-7}\right)^2-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x-7}}=0\\ \left(\sqrt[4]{x-3}\right)^2-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-3}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt[4]{2x-7}\right)^3=1\\ \left(\sqrt[4]{x-3}\right)^3=1\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

Ví dụ 266. Giải phương trình: $\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x>0$. Ta có: $(*)\Leftrightarrow 3\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$$\Leftrightarrow 3\left[(\sqrt[4]{x})^2-2\sqrt[4]{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^2}\right]+\left(2-\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\frac{3x^2-6x+3}{(2\sqrt{x^2-x+1}+x+1).\sqrt{x^2-x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\frac{3(x-1)^2}{(2\sqrt{x^2-x+1}+x+1).\sqrt{x^2-x+1}}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}=0\\ x-1=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=1\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1:$ thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Ví dụ 267. Giải phương trình: $\dfrac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5}=\dfrac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}$ (*)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Định

Lời giải. Điều kiện: $2 \le x \le 4$.

Bản chất bài toán có 2 căn thức, để đơn giản, đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-2} \ge 0 \\ b = \sqrt{4-x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1+(4-x)\sqrt{x-2}}{1+(4-x)-\sqrt{4-x}} = \frac{2+2(x-2)\sqrt{x-2}}{(x-2)+1} \Leftrightarrow \frac{1+ab^2}{1+b^2-b} = \frac{2+2a^3}{a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (1+ab^2)(a^2+1) = (2+2a^3)(b^2-b+1)$$

$$\Leftrightarrow a^2+1+a^3b^2+ab^2 = 2b^2-2b+2+2a^3b^2-2a^3b+2a^3$$

$$\Leftrightarrow (a^3+a^3b^2-2a^3b)+2b^2-2b+1+a^3-a^2-ab^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[a^3(b^2-2b+1)+(b^2-2b+1)\right]+b^2-ab^2+a^3-a^2=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2-2b+1)(a^3+1)+2-a^2-a(2-a^2)+a^3-a^2=0,\ (\text{do}: b^2=2-a^2)$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2(a^3+1)+2a^3-2a^2-2a+2=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2(a^3+1)+2a^2(a-1)-2(a-1)=0 \Leftrightarrow (b-1)^2(a^3+1)+2(a-1)(a^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2(a^3+1)+2(a-1)^2(a+1)=0 \qquad (i)$$

Do $a,\ b \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} a+1>0 \\ a^3+1>0 \end{cases}$, nên $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{4-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 268. Giải phương trình: $\dfrac{1+2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{3-x-\sqrt{2-x}} = 2\cdot\dfrac{1+x\sqrt{x}}{1+x}$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 3-x-\sqrt{2-x} \ne 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x} \ge 0 \\ b=\sqrt{2-x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=2.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1+2a-a.a^2}{3-a^2-b} = 2\cdot\frac{1+a^3}{1+a^2} \xleftrightarrow{\text{do}:\ a^2=2-b^2} \frac{1+2a-a(2-b^2)}{3-(2-b^2)+b} = 2\cdot\frac{1+a^3}{1+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+ab^2}{b^2-b+1} = \frac{2+2a^3}{a^2+1} \Leftrightarrow (b-1)^2(a^3+1)+2(a-1)^2(a+1)=0 \ \text{(như ví dụ trên).}$$

Suy ra: $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{2-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

★ Các ví dụ đưa về dạng $\mathbf{A^n = B^n}$

Ví dụ 269. Giải phương trình: $4x^2+14x+11 = 4\sqrt{6x+10}$ $(*)$

Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 420

Phân tích. *Phương trình có chứa một dấu căn nên có các hướng sau để giải quyết: một là lũy thừa, hai là đặt ẩn số phụ, ba là nhân liên hợp. Do khi lũy thừa, đặt ẩn phụ thì sẽ đưa đến phương trình bậc 4, đòi hỏi kỹ năng nhẩm nghiệm và nghiệm đó phải*

đẹp, còn bài này thì nghiệm xấu nên ta không chọn hai phương án này cũng như không chọn nhân lượng liên hợp. Phép biến đổi tương đương về dạng tổng hai số không âm cũng không tồn tại và hướng giải quyết kế đến là đưa về dạng $a^n = b^n$ *với* $n = 2$ *bằng cách tách ghép hằng đẳng thức và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -\frac{5}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 4 + 2.2.\sqrt{6x+10} + (6x+10) = 4x^2 + 20x + 25 \Leftrightarrow (2+\sqrt{6x+10})^2 = (2x+5)^2$

$\Leftrightarrow \left|2+\sqrt{6x+10}\right| = |2x+5| \Leftrightarrow 2+\sqrt{6x+10} = 2x+5$

$$\left(\text{do}: x \ge -\frac{5}{3} \Rightarrow 2+\sqrt{6x+10} > 0;\ 2x+5 \ge -\frac{5}{3}.2+5 > 0\right)$$

$\Leftrightarrow \sqrt{6x+10} = 2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{3}{2} \\ 4x^2+6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{13}-3}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{\sqrt{13}-3}{4}\cdot$

Ví dụ 270. Giải phương trình: $x^2 + 6\sqrt{3x+1} - x - 9 = 0$ $(*)$

Phân tích. *Tương tự thí dụ trên, với manh mối là:* $6\sqrt{3x+1} = 2.3.\sqrt{3x+1}$ *có dạng* $-2ab$ *sau khi chuyển vế nên ta phân tích thành hằng đẳng thức và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $3x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 9 - 2.3.\sqrt{3x+1} + (3x+1) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow (3-\sqrt{3x+1})^2 = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow \left|3-\sqrt{3x+1}\right| = |x+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3-\sqrt{3x+1} = x+1 & (1) \\ 3-\sqrt{3x+1} = -x-1 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ 3x+1 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7-\sqrt{37}}{2}\cdot$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x^2 + 5x + 15 = 0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{7-\sqrt{37}}{2}\cdot$,

Ví dụ 271. Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 - (x+1)\sqrt{x+2} + 6x = 4\sqrt{x+2} - 6$ $(*)$

Phân tích. *Phương trình có đa thức bậc ba và biểu thức chứa căn có thể viết về dạng bậc ba với quan niệm:* $(x+1)\sqrt{x+2} = [(\sqrt{x+2})^2 - 1]\sqrt{x+2} = (\sqrt{x+2})^3 - \sqrt{x+2}$. *Do đó, ta tách ghép để đưa* $(*)$ *về dạng* $a^n = b^n$ *với* $n = 3$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -2$.

$(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \left[(\sqrt{x+2})^2 - 1\right]\sqrt{x+2} + 4\sqrt{x+2} - 3x - 7$

$\Leftrightarrow (x-1)^3 = (\sqrt{x+2})^3 - 3(\sqrt{x+2})^2 + 3\sqrt{x+2} - 1 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (\sqrt{x+2}-1)^3$

$\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{x+2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 2$.

Ví dụ 272. Giải: $8x^3 - 36x^2 + (1-3x)\sqrt{3x-2} - 2\sqrt{3x-2} + 63x - 32 = 0 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{2}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = \left[(3x-2)+1\right]\sqrt{3x-2} + 2\sqrt{3x-2} - 9x + 5$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3 = (\sqrt{3x-2})^3 - 3(\sqrt{3x-2})^2 + 3\sqrt{3x-2} - 1$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3 = (\sqrt{3x-2}-1)^3 \Leftrightarrow 2x-3 = \sqrt{3x-2} - 1 \Leftrightarrow x = 2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 2.$

Ví dụ 273. Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 + 12x - 3x\sqrt{-3x-2} + \sqrt{-3x-2} + 6 = 0 \quad (*)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Bảo Lộc – Lâm Đồng

Lời giải. Điều kiện: $-3x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\dfrac{2}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (-3x-2)\sqrt{-3x-2} + 3\sqrt{-3x-2} - 3(-3x-2) = -x^3 - 3x^2 - 3x$

$\Leftrightarrow (\sqrt{-3x-2})^3 - 3(\sqrt{-3x-2})^2 + 3\sqrt{-3x-2} - 1 = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 3(-x) - 1$

$\Leftrightarrow (\sqrt{-3x-2}-1)^3 = (-x-1)^3 \Leftrightarrow \sqrt{-3x-2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 + 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = -2,\ x = -1.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 360. Giải phương trình: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 361. Giải phương trình: $3\sqrt[4]{3-2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x^3 = 6. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 362. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+48} = 4x - 13 + \sqrt{x^2+9}. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 363. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1}. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 364. Giải phương trình: $x^3 + 2x^2 - 1 = 15(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2})^3. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 365. Giải phương trình: $(2x-7)(\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3}) - 5. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 366. Giải phương trình: $2(x-3)(\sqrt[3]{x+4} + 2\sqrt{2x-7}) = 3x - 4. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 367. Giải phương trình: $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} + 12 = x^2. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 368. Giải phương trình: $\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} = \dfrac{5}{2x-11}\cdot \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 369. Giải phương trình: $\sqrt{x + \sqrt{x^2-1}} = 32(x-1)^2\sqrt{2x-2}. \quad (x \in \mathbb{R})$

BT 370. Giải phương trình: $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x-1}}+\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{3x+2}=\sqrt{3x-2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 371. Giải phương trình: $2x^4-3x^3-14x+16=(28-4x^3)\sqrt{2x^3-15}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 372. Giải phương trình: $2\sqrt{4x^2-x+1}+2x=3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}.$

BT 373. Giải: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\dfrac{x^2+x}{(x^2+x+1)(2x^2+2x+1)}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 374. Giải phương trình: $4x^3-7x+\sqrt[3]{4x^3-3x+1}=\sqrt[3]{4x-2}-3.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 375. Giải phương trình: $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 376. Giải phương trình: $8x^3-12x^2+5x=\sqrt[3]{3x-2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 377. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{2x-1}=27x^3-27x^2+13x-2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 378. Giải phương trình: $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 379. Giải phương trình: $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 380. Giải phương trình: $4x^2+18x+\dfrac{14}{x}+27=\sqrt[3]{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 381. Giải phương trình: $8x^3+8x-4=\sqrt[3]{4-6x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 382. Giải phương trình: $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 383. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 384. Giải phương trình: $9x^2-28x+21=\sqrt{x-1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 385. Giải phương trình: $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 386. Giải phương trình: $3x^3-6x^2-3x-17=3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 387. Giải phương trình: $x^3+x\sqrt{x}=(x+4)(x+5).$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 388. Giải phương trình: $2x^3+x^2-3x+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 389. Giải phương trình: $4x^3+x-(x+1)\sqrt{2x+1}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 390. Giải phương trình: $x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 391. Giải phương trình: $x^3+3x^2+5x+3=(x^2+3)\sqrt{x^2+1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 392. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\dfrac{1}{x+2}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 393. Giải phương trình: $x^3+(2+3\sqrt{5-3x})x-7\sqrt{5-3x}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 394. Giải phương trình: $3x(2+\sqrt{9x^2+3})=(x+1)(2+\sqrt{x^2+2x+4}).$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 395. Giải phương trình: $5x\sqrt{25x^2+2}+(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11}+7x+3=0.$

BT 396. Giải phương trình: $(8x-6)\sqrt{x-1}=(2+\sqrt{x-2})(x+4\sqrt{x-2}+3).$

BT 397. Giải phương trình: $x^3+x^2-15x+30=4\sqrt[4]{27(x+1)}$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 398. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 399. Giải phương trình: $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=x^2-12x+38$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 400. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}=2-\dfrac{x^4}{4}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 401. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+6x+12}+\sqrt{5x^2+10x+9}=3-2x^2-4x$

BT 402. Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 403. Giải phương trình: $x\sqrt{x}+\sqrt{12-x}=2\sqrt{3(x^2+1)}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 404. Giải phương trình: $x+2\sqrt{x+3}+4\sqrt{2-x^2}=3\sqrt{11+x-3x^2}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 405. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 406. Giải phương trình: $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$

BT 407. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x+6}=\sqrt{17}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 408. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{13}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 409. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+10x+74}-\sqrt{x^2-6x+10}=10$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 410. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{9x^2-6x+2}=\sqrt{x^2+2x+2}$

BT 411. Giải: $\sqrt{x^2-4x+8}+\sqrt{4x^2+12x+10}+\sqrt{9x^2-30x+50}=10$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 412. Giải phương trình: $x+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x^2-10x+16}+3$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 413. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=\sqrt{2}.\sqrt{x^2-2x+2}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 414. Giải phương trình: $(2-x)\sqrt{x}+\sqrt{3-2x}=\sqrt{-x^3+7x^2-17x+15}$

BT 415. Giải phương trình: $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 416. Giải: $3x\sqrt{5x-6}+\sqrt{-4x^2+19x-12}=\sqrt{36x^3-2x^2-20x+6}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 417. Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 418. Giải phương trình: $x^2-x+6=4\sqrt{1-3x}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 419. Giải phương trình: $x^2-4\sqrt{3x+1}+2x+7=2x\sqrt{2-x}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 420. Giải phương trình: $4x^2\sqrt{x+2}+4\sqrt{3x-2}=x^4+7x+10$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 421. Giải phương trình: $2x\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=2x^2+x+2$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 422. Giải phương trình: $x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+2x^2-6x+20=0$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 423. Giải phương trình: $4x^2+\sqrt{2x+3}=8x+1$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 424. Giải phương trình: $9x^2-18x=31-12\sqrt{6x-1}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 425. Giải phương trình: $(2x+2)\sqrt{2x-1}+x^3-9x^2+33x-29=0$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

BT 426. Giải phương trình: $3x\sqrt{3x+2}+14\sqrt{3x+2}=27x^3-162x^2+342x-196$

§5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ



I. Bất phương trình vô tỷ cơ bản

① $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \ge 0 \\ A < B^2 \end{cases}$.

② $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases}$.

③ $\sqrt{A} \le B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A \ge 0 \\ A \le B^2 \end{cases}$.

④ $\sqrt{A} \ge B \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \ge 0 \\ A \ge B^2 \end{cases}$.

⑤ $\sqrt[3]{A} > B \Leftrightarrow A > B^3$.

⑥ $\sqrt[3]{A} < B \Leftrightarrow A < B^3$.

⑦ $A.\sqrt[2n]{B} \ge 0 \Leftrightarrow B = 0 \vee \begin{cases} B > 0 \\ A \ge 0 \end{cases}$.

⑧ $\dfrac{\sqrt[2n]{A}}{B} \ge 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases}$.

⑨ $\dfrac{1}{\sqrt{A}} > \dfrac{1}{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B > 0 \\ \sqrt{A} < B \end{cases}$.

⑩ $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B \end{cases}$.

★ Nhóm bất phương trình cơ bản hoặc đưa về dạng cơ bản

Ví dụ 273. Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$ (*)

Phân tích. *Phương trình có dạng cơ bản* $\sqrt{A} - \sqrt{B} > \sqrt{C}$, *khi đó ta cần đặt điều kiện, rồi chuyển vế sao cho hai vế đều dương và bình phương lên sẽ đưa được về các dạng cơ bản. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 2$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} > \sqrt{2x-4} + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 5x - 1 = 3x - 5 + 2\sqrt{(2x-4)(x-1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-4)(x-1)} < x + 2 \ ^{(i)} \Leftrightarrow (2x-4)(x-1) < (x+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là: $x \in [2;10)$.

Nhận xét. *Trong (i) do 2 vế đều dương nên tôi đã bình phương trực tiếp mà không sử dụng công thức cơ bản* $\sqrt{A} < B$.

Ví dụ 274. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 4$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)} > 10 - 2x \ ^{(i)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \ge 0 \\ 10 - 2x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 10 - 2x \ge 0 \\ 2(x^2-16) > (10-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5 \vee \begin{cases} x \le 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ 10-\sqrt{34} < x \le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 10-\sqrt{34}.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $x \in (10-\sqrt{34}; +\infty)$.

Nhận xét. *Trong (i) do với điều kiện $x \ge 4$ thì $10-2x$ chưa biết dấu nên ta phải áp dụng đúng công thức:* $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases}$.

Ví dụ 275. Giải bất phương trình: $\left(x - \dfrac{2x+4}{2x-5}\right)\sqrt{10x-3x^2-3} \ge 0$ (*)

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \left(\dfrac{2x^2-7x-4}{2x-5}\right)\sqrt{10x-3x^2-3} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x-3x^2-3=0 \\ \begin{cases} 10x-3x^2-3>0 \\ \dfrac{2x^2-7x-4}{2x-5} \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \vee x=\dfrac{1}{3} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{3} < x < 3 \\ -\dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{5}{2} \vee x \ge 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{5}{2} \end{array}\right..$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $x \in \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{2}\right) \cup \{3\}$.

Nhận xét. *Bất phương trình có dạng cơ bản 7:* $A\sqrt[2n]{B} \ge 0 \Leftrightarrow B = 0 \vee \begin{cases} B > 0 \\ A \ge 0 \end{cases}$.

Thông thường thì học sinh quên đi trường hợp $B=0$ và bỏ sót đi nghiệm.

Ví dụ 276. Giải bất phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3x-5}} \ge \dfrac{1}{2x-1}$ (*)

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1<0 \\ 2x^2+3x-5>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1>0 \\ \sqrt{2x^2+3x-5} < 2x-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x < -\dfrac{5}{2} \vee x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x^2+3x-5>0 \\ 2x^2+3x-5 \le 4x^2-4x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -\dfrac{5}{2} \vee \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x < -\dfrac{5}{2} \vee x > 1 \\ x \le \dfrac{3}{2} \vee x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -\dfrac{5}{2} \vee 1 < x \le \dfrac{3}{2} \vee x > 2.$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right] \cup \left[2; +\infty\right)$.

Nhận xét. *Trong bài giải trên, tôi đã sử dụng công thức tương tự như dạng cơ bản ⑨, cụ thể:* $\frac{1}{\sqrt{A}} \geq \frac{1}{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B > 0 \\ \sqrt{A} \leq B \end{cases}$. *Ngoài ra, có thể giải bằng cách: tìm điều kiện và chia ra từng khoảng của điều kiện để xác định mẫu dương hay âm và bỏ mẫu để đưa về những dạng cơ bản.*

★ Nhóm bất phương trình sử dụng chia khoảng & tách căn

Ví dụ 277. Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} \leq \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$ (*)

Đại học Dược Hà Nội

Phân tích. *Nhận thấy các biểu thức trong căn có một nghiệm chung là* $x = 3$, *làm cho ta suy nghĩ đến việc tách căn, rồi đặt thừa số chung và có lời giải như sau:*

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ 4x^2 - 18x + 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \ \vee \ x \leq 3 \\ x \geq 3 \ \vee \ x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq 3 \ \vee \ x \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq -5 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)(x-3)} + \sqrt{(x+5)(x-3)} \leq \sqrt{(x-3)(4x-6)} \quad (1)$$

- Trường hợp 1. Nếu $x = 3$ thì (1) luôn đúng nên $x = 3$ là một nghiệm của (1).
- Trường hợp 2. Nếu $x \geq 5$, suy ra: $x - 5 \geq 0$; $x - 3 > 0$; $x + 5 > 0$; $4x - 6 > 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \sqrt{x-3}(\sqrt{x-5} + \sqrt{x+5}) \leq \sqrt{x-3}\sqrt{4x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 2x + 2\sqrt{x^2 - 25} \leq 4x - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \sqrt{x^2 - 25} \leq x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - 25 \leq x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x \leq \frac{17}{3} \Rightarrow x \in \left[5; \frac{17}{3}\right].$$

- Trường hợp 3. Nếu $x \leq -5$, suy ra: $x - 5 < 0$, $x - 3 < 0$, $x + 5 \leq 0$, $4x - 6 < 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(5-x)(3-x)} + \sqrt{(-x-5)(3-x)} \leq \sqrt{(3-x)(6-4x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x}(\sqrt{5-x} + \sqrt{-x-5}) \leq \sqrt{3-x}\sqrt{6-4x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{-x-5} \leq \sqrt{6-4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ -2x + 2\sqrt{x^2 - 25} \leq 6 - 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ \sqrt{x^2 - 25} \leq 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x^2 - 25 \leq x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq \frac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -5 \Rightarrow x \in \left(-\infty; -5\right].$$

Kết luận: Hợp 3 trường hợp, tập nghiệm là $x \in \{3\} \cup \left(-\infty; -5\right] \cup \left[5; \frac{17}{3}\right]$.

Ví dụ 278. Giải BPT: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\le 1$ hoặc $x\ge 4$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-1)(x-3)}\ge 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$ (1)

- Trường hợp 1. Nếu $x=1$ thì (1) đúng $\Rightarrow x=1$ là một nghiệm của (1).
- Trường hợp 2. Nếu $x<1$ thì $x-1<0,\ x-2<0,\ x-3<0,\ x-4<0$:

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(2-x)}+\sqrt{(1-x)(3-x)}\ge 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}(\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x})\ge 2\sqrt{1-x}.\sqrt{4-x}\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}\ge 2\sqrt{4-x}$ (2)

Ta có: $\forall x<1\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2-x}<\sqrt{4-x}\\ \sqrt{3-x}<\sqrt{4-x}\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}<2\sqrt{4-x}$ (3)

Từ (2), (3), suy ra (2) vô nghiệm khi $x<1$.

- Trường hợp 3. Nếu $x\ge 4$ thì $x-1>0,\ x-2>0,\ x-3>0,\ x-4>0$:

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})\ge 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{x-4}$ (4)

Ta có: $\forall x\ge 4\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2}\ge\sqrt{x-4}\\ \sqrt{x-3}\ge\sqrt{x-4}\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{x-4}$ (5)

Từ (4), (5), suy ra (5) luôn đúng $\forall x\ge 4$, nên luôn có $x\in[4;\infty)$.

Kết luận: Hợp ba trường hợp, suy ra tập nghiệm là $x\in\{1\}\cup[4;\infty)$.

Nhận xét. *Tương tự như ví dụ trước, tôi đã dùng phương pháp chia khoảng – tách căn. Nhưng trong (2), (4) do các biểu thức chứa x bậc nhất và đồng hệ số nên ta dễ dàng so sánh và đánh giá để kết luận tập nghiệm như đã trình bày. Nếu không phát hiện ra điều này, ta có thể giải bằng cách bình phương hai vế (do luôn dương) để đưa về bất phương trình cơ bản như đã trình bày ở phần lý thuyết nhưng dài dòng.*

Ví dụ 279. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x^2-4x+3\ge 0\\ 2x^2-3x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\ \vee\ x\ge 3\\ x\le \dfrac{1}{2}\ \vee\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x\le \dfrac{1}{2}\\ x\ge 3\end{array}\right.$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-3)}-\sqrt{(x-1)(2x-1)}\ge x-1$ (1)

- Trường hợp 1. Nếu $x=1$ thì (1) đúng $x=1$ là nghiệm của (1).
- Trường hợp 2. Nếu $x\ge 3$ thì $x-1>0,\ x-3\ge 0,\ 2x-1>0$, lúc đó:

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1})\ge(\sqrt{x-1})^2\Leftrightarrow \sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1}\ge\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}\le-\sqrt{2x-1}$: vô nghiệm do $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}>0,\ \forall x\ge 3$.

- Trường hợp 3. Nếu $x\le\dfrac{1}{2}$ thì $x-1<0,\ x-3<0,\ 2x-1\le 0$, lúc đó:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1-x}(\sqrt{3-x}-\sqrt{1-2x}) \ge -(\sqrt{1-x})^2 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}-\sqrt{1-2x} \ge -\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3-x}+\sqrt{1-x} \ge \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 4-2x+2\sqrt{(3-x)(1-x)} \ge 1-2x$

$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{(3-x)(1-x)} \ge 0$: luôn đúng $\forall x \le \frac{1}{2}$, nên luôn có $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Kết luận: Hợp ba trường hợp, tập nghiệm là $x \in \{1\} \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

★ Nhóm bất phương trình có mẫu số

Đối với bất phương trình chứa mẫu số, hướng xử lý thường gặp là xét mẫu số và khử mẫu. Nghĩa là mẫu dương thì bỏ mẫu làm cho bất phương trình không đổi dấu , còn nếu mẫu âm thì bất phương trình đổi dấu. Còn nếu thật sự chưa biết dấu của nó thì không thể bỏ ngay được mà cần phải chia ra hai trường hợp âm, dương và bỏ mẫu hoặc đưa về bất phương trình dạng tích – thương và xét dấu . Do đó, khi bỏ mẫu ta cần lý luận hoặc chứng minh mẫu đó luôn dương hay luôn âm. Công cụ để đánh giá điều này thường là đưa về các hằng đẳng thức với: $\sqrt{(ax \pm b)^2 + c} \ge \sqrt{c}$, $\sqrt{c-(ax+b)^2} \le \sqrt{c}$, $a-(bx+c)^2 \le a$...... *hoặc sử dụng phương pháp phản chứng hoặc bất đẳng thức cổ điển hoặc cực trị của hàm số,… Để làm rõ ý tưởng này, ta cùng xét các ví dụ sau:*

Ví dụ 280. Giải bất phương trình: $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x^2+3x+2 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -2$ hoặc $x \ge -1$.

Ta có: $1-2\sqrt{x^2-x+1} = 1-\sqrt{(2x-1)^2+3} \le 1-\sqrt{3} < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 3-2\sqrt{x^2+3x+2} < 1-2\sqrt{x^2-x+1},\ (\text{do}: 1-2\sqrt{x^2-x+1} < 0)$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2-x+1} < \sqrt{x^2+3x+2} \Leftrightarrow x^2-x+2+2\sqrt{x^2-x+1} < x^2+3x+2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} < 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2-x+1 \ge 0 \\ x^2-x+1 < 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^2+x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $x \in \left(\frac{\sqrt{13}-1}{6};+\infty\right)$.

Ví dụ 281. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \ge 1 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x(x+2) \ge 0;\ x \ge 0 \\ (x+1)^3 \ge 0 \\ \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$, suy ra: $\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x} > 0$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x(x+2)} \ge \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x} \Leftrightarrow x(x+2) \ge (x+1)^3 - 2\sqrt{x(x+1)^3} + x$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2(x+1)\sqrt{x(x+1)} \le 0,\ (\text{do}: x \ge 0 \Rightarrow x+1 > 0)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+1) - 2(x+1)\sqrt{x(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+1)}_{>0}(x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x}) \le 0$

$\Leftrightarrow x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x} \le 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x})^2 - 2\sqrt{x^2+x}+1 \le 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x}-1)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot$

Ví dụ 282. Giải bất phương trình: $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \ge 1 \quad (*)$ ***(ĐH. A – 2010)***

Ta có: $\sqrt{2(x^2-x+1)} = \sqrt{x^2+(x-1)^2+1} > 1,$ suy ra: $1-\sqrt{2(x^2-x+1)} < 0.$

Điều kiện: $x \ge 0.$ Khi đó: $(*) \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \le 1 - \sqrt{2(x^2-x+1)} \quad (1)$

Lời giải 1. Do $x = 0$ không là nghiệm của (1), nên chia hai vế cho $\sqrt{x} > 0$:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2} \le 0,\ (2).$ Đặt $t = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = t^2+2.$

$(2) \Leftrightarrow t - 1 + \sqrt{2(t^2+2)-2} \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{2t^2+2} \le 1-t \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t \ge 0 \\ t^2+2t+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 1 \\ (t+1)^2 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t \le 1 \\ t+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1,$ suy ra: $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$

Lời giải 2. Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x} \ge 0 \\ b = 1-x \end{cases} \Rightarrow 2(x^2-x+1) = 2x^2 + 2(1-x) = 2a^2+2b^2.$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2a^2+2b^2} \le a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \ge 0 \\ 2a^2+2b^2 \le (a+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \ge 0 \\ (a-b)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b.$

Suy ra: $\sqrt{x} = 1-x \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$

Lời giải 3. Đặt $t = \sqrt{x} \ge 0$ thì $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2t^4-2t^2+2} \le -t^2+t+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t^2+t+1\ge 0 \\ 2t^4-2t^2+2\le(-t^2+t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2+t+1\ge 0 \\ (t^2+t-1)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2+t+1\ge 0 \\ t^2+t-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 283. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x}(x+\sqrt{1-x^2})}{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}}\ge 1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $0\le x\le 1$.

Ta có: $x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}\ge x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2}=x\sqrt{x}+1-x>0,\ \forall x\in[0;1]$.

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x}(x+\sqrt{1-x^2})\ge x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x^3}\ge 1-\sqrt{x(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x^3\ge 1+x(1-x^2)-2\sqrt{x(1-x^2)} \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}.\sqrt{1-x^2}+1-x^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}+(\sqrt{1-x^2})\le 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{1-x^2})^2\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=0 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}:\ \text{thỏa mãn điều kiện.}$$

Kết luận: Bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ví dụ 284. Giải bất phương trình: $\dfrac{4\sqrt{x}-x}{\sqrt{2(x^2+6x+1)}-1}<1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$, suy ra: $\sqrt{2(x^2+6x+1)}-1\ge\sqrt{2}-1>0$, nên:

$$(*)\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-x<\sqrt{2x^2+12x+2}-1 \Leftrightarrow x-1+\sqrt{2x^2+12x+2}-4\sqrt{x}>0 \quad (1)$$

- Trường hợp 1. Nếu $x=0$, thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}-1>0$ nên $x=0$ là nghiệm của (1).
- Trường hợp 2. Nếu $x>0$, chia hai vế của (1) cho $\sqrt{x}>0$, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+12}-4>0,\ (2). \text{ Đặt: } t=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=t^2+2.$$

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{2t^2+16}>4-t \Leftrightarrow \begin{cases} 4-t<0 \\ 2t^2+16\ge 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 4-t\ge 0 \\ t^2+8t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-8 \\ t>0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{x})^2+8\sqrt{x}-1<0 \\ x-1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}<\sqrt{17}-4 \\ x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<33-8\sqrt{17} \\ x>1 \end{array}\right..$$

Kết luận: Hợp các trường hợp, tập nghiệm BPT là $x\in\left[0;33-8\sqrt{37}\right)\cup(1;+\infty)$.

Lưu ý. Ta có thể giải (1) theo phương pháp lũy thừa.

Ví dụ 285. Giải bất phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{2(x^2-x+1)}-x} \ge \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ $\quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \ne 1$.

- Trường hợp 1. Nếu $x \in [0;1)$ thì $\sqrt{2(x^2-x+1)}-x = \sqrt{x^2+(x-1)^2+1}-x>0$ và $\sqrt{x}-1<0$ nên $(*)$ luôn đúng. Suy ra: $x\in[0;1)$ là một tập nghiệm $(*)$.
- Trường hợp 2. Nếu $x>1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2(x^2-x+1)}-x=\sqrt{x^2+(x-1)^2+1}-x>0 \\ \sqrt{x}-1>0 \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \ge \sqrt{2(x^2-x+1)}-x \Leftrightarrow x-1-\sqrt{2(x^2+1)-2x}+\sqrt{x}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2}+1\ge 0$, (1). Đặt $t=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=t^2+2$.

$(1) \Leftrightarrow t-\sqrt{2t^2+2}+1\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{2t^2+2}\le t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1\ge 0 \\ t^2-2t+1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ (t-1)^2\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Hợp 2 trường hợp, tập nghiệm BPT là $x\in[0;1)\cup\left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Nhận xét. *Ở lời giải trên, tôi đã xác định lượng* $\sqrt{2(x^2-x+1)}-x>0$, *còn* $\sqrt{x}-1$ *thì chưa xác định được nên chia ra 2 trường hợp* $\sqrt{x}-1>0$ *và* $\sqrt{x}-1<0$ *để giải.*

Ví dụ 286. Giải bất phương trình: $\dfrac{x+2}{\sqrt{2(x^4-x^2+1)}-1} \ge \dfrac{1}{x-1}$ $\quad (*)$

Lời giải. Ta có: $\sqrt{2(x^4-x^2+1)}-1=\sqrt{2\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{2}}-1\ge\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1>0$.

Điều kiện: $x\ne 1$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow x+2 \ge \dfrac{\sqrt{2(x^4-x^2+1)}-1}{x-1}$ $\quad (1)$

- Trường hợp 1. Nếu $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ thì

$(1) \Leftrightarrow (x+2)(x-1)\ge\sqrt{2(x^4-x^2+1)}-1 \Leftrightarrow \sqrt{2(x^4-x^2+1)}\le x^2+x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ 2(x^4-x^2+1)\le(x^2+x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ x^4-2x^3-x^2+2x+1\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ (x^2-x-1)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: thỏa mãn điều kiện.

- Trường hợp 2. Nếu $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ thì

$$(1) \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \le \underbrace{\sqrt{2(x^4-x^2+1)}-1}_{>0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le x < 1 \\ \begin{cases} x < -2 \\ (x^2-x-1)^2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết luận: Hợp hai trường hợp, suy ra tập nghiệm là $x \in (-\infty;1) \cup \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Nhận xét. *Ở lời giải trên, tôi đã xác định lượng* $\sqrt{2(x^4-x^2+1)}-1>0$, *còn* $x-1$ *thì chưa xác định được nên chia ra hai trường hợp* $x-1>0$ *và* $x-1<0$ *để giải.*

Ví dụ 287. Giải bất phương trình: $\dfrac{(2x-1)\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x}+1-x} \le 1 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \le 1$.

Ta có: $2\sqrt{x}+(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x}+1-x = 2\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x}.\sqrt{1-x}+(\sqrt{1-x})^2$

$= 2(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})+\sqrt{1-x}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}) = (\sqrt{x}+\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1-x})>0,\ \forall x \in [0;1]$.

$(*) \Leftrightarrow (2x-1)\cdot\sqrt{x} \le (\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\cdot(2+\sqrt{1-x})$

$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{x})^2-(\sqrt{1-x})^2\right]\cdot\sqrt{x} \le (\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\cdot(2+\sqrt{1-x})$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\cdot\sqrt{x} \le (\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\cdot(2+\sqrt{1-x})$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{1-x})\sqrt{x} \le 2+\sqrt{1-x},\ \left(\text{do}: \sqrt{x}+\sqrt{1-x}>0,\ \forall x \in [0;1]\right)$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x(1-x)} \le 2+\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-2 \le \sqrt{1-x}(1-x)$: luôn đúng $\forall x \in [0;1]$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $x \in [0;1]$.

Ví dụ 288. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}+7\sqrt{x}-\sqrt{6(x^2+5x-2)}}{x+3-\sqrt{2(x^2+10)}} \le 0 \qquad (*)$

Lời giải. Giả sử: $x+3<\sqrt{2(x^2+10)} \Leftrightarrow (x+3)^2<2(x^2+10)$

$\Leftrightarrow x^2-6x+11>0 \Leftrightarrow (x-3)^2+2>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra: $x+3-\sqrt{2(x^2+10)}<0$.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x-6 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ x^2+5x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$. Do $x+3-\sqrt{2(x^2+10)}<0$ nên:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-6}+7\sqrt{x}-\sqrt{6(x^2+5x-2)} \ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-6}+7\sqrt{x} \ge \sqrt{6(x^2+5x-2)}$. Do 2 vế không âm nên sẽ lũy thừa:

$\Leftrightarrow x^2-x-6+49x+14\sqrt{x(x^2-x-6)} \ge 6(x^2+5x-2)$

$\Leftrightarrow 14\sqrt{x(x-3)(x+2)} \ge 5x^2-18x-6 \quad ^{(i)}$

$\Leftrightarrow 14\sqrt{(x^2-3x)(x+2)} \geq 5(x^2-3x)-3(x+2)$ (1)

Do với $x \geq 3 \Rightarrow x+2>0$ nên chia hai vế (1) cho $x+2>0$, ta được:

$(1) \Leftrightarrow 14\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x+2}} \geq 5\cdot\dfrac{x^2-3x}{x+2}-3 \Leftrightarrow 5\cdot\dfrac{x^2-3x}{x+2}-14\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x+2}}-3\leq 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{5} \leq \sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x+2}} \leq 3$. Do $\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x+2}} \geq 0$ nên ta chỉ xét $\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x+2}} \leq 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x}{x+2} \leq 9 \Leftrightarrow x^2-12x-18 \leq 0 \Leftrightarrow 6-3\sqrt{6} \leq x \leq 6+3\sqrt{6}.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của BPT là $x \in \left[3;\ 6+3\sqrt{6}\right]$.

Bình luận: *Trong ví dụ trên, tôi đã dùng phương pháp phản chứng để chứng minh mẫu số* $x+3-\sqrt{2(x^2+10)}<0$, *còn trong các ví dụ trước đã dùng phương pháp biến đổi đẳng thức đưa về dạng* $\sqrt{(ax\pm b)^2+c} \geq \sqrt{c}$ *hoặc dạng* $\sqrt{c-(ax+b)^2} \leq \sqrt{c}$ *để chứng minh mẫu số dương hoặc âm. Ngoài ra, phép biến đổi (i) sang (1) và giải là rất quen thuộc trong giải phương trình đẳng cấp dạng:* $\alpha.f(x)+\beta.g(x)=\gamma.\sqrt{f(x).g(x)}$.

Tương tự, bất phương trình: $\alpha.f(x)+\beta.g(x)>\gamma.\sqrt{f(x).g(x)}$ *ta giải như sau:*

Xét g(x) = 0 giải tìm nghiệm. Với g(x) > 0, chia hai vế cho g(x), ta được:

$\alpha\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}+\beta>\gamma\cdot\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \Leftrightarrow \alpha\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}-\gamma\cdot\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}+\beta>0.$ *Đây là bất phương trình bậc hai với ẩn* $\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}>0$ *mà đã biết cách giải. Thông thường thì tích f(x).g(x) chưa được phân tích sẵn và* α, β *ta tìm bằng phương pháp đồng nhất (xem lại phương pháp giải phương trình đẳng cấp dạng* $\alpha.f(x)+\beta.g(x)=\gamma.\sqrt{f(x).g(x)}$*).*

Ví dụ 289. Giải bất phương trình: $\dfrac{x^4-5x^2+7\sqrt{3-2x}+\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{3-2x}+\sqrt{x}+2} \geq 1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ và $x^2-\sqrt{3-2x}+\sqrt{x}+2 \neq 0$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-\sqrt{3-2x}+\sqrt{x}+2$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ có:

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\cdot$ Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$, suy ra: $f(x)=x^2-\sqrt{3-2x}+\sqrt{x}+2 \geq f(0)=2-\sqrt{3}>0.$

$(*) \Leftrightarrow x^4-5x^2+7\sqrt{3-2x}+\sqrt{x}-1 \geq x^2-\sqrt{3-2x}+\sqrt{x}+2$

$$\Leftrightarrow g(x) = x^4 - 6x^2 + 8\sqrt{3-2x} - 3 \ge 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 6x^2 + 8\sqrt{3-2x} - 3$ xác định và liên tục trên $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ có:

$$g'(x) = 4x^3 - 12x - \frac{8}{\sqrt{3-2x}} = 4x(x^2-3) - \frac{8}{\sqrt{3-2x}} < 0,\ \forall x \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ và có $g(x) \ge g(1) = 0 \Leftrightarrow x \le 1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in [0;1]$.

II. Bất phương trình vô tỷ đưa về dạng tích – thương

Để giải bất phương trình tích hoặc thương dạng $f(x)\cdot g(x) \ge 0$ hoặc $\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0$, ta có các phương pháp giải sau:

- *Phương pháp 1. Xét dấu (tổng quát nhất)*
  Bước 1. Tìm miền xác định D.
  Bước 2. Tìm nghiệm của các phương trình: $f(x)=0$; $g(x)=0$.
  Bước 3. Lập bảng xét dấu của $f(x)$, $g(x)$ trên D, suy ra dấu của tích – thương.
- *Phương pháp 2. Dựa vào miền xác định, chia trường hợp.*
- *Phương pháp 3. Dựa vào miền xác định để tìm dấu của một thừa số.*

1. Đưa về tích số nhờ vào phép biến đổi tương đương

Ví dụ 290. Giải bất phương trình: $\frac{3x-2}{\sqrt{2-x^2}} - \sqrt{2-x^2} \le x - 1 \quad (*)$

Điều kiện: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \le (x-1)\sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow (x-1)(x+4) - (x-1)\sqrt{2-x^2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+4-\sqrt{2-x^2}) \le 0 \quad (1)$$

✍ ***Lời giải 1***. Lập bảng xét dấu.

Đặt: $f(x) = x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $g(x) = x + 4 - \sqrt{2-x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x^2 + 4x + 7 = 0 \end{cases}$$: vô nghiệm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	//////		$-$	0	$+$		//////
$g(x)$	//////		$+$	|	$+$		//////
$f(x).g(x)$	//////		$-$	0	$+$		//////

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của (1) là $x \in \left(-\sqrt{2};1\right]$.

Lời giải 2. Chia trường hợp dựa vào miền xác định.

- Trường hợp 1. Nếu $x=1$ thì (1) đúng, suy ra $x=1$ là một nghiệm của (1).
- Trường hợp 2. Nếu $1<x<\sqrt{2}$ thì $x-1>0$ nên $(1) \Leftrightarrow x+4-\sqrt{2-x^2} \le 0$

  $\Leftrightarrow x+4 \le \sqrt{2-x^2}$: vô nghiệm khi $x \in \left(1;\sqrt{2}\right)$.
- Trường hợp 3. Nếu $-\sqrt{2}<x<1$ thì $x-1<0$ nên $(1) \Leftrightarrow x+4-\sqrt{2-x^2} \ge 0$

  $\Leftrightarrow x+4 \ge \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow x^2+4x+7 \ge 0$ luôn đúng $\forall x \in \left(-\sqrt{2};1\right)$.

Kết luận: Hợp ba trường hợp, suy ra tập nghiệm BPT là $x \in \left(-\sqrt{2};1\right]$.

Lời giải 3. Dựa vào miền xác định để tìm dấu của một thừa số.

Ta có: $x+4-\sqrt{2-x^2} \ge 0, \forall x \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \le 1$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x \in \left(-\sqrt{2};1\right]$.

Nhận xét. *Có rất nhiều cách xét dấu khác nhau, nhưng theo tôi với những bất phương trình phức tạp thường dùng nguyên tắc "mỗi ô thử một điểm". Chẳng hạn như xét dấu $f(x)=x+4-\sqrt{2-x^2}$ thì tôi nhập vào máy tính bỏ túi: $X+4-\sqrt{2-X^2}$ và muốn xét dấu trong khoảng $(-\sqrt{2};\ 1)$ tôi CALC một giá trị bất kỳ trong khoảng này, chẳng hạn 0 được $4-\sqrt{2}>0$ và để vào khoảng ấy dấu $+$.*

Ví dụ 291. Giải bất phương trình: $4x^2+\sqrt{2x+3} \ge 8x+1$ $\quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $2x+3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{3}{2}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2+\sqrt{2x+3}-8x-1 \ge 0 \Leftrightarrow (1-2x+4x^2)+(1-2x)+\sqrt{2x+3}-(2x+3) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(1-2x\right)^2-(\sqrt{2x+3})^2\right]+\left(1-2x+\sqrt{2x+3}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x-\sqrt{2x+3})(1-2x+\sqrt{2x+3})+(1-2x+\sqrt{2x+3}) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x+\sqrt{2x+3})(2-2x-\sqrt{2x+3}) \ge 0 \qquad (1)$$

Đặt: $\begin{cases} f(x)=1-2x+\sqrt{2x+3} \\ g(x)=2-2x-\sqrt{2x+3} \end{cases}\cdot$ Khi đó:

Cho: $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 2x^2-3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\cdot$

Cho: $g(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=2-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ 4x^2-10x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{4}\cdot$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{5-\sqrt{21}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$f(x)$	//////		+	|	+	0	−	
$g(x)$	//////		+	0	−	|	−	
$f(x).g(x)$	//////		+	0	−	0	+	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{4}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.

Ví dụ 292. Giải bất phương trình: $x-3\sqrt{2-x^2}+2x^2\sqrt{2-x^2}\ge 0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

$$(*)\Leftrightarrow x\ge(3-2x^2)\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow x\ge\left[(\sqrt{2-x^2})^2+(1-x^2)\right]\cdot\sqrt{2-x^2}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2})^3+(1-x^2)\sqrt{2-x^2}-x\le 0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2})^3-x^2\sqrt{2-x^2}+(\sqrt{2-x^2}-x)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left[(\sqrt{2-x^2})^2-x^2\right]\sqrt{2-x^2}+(\sqrt{2-x^2}-x)\le 0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2}-x)\cdot(\sqrt{2-x^2}+x)\cdot\sqrt{2-x^2}+(\sqrt{2-x^2}-x)\le 0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2}-x)\cdot(3-x^2+x\sqrt{2-x^2})\le 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}-x\le 0,\ \left(\text{do}: 3-x^2+x\sqrt{2-x^2}>0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}\le x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\2-x^2\le x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\le -1\ \vee\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]$.

Ví dụ 293. Giải bất phương trình: $(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}>4x-8x^2+10$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -2$.

$$(*)\Leftrightarrow(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}+2(4x^2-x-7)>2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow(4x^2-x-7)(\sqrt{x+2}+2)>2[(\sqrt{x+2})^2-4]$$

$$\Leftrightarrow(4x^2-x-7)(\sqrt{x+2}+2)>2(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+2}-2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-x-7>2(\sqrt{x+2}-2),\ (\text{do}: \sqrt{x+2}+2>0,\ \forall x\ge -2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2>x+3+2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow(2x)^2>(\sqrt{x+2}+1)^2$$

$$\Leftrightarrow(2x)^2-(\sqrt{x+2}+1)^2>0\Leftrightarrow(2x-1-\sqrt{x+2})(2x+1+\sqrt{x+2})>0 \quad (1)$$

Đặt: $f(x)=2x-1-\sqrt{x+2}$ và $g(x)=2x+1+\sqrt{x+2}$.

Cho $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-5x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}$.

Cho $g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-2x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2} \\ 4x^2+3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2		-1		$\frac{5+\sqrt{41}}{8}$		$+\infty$
$f(x)$	//////		$-$	|	$-$	0	$+$	
$g(x)$	//////		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x).g(x)$	//////		$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $x \in \left[-2;-1\right) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$.

2. Liên hợp đưa về tích số khi giải bất phương trình

Ví dụ 294. Giải bất phương trình: $\dfrac{6x^2}{(\sqrt{2x+1}+1)^2} > 2x+\sqrt{x-1}-1$ (*)

Đề thi thử Đại học năm 2013 – Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 1,$ suy ra: $\sqrt{2x+1}-1 \ne 0.$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{6x^2(\sqrt{2x+1}-1)^2}{4x^2} > 2x+\sqrt{x-1}-1 \Leftrightarrow x-3\sqrt{2x+1}+4 > \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow (2x+1)-3\sqrt{2x+1}+\dfrac{9}{4} > (x-1)+\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-\dfrac{3}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-\dfrac{3}{2} > \sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2}$

$\left(\text{do}: \sqrt{2x+1}-\dfrac{3}{2}>0,\ \sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2}>0,\ \forall x \ge 1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} > \sqrt{x-1}+2 \Leftrightarrow 2x+1 > x+1+4\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} < x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x^2-20x+20>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 10+4\sqrt{5}.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm BPT là $x \in (10+4\sqrt{5};+\infty).$

Ví dụ 295. Giải bất phương trình: $4(x+1)^2 < (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$ (*)

Đề thi thử Đại học năm 2013 – Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -\dfrac{3}{2}$, suy ra: $1+\sqrt{3+2x} \ne 0$.

$$(*) \Leftrightarrow 4(x+1)^2 < (2x+10)\cdot\frac{(1-\sqrt{3+2x})^2(1+\sqrt{3+2x})^2}{(1+\sqrt{3+2x})^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2(1+\sqrt{3+2x})^2 < 4(2x+10)(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ (1+\sqrt{3+2x})^2 < 2x+10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ 4+2x+2\sqrt{3+2x} < 2x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ \sqrt{3+2x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ x < 3 \end{cases}.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm BPT là $x \in \left[-\dfrac{3}{2};3\right) \setminus \{-1\}$.

Ví dụ 296. Giải bất phương trình: $\dfrac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \dfrac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$ (*)

Phân tích. *Nếu liên hợp vế trái thu được mẫu số:* $\left[(x+1)^2-(\sqrt{x+1})^2\right]^2 = x^2(x+1)^2$ *sẽ triệt tiêu đi* x^2 *ở tử số và có cùng thừa số chung với vế phải.*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ x \ne 0 \end{cases}$. Khi đó: $x+1+\sqrt{x+1} > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^2(x+1+\sqrt{x+1})^2}{\left[(x+1)^2-(\sqrt{x+1})\right]^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2(x+1+\sqrt{x+1})^2}{(x^2+x)^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x+1+\sqrt{x+1})^2}{\left[x(x+1)\right]^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1+\sqrt{x+1})^2 < x^2+3x+18$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2+2(x+1)\sqrt{x+1} < x^2+3x+18 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1} < 8$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 < 2^3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 2 \Leftrightarrow x+1 < 4 \Leftrightarrow x < 3.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là: $x \in (-1;3) \setminus \{0\}$.

Ví dụ 297. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}(\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}) \ge 2x-11$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $3 \le x \le 8$. Khi đó: $\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x} > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(2x-11)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x}} \ge 2x-11 \Leftrightarrow (2x-11)\sqrt{x-1} \ge (2x-11)(\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x})$$

$$\Leftrightarrow (2x-11)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}) \ge 0 \qquad (1)$$

Đặt: $f(x) = 2x-11$ và $g(x) = \sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}$.

Cho $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{2}$ và $g(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(8-x)}=x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 6 \\ -4x^2+43x-90=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{43+\sqrt{409}}{8}.$$

x	$-\infty$	3		$\dfrac{11}{2}$		$\dfrac{43+\sqrt{409}}{8}$		8	$+\infty$
$f(x)$	//////		$-$	0	$+$	|	$+$		//////
$g(x)$	//////		$-$	|	$-$	0	$+$		//////
$f(x).g(x)$	//////		$+$	0	$-$	0	$+$		//////

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm là: $x\in\left[3;\dfrac{11}{2}\right]\cup\left[\dfrac{43+\sqrt{409}}{8};8\right].$

<u>Bình luận</u>. *Sai lầm thường gặp của học sinh là đơn giản đi lượng 2x – 11. Rõ ràng* $\forall x\in[3;8]$ *thì ta chưa xác định được dấu của* $2x-11$ *nên tôi đã dùng phương pháp tổng quát nhất là xét dấu để giải sau khi đưa về dạng tích số. Nếu không làm như thế thì ta có thể chia ra từng trường hợp để bỏ đi lượng* $2x-11$.

<u>Ví dụ 298.</u> Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}+x^2-x-2\le\sqrt{3x-2}$ (*)

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Nghi Sơn – Thanh Hóa

<u>Nhận xét</u>. *Các kỹ thuật tách – ghép, ghép hằng số, ghép bậc nhất, tìm nhân tử bậc 2, bậc 3 bằng casio,… làm cho xuất hiện thừa số chung sau khi nhân liên hợp của giải phương trình vô tỷ đều áp dụng được cho bất phương trình vô tỷ. Ở ví dụ này, nhận thấy rằng* $(x+2)-(3x-2)=-2(x-2)$ *và phân tích* $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ *có nhân tử chung* $x-2$ *nên ta sẽ tiến hành ghép 2 căn thức lại với nhau để liên hợp.*

<u>Lời giải</u>. Điều kiện: $2x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\dfrac{2}{3}.$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2})+x^2-x-2\le 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x-2)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+(x+1)(x-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1\right)\le 0 \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1$ trên $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ có:

$$f'(x)=\frac{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})'}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})^2}+1=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})^2}+1>0,\ \forall x>\frac{3}{2}.$$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right).$

Suy ra: $x \ge \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow f(x) \ge f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{10-3\sqrt{6}}{6} > 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in \left[\dfrac{2}{3};2\right]\cdot$

Bình luận. *Trong đánh giá $f(x)>0,$ tôi đã sử dụng kết quả: "Nếu hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên D thì $f(x)>f(a) \Leftrightarrow x>a,\ \forall\ x,a \in D.$ Nếu hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì $f(x)>f(a) \Leftrightarrow x<a,\ \forall\ x,a \in D$".*

Ví dụ 299. Giải BPT: $(2+\sqrt{x^2-2x+5})(x+1)+4x\sqrt{x^2+1} \le 2x\sqrt{x^2-2x+5}$ (*)

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Nguyễn Khuyến Tp. HCM

Phân tích. *Nhận thấy nếu chuyển vế và rút: $2x(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5})$ và liên hợp 2 căn thức này sẽ xuất hiện nhân tử $x+1$ và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(2+\sqrt{x^2-2x+5})+2x(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5}) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2+\sqrt{x^2-2x+5})+2x\cdot\frac{3x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2+\sqrt{x^2-2x+5})+\frac{2x(x+1)(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right) \le 0 \qquad (1)$$

Do: $2+\sqrt{x^2-2x+5}+\dfrac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+5)}+(7x^2-4x+5)>0}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}},\ \forall x.$$

Suy ra: $(1) \Leftrightarrow x+1 \le 0 \Leftrightarrow x \le -1.$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty;-1].$

Ví dụ 300. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35} < 5x-4+\sqrt{x^2+24}$ (*)

Phân tích. *Nhận thấy nếu là phương trình thì sẽ có một nghiệm $x=1.$ Do đó, ta sẽ ghép để sau nhân liên hợp xuất hiện thừa số chung $x-1$ trong bất phương trình đưa về dạng $(x-1)\cdot f(x)<0.$ Đa số trường hợp thì ta xác định dấu của $f(x)$ rồi bỏ nó mà ít giải bất phương trình dạng tích. Vì vậy cần tìm miền xác định của bài toán chính xác để đánh giá f(x) dễ dàng. Ta có $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+35}-\sqrt{x^2+24}<5x-4$ và luôn có $\sqrt{x^2+35}-\sqrt{x^2+24}>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, nên để BPT có nghiệm thì vế phải $5x-4>0.$*

Lời giải. Điều kiện: $5x-4>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{4}{5}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+35}-6)-5(x-1)-(\sqrt{x^2+24}-5)<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+35}+6}-5(x-1)-\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+24}+5}<0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+35}+6}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+24}+5}-5\right)<0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[(x-1)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+35}+6}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+24}+5}\right)-5\right]<0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\underbrace{\left[(x+1)\cdot\dfrac{(\sqrt{x^2+24}-\sqrt{x^2+35}-1)}{(\sqrt{x^2+35}+6)(\sqrt{x^2+24}+5)}-5\right]}_{f(x)}<0 \qquad (1)$$

Do $\forall x>\dfrac{4}{5}:\begin{cases}x+1>0\\ \sqrt{x^2+24}-\sqrt{x^2+35}<0\end{cases}$, suy ra $f(x)<0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in(1;+\infty)$.

Ví dụ 301. Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x\le\sqrt{5x-1}+1$ (*)

Phân tích. *Nhập* $\sqrt[3]{X-9}+2X^2+3X-\sqrt{5X-1}-1$ *vào máy tính và bấm shift solve , cho được* $X=1$. *Để kiểm tra phương trình còn nghiệm hay không, ta sửa lại cấu trúc của máy tính:* $(\sqrt[3]{X-9}+2X^2+3X-\sqrt{5X-1}-1):(X-1)$ *và bấm shift solve thì máy tính cho ta kết quả Can't Solve, chứng tỏ phương trình đã hết nghiệm. Từ đó, ta có thể khẳng định phương trình có một nghiệm nên g hép hằng số với căn để liên hợp . Tức ghép:* $(\sqrt[3]{x-9}-\alpha)+(\beta-\sqrt{5x-1})+2x^2+3x-1+\alpha-\beta=0$ *với hai số* $\alpha,\ \beta$ *thỏa mãn:* $\alpha=\sqrt[3]{x-9}=\sqrt[3]{1-9}=-2,\ \ \beta=\sqrt{5x-1}=\sqrt{5.1-1}=2$ *(thay thế giá trị nghiệm* $x=1$ *vào từng căn) và có lời giải 1 chi tiết như sau:*

Điều kiện: $5x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{5}\cdot$

Lời giải 1. Nhân liên hợp thông thường.

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x-9}+2)+(2-\sqrt{5x-1})+2x^2+3x-5\le0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{(\sqrt[3]{x-9})^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}-\dfrac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}+(x-1)(2x+5)\le0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}-\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5\right]\le0 \qquad (1)$$

Với $x\ge\dfrac{1}{5}$, suy ra: $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3}-\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5\ge-\dfrac{5}{2}+\dfrac{2}{5}+5>0$ (2)

Từ (1), (2), suy ra: $x-1\le0\Leftrightarrow x\le1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x \in \left[\dfrac{1}{5};1\right]\cdot$

Lời giải 2. Truy ngược dấu.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-9} - \sqrt{5x-1} + 2x^2 + 3x - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{x-9}+2) + \sqrt{5x-1}(\sqrt{5x-1}-2) + 4x^2 + x - 5 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x-9})^2 - 2\sqrt[3]{x-9}+4} + \frac{5(x-1)\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2} + (x-1)(4x+5) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x-9}-1)^2+3} + \frac{5\sqrt{5x-1}}{\sqrt{5x-1}+2} + (4x+5)\right]}_{>0,\ \forall x \in D} \le 0 \Leftrightarrow x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \le 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x \in \left[\dfrac{1}{5};1\right]\cdot$

_Ví dụ 302._ Giải bất phương trình: $(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \ge x^2 + 7x + 12$ $(*)$

Đại học khối D năm 2014

Phân tích. *Nếu là phương trình, nhập:* $(X+1)\sqrt{X+2} + (X+6)\sqrt{X+7} \ge X^2 + 7X + 12$ *và bấm shift solve thì cho ta nghiệm* $X = 2$. *Đối với bất phương trình thì sẽ có nhân tử chung dạng* $(x-2).f(x) \ge 0$. *Muốn kiểm tra xem còn nghiệm hay không, ta sửa lại cấu trúc:* $((X+1)\sqrt{X+2} + (X+6)\sqrt{X+7} - (X^2+7X+12)) : (X-2)$ *và bấm shift solve thì máy tính cho Can't Solve, chứng tỏ phương trình hết nghiệm. Khi đó ghép các căn với hằng số* α, β *dạng* $(x+1)(\sqrt{x+2}-\alpha)$; $(x+6)(\sqrt{x+7}-\beta)$ *và liên hợp, với* α, β *được tìm bằng cách thế nghiệm vào căn:* $\alpha = \sqrt{2+2} = 2,\ \beta = \sqrt{2+7} = 3.$

Điều kiện: $x \ge -2$.

Lời giải 1. Nhân liên hợp thông thường.

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2}-2) + (x+6)(\sqrt{x+7}-3) - (x^2+2x-8) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x+6)\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} - (x-2)(x+4) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+2}+3} - x - 4\right) \ge 0 \qquad (1)$$

Do $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 < \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x+6}{3} - x - 4 = -\dfrac{x+12}{6} < 0, \forall x \ge -2.$

Nên $(1) \Leftrightarrow x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in [-2;2]\cdot$

Lời giải 2. Truy ngược dấu.

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(x+4-3\sqrt{x+2}) + (x+6)\sqrt{x+7}(\sqrt{x+7}-3) + x^2 + 3x - 10 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+(x+6)\sqrt{x+7}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}+(x-2)(x+5)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left[\frac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+x+5\right]}_{>0,\ \forall x>-2}\le 0\Leftrightarrow x\le 2.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[-2;2\right]\cdot$

Ví dụ 303. Giải BPT: $(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}\ge 3x^2+14x+13$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}4x+5\ge 0\\ x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{5}{4}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{4x+5}-3)+2(x+5)(\sqrt{x+3}-2)\ge 3x^2+7x-10$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x+1)(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\frac{2(x+5)(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}\ge (x-1)(3x+10)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\frac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-3x-10\right]\ge 0$$

Do $\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\dfrac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-3x-10<\dfrac{4(x+1)}{3}+\dfrac{2(x+5)}{2}-3x-10=-\dfrac{2x+11}{6}<0,$

với mọi $x\ge -\dfrac{5}{4}$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1\le 0\Leftrightarrow x\le 1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[-\dfrac{5}{4};1\right]\cdot$

Bình luận. *Do sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất là $x=1$ nên sẽ ghép hằng số để liên hợp. Bạn đọc có thể sử dụng truy ngược dấu như ví dụ trước để giải.*

Ví dụ 304. Giải BPT: $(x+1)\sqrt{2x+3}+2(3x+1)\sqrt{4x+2}\ge 16x^2+14x+2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{2x+3}-2)+2(3x+1)(\sqrt{4x+2}-2)\ge 16x^2-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(2x-1)}{\sqrt{2x+3}+2}+\frac{4(3x+1)(2x-1)}{\sqrt{4x+2}+2}-4(2x-1)(2x+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\cdot\left[\frac{x+1}{\sqrt{2x+3}+2}+\frac{4(3x+1)}{\sqrt{4x+2}+2}-8x-4\right]\ge 0 \qquad (1)$$

Do $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+3}+2}+\dfrac{4(3x+1)}{\sqrt{4x+2}+2}-8x-4<\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{4(3x+1)}{2}-8x-4=-\dfrac{3x+3}{2}<0$ với mọi $x\ge -\dfrac{1}{2}$ nên $(1)\Leftrightarrow 2x-1\le 0\Leftrightarrow x\le \dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Ví dụ 305. Giải bất phương trình: $x^3 + 2x - (x^2+1)\sqrt{2x-1} \le \sqrt[3]{2x^2 - x}$ (*)

Phân tích. *Sử dụng casio, tìm được nghiệm* $x=1$. *Tiếp tục kiểm tra phương trình còn nghiệm hay không, ta nhận được thêm một nghiệm nữa là* $x=1$. *Tức phương trình có nghiệm kép, nên bất phương trình sẽ có nhân tử* $(x-1)^2$. *Từ đó có tách ghép và lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left[x(x^2+1) - (x^2+1)\sqrt{2x-1}\right] + (x - \sqrt[3]{2x^2-x}) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(x-\sqrt{2x-1}) + (x - \sqrt[3]{2x^2-x}) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)\cdot\frac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}} + \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+x\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{x^2+1}{x+\sqrt{2x-1}} + \frac{x}{x^2+x\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}\right) \le 0 \qquad (1)$$

Do: $\forall x \ge \frac{1}{2}$, suy ra: $\frac{x^2+1}{x+\sqrt{2x-1}} + \frac{x}{x^2+x\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}} > 0.$

Nên $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 306. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x-11} - \sqrt{2x^2-16x+28} \ge 5-x$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-11 \ge 0 \\ 2x^2-16x+28 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{11}{2}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left[\sqrt{2x-11} - (x-5)\right] + \left[(2x-10) - \sqrt{2x^2-16x+28}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-11-(x-5)^2}{\sqrt{2x-11}+x-5} + \frac{(2x-10)^2-(2x^2-16x+28)}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+12x-36}{\sqrt{2x-11}+x-5} + \frac{2x^2-24x+72}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-6)^2}{\sqrt{2x-11}+x-5} + \frac{2(x-6)^2}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2\cdot\left(\frac{2}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}} - \frac{1}{\sqrt{2x-11}+x-5}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 \cdot \frac{2\sqrt{2x-11}-\sqrt{2x^2-16x+28}}{\left[2(x-5)+\sqrt{2x^2-16x+28}\right].(\sqrt{2x-11}+x-5)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2(2\sqrt{2x-11}-\sqrt{2x^2-16x+28}) \ge 0$$

$$\left[\text{Do}: 2(x-5)+\sqrt{2x^2-16x+28}>0,\ \sqrt{2x-11}+x-5>0,\ \forall x \ge \frac{11}{2}=5,5\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-6)^2(-2x^2+24x-72)}{2\sqrt{2x-11}+\sqrt{2x^2-16x+28}} \ge 0 \Leftrightarrow -2(x-6)^4 \ge 0 \Leftrightarrow (x-6)^4 \le 0 \Leftrightarrow x=6: \text{TMĐK}$$

Kết luận: Bất phương trình có nghiệm duy nhất là $x=6$.

Ví dụ 307. Giải BPT: $(x+1)\sqrt{3x+1}+x^3+2x^2+1 \ge 2\sqrt{x^2-x+1}+6x$ (*)

Phân tích và lời giải 1. *Sử dụng casio, tìm được hai nghiệm* $x=0,\ x=1,$ *nên bất phương trình sẽ có nhân tử chung dạng* $x(x-1)=x^2-x.$ *Do đó sẽ ghép bậc nhất với căn thức để liên hợp dạng :* $(x+1).\left[\sqrt{3x+1}-(ax+b)\right],\ 2.\left[(cx+d)-\sqrt{x^2-x+1}\right]$ *với*

a, b thỏa mãn hệ : $\begin{cases} Khi\ x=0 \Rightarrow \sqrt{3x+1}=1=ax+b=b \\ Khi\ x=1 \Rightarrow \sqrt{3x+1}=2=ax+b=a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ *và c, d thỏa hệ*

phương trình: $\begin{cases} Khi\ x=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}=1=cx+d=d \\ Khi\ x=1 \Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}=1=cx+d=c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=1 \end{cases}.$

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{3}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]+2(1-\sqrt{x^2-x+1})+x^3+3x^2-4x \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2+x)}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2(-x^2+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+(x^2-x)(x+4) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+x)\left(\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}+1}-x-4\right) \ge 0 \qquad (1)$$

Do $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x+1}+1}-x-4 < \dfrac{x+1}{x+1}+2-x-4=-x-1<0,\ \forall x \ge -\dfrac{1}{3}\cdot$

$(1) \Leftrightarrow -x^2+x \le 0 \Leftrightarrow x \le 0$ hoặc $x \ge 1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm BPT là $x \in \left[-\dfrac{1}{3};0\right] \cup \left[1;+\infty\right).$

Phân tích và lời giải 2. *Với mong muốn biểu thức* $f(x)$ *trong* $(x^2-x).f(x)$ *sau khi liên hợp luôn dương , ta có thể truy ngược dấu của các biểu thức liên hợp, cụ thể* $2(1-\sqrt{x^2-x+1})$ *đổi thành:* $2\sqrt{x^2-x+1}(\sqrt{x^2-x+1}-1)$ *và* $\sqrt{3x+1}-(x+1)$ *thành*

$\sqrt{3x+1}(x+1-\sqrt{3x+1})$ *sẽ khắc phục được công đoạn đánh giá f (x) phức tạp. Từ đó có lời giải 2 chi tiết như sau:*

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+1}(\sqrt{x^2-x+1}-1)+\sqrt{3x+1}(x+1-\sqrt{3x+1})+x^3-x\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-x)\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{(x^2-x)\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+(x^2-x)(x+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\cdot\left(\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1\right)\ge 0 \Leftrightarrow x^2-x\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0\\ x\ge 1\end{array}\right.$$

Do $\forall x\ge -\frac{1}{3}$, suy ra: $\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1>0.$

Kết luận: So voi điều kiện, tập nghiệm BPT là $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\left[1;+\infty\right).$

Ví dụ 308. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2+11x+15}+\sqrt{x^2+2x-3}\ge x+6$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\le -3$ hoặc $x\ge 1.$

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+11x+15}+2\sqrt{x^2+2x-3}\ge 2x+12$$

$$\Leftrightarrow \left[2\sqrt{2x^2+11x+15}-(2x+9)\right]+\left[2\sqrt{x^2+2x-3}-3\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-21}{2\sqrt{2x^2+11x+15}+2x+9}+\frac{4x^2+8x-21}{2\sqrt{x^2+2x-3}+3}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2+8x-21)\left(\frac{1}{2\sqrt{2x^2+11x+15}+2x+9}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-3}+3}\right)\ge 0 \quad (1)$$

Do $\frac{1}{2\sqrt{2x^2+11x+15}+2x+9}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-3}+3}>0$ nên (1) $\Leftrightarrow 4x^2+8x-21\ge 0$

$$\Leftrightarrow x\le -\frac{7}{2} \text{ hoặc } x\ge \frac{3}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của BPT là $x\in\left(-\infty;-\frac{7}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)\cdot$

Nhận xét. *Do sử dụng casio, tìm được* $x=-\frac{7}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, *nên có tách ghép như trên.*

Ví dụ 309. Giải bất phương trình: $2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4\le\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$ (*)

Đề thi thử Đại học 2013 lần 2 – Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp

Phân tích. *Sử dụng chức năng table của casio, tìm được nhân tử* x^2-3 *nên có tách ghép để liên hợp và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x>-4.$

$$(*) \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}-1\right)+x^2-3 \le \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}-1}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+1}+x^2-3 \le \frac{4-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-3)}{(x+4)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+1\right)}+(x^2-3)+\frac{(x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)\underbrace{\left[\frac{2}{(x+4)\left(\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+1\right)}+1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})}\right]}_{>0,\ \forall x>-4} \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3 \le 0 \Leftrightarrow x \le -\sqrt{3}\ \vee\ x \ge \sqrt{3}.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

Ví dụ 310. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3-x}}{2x-3} \ge \dfrac{1}{x^2-x-2}$ (*)

Đề thi thử TN. THPT Quốc Gia 2015 – TT. Hoàng Gia, Tân Phú, Tp. HCM

Lời giải. Tập xác định: $D=\left[0;3\right]\backslash\left\{\dfrac{3}{2};2\right\}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(2x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3-x})} \ge \frac{1}{x^2-x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}} \ge \frac{1}{x^2-x-2} \qquad (1)$$

Do $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}>0,\ \forall x \in \left[0;3\right]$, nhưng dấu x^2-x-2 chưa xác định được là dương hay âm trên đoạn $\left[0;3\right]$, nên ta chia ra hai trường hợp:

- **TH 1**. Nếu $\begin{cases} x^2-x-2<0 \\ x \in \left[0;3\right]\backslash\left\{\dfrac{3}{2};2\right\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;2) \\ x \in \left[0;3\right]\backslash\left\{\dfrac{3}{2};2\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0;2\right)\backslash\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

  Lúc đó (1) luôn đúng do: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}>0,\ \dfrac{1}{x^2-x-2}<0.$

- **TH 2**. Nếu $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x \in \left[0;3\right]\backslash\left\{\dfrac{3}{2};2\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;3]$ thì (1) $\Leftrightarrow x^2-x-2 \ge \sqrt{x}+\sqrt{3-x}$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+1)+\left[(x-1)-\sqrt{x}\right]+\left[(x-2)-\sqrt{3-x}\right]>0 \qquad \text{(i)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+1)+\frac{x^2-3x+1}{x-1+\sqrt{x}}+\frac{x^2-3x+1}{x-2+\sqrt{3-x}}>0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+1)\underbrace{\left(1+\frac{1}{x-1+\sqrt{x}}+\frac{1}{x-2+\sqrt{3-x}}\right)}_{>0,\ \forall x\in(2;3]}>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1>3x \\ x\in(2;3]\end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x\le 3.$$

Kết luận: Hợp hai trường hợp, tập nghiệm là $x\in\left[0;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};3\right]$.

Nhận xét. *Để có biến đổi sang (i), tôi đã sử dụng chức năng table của casio để tìm lượng nhân tử* x^2-3x+1, *từ đó có cách tách ghép và liên hợp như trên.*

Ví dụ 311. Giải bất phương trình: $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}\ge\dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}$ $\qquad(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\left[-1;9\right]\backslash\{0\}$, suy ra: $3\sqrt{x+1}+x+3>0$.

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ 3\sqrt{x+1}+x+3=(\sqrt{x+1})^2+3\sqrt{x+1}+2=(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2) \\ \bullet\ x-3=(\sqrt{x+1})^2-2^2=(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2) \\ \bullet\ x=(\sqrt{x+1})^2-1^2=(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)\end{cases}$ nên:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)}\ge\frac{2\sqrt{9-x}}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-2\ge\frac{2\sqrt{9-x}}{\sqrt{x+1}-1}$$

Do ta chưa xác định được dấu của $\sqrt{x+1}-1$ nên sẽ chia ra hai trường hợp:

- **Trường hợp 1**. Nếu $\begin{cases}\sqrt{x+1}-1>0 \\ -1\le x\le 9,\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ -1\le x\le 9\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 9$, thì:

$$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}-1)\ge 2\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)+2(1-\sqrt{9-x})\ge 0\Leftrightarrow\frac{(x-8)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\frac{2(x-8)}{1+\sqrt{9-x}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-8)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\frac{2}{1+\sqrt{9-x}}\right)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x-8\ge 0 \\ 0<x\le 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 8 \\ 0<x\le 9\end{cases}\Leftrightarrow 8\le x\le 9.$$

- **Trường hợp 2**. Nếu $\begin{cases}\sqrt{x+1}-1<0 \\ -1\le x\le 9,\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x<0 \\ -1\le x\le 9\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x<0$, thì

$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}-1)\le 2\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1}\le 2\sqrt{9-x}$: luôn đúng.

Do $\forall x\in\left[-1;0\right)\Rightarrow\begin{cases}x+3-3\sqrt{x+1}\le -1+3-3\sqrt{-1+1}=2 \\ 2\sqrt{9-x}>2.\sqrt{9-0}=6\end{cases}$.

Kết luận: Hợp hai trường hợp, tập nghiệm cần tìm là $x \in [-1;0) \cup [8;9]$.

Ví dụ 312. Giải bất phương trình: $6x\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+8x} \ge 6x^2 - x - 8 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le -8 \end{array}\right.$.

- TH 1. Nếu $x \le -8 \Rightarrow \begin{cases} VT_{(*)} = 6x\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+8x} \le 6x\sqrt{x^2-1} < 0 \\ VP_{(*)} = 6x^2 - x - 8 \ge 6x^2 > 0 \end{cases}$

  Suy ra bất phương trình $(*)$ vô nghiệm khi $x \le 8$.

- TH 2. Nếu $x \ge 1$, thì $(*) \Leftrightarrow 6x^2 - x - 8 - 6x\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+8x} \le 0$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1} - x) + \sqrt{x^2+8x} - (x+2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{x^2+8x}+x+2} - \frac{6\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}+x} \le 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\cdot\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+8x}+x+2} - \frac{3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}+x}\right) \le 0 \qquad (1)$$

Do $\begin{cases} 3\sqrt{x+1} > 2\sqrt{x-1} \ge 0 \\ \sqrt{x^2+8x}+x+2 > \sqrt{x^2-1}+x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+8x}+x+2} - \frac{3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}+x} \le 0, \forall x \ge 1.$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1.$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x \in [1;+\infty)$.

III. Sử dụng phương pháp hàm số giải bất phương trình vô tỷ

Vận dụng nội dung của các kết quả sau đây:

- Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên D thì $f(x) > f(a) \Leftrightarrow x > a,\ \forall x, a \in D$.
- Hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì $f(x) > f(a) \Leftrightarrow x < a,\ \forall x, a \in D$.

Ví dụ 313. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} > 2\sqrt{3} \qquad (*)$

Phân tích. *Nếu là phương trình thì sẽ có một nghiệm $x=1$ và vế phải có khả năng là hàm số đồng biến nên ta định hướng giải bất phương trình bằng phương pháp hàm số. Ngoài ra, do biết được một nghiệm của phương trình nên ta có thể tách ghép phù hợp để nhân liên hợp nhằm xuất hiện nhân tử $x-1$.*

Điều kiện: $-2 \le x \le 4$.

Lời giải 1. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$ có:

$$f'(x) = \frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0,\ \forall x \in (-2;4).$$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[-2;4]$.

Mặt khác: $f(x) > f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x > 1$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in \left(1;4\right]$.

Lời giải 2. Sử dụng kỹ thuật nhân lượng liên hợp.

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - 3\sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{4-x}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3+3x^2+6x-11}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}} + \frac{x-1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x^2+5x+11)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}} + \frac{x-1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\underbrace{\left[\frac{2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{63}{8}}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}}\right]}_{>0,\ \forall x \in [-2;4]} > 0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in \left(1;4\right]$.

Ví dụ 314. Giải bất phương trình: $3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \le 6$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\frac{1}{2} < x \le \frac{3}{2}\cdot$ Thì $(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x - 6 \le 0.$

Xét hàm số $f\left(x\right) = 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x - 6$ trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ có:

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{3-2x}} - \frac{5}{(\sqrt{2x-1})^3} - 2 < 0;\ \forall x \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\cdot$$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ và có $f(x) \le f(1) = 0 \Leftrightarrow x \le 1.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $\left(\frac{1}{2};1\right]\cdot$

Ví dụ 315. Giải bất phương trình: $\frac{x-7}{x-1-2\sqrt{x+2}} \ge \frac{2\sqrt{4-x}}{x+1}$ (*)

Đề thi thử TN. THPT Quốc Gia 2015 – TT. LTĐH Trí Minh, Tp. HCM

Lời giải. Điều kiện: $-2 \le 2 \le 4,\ x \ne -1.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+2})^2 - 3^2}{(\sqrt{x+2})^2 - 2\sqrt{x+2} - 3} \ge \frac{2\sqrt{4-x}}{(\sqrt{x+2})^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-3)} \ge \frac{2\sqrt{4-x}}{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+3 \ge \frac{2\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+2}-1} \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+3)(\sqrt{x+2}-1) \ge 2\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{x+2}-2\sqrt{4-x} \ge 0.$$

Xét hàm số $f(x)=x-1+2\sqrt{x+2}-2\sqrt{4-x}$ trên đoạn $\left[-2;4\right]\setminus\left\{-1\right\}$ có:

$$f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}>0,\ \forall x\in\left(-2;4\right)\setminus\left\{-1\right\}\cdot$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-2;-1)$ và- 1; 4] và $f(x)\ge f(1)=0\Leftrightarrow x\ge 1.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in\left[1;4\right]$.

Ví dụ 316. Giải bất phương trình: $2(x-2)(\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2})\ge 3x-1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$ Do $x=2$ không là nghiệm của BPT nên:

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}\ge\frac{3x-1}{2x-4} \qquad (1)$$

Đặt: $f(x)=\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}$ và $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x-4}\cdot$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}$ trên $\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{2\right\}$ có:

$$f'(x)=\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x-4)^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-2)^2}}>0,\ \forall x\in\left(1;+\infty\right)\setminus\left\{2\right\}\cdot$$

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[1;2\right)$ và (2; + ¥)

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x-4}$ trên $\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{2\right\}$ có: $g'(x)=-\dfrac{10}{(2x-4)^2}<0,\ \forall x\ne 2.$

Suy ra hàm số $g(x)$ luôn nghịch biến trên $\left[1;2\right)$ và (2; + ¥)

Nếu $x\ge 3\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge f(3)=4\\ g(x)\le g(3)=4\end{cases}\Leftrightarrow f(x)\ge 4\ge g(x)\Leftrightarrow f(x)\ge g(x).$

Hay $\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}\ge\dfrac{3x-1}{2x-4}\Leftrightarrow x\ge 3.$ Suy ra nghiệm (1) là $x\in\left[3;+\infty\right)$.

Nếu $x<3\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<f(3)=4\\ g\left(x\right)>g(3)=4\end{cases}\Leftrightarrow f(x)<4<g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x).$

Hay $\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}<\dfrac{3x-1}{2x-4}\Leftrightarrow x<3$ nên (1) vô nghiệm khi $x<3.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in\left[3;+\infty\right)$.

Ví dụ 317. Giải BPT: $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $1\le x\le 3.$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x}\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x).$$

Do $1 \le x \le 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x-1 \le 4 \\ 0 \le 3-x \le 4 \end{cases}$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ trên $\left[0;4\right]$ có:

$f'(t)=\dfrac{t}{2\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0,\ \forall x\in\left(0;4\right] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[0;4\right]$.

Nên ta có: $f(x-1)>f(3-x) \Leftrightarrow x-1>3-x \Leftrightarrow x>2.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(2;3\right]$.

Ví dụ 318. Giải bất phương trình: $\sqrt{x} \ge \dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-2x^2+2x}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x>0$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge \dfrac{(x+1)(x^3-3x^2+3x-1)}{x(x^2-2x+2)}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x} \ge \dfrac{(x+1)(x-1)^3}{(x-1)^2+1} \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{x})^2+1} \ge \dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2+1} \Leftrightarrow f(\sqrt{x}) \ge f(x-1).$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3}{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\dfrac{t^4+3t^2}{t^2+1}\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{x})\ge f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x}\ge x-1 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-1\le 0 \Leftrightarrow 0\le x\le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của BPT là: $x\in\left(0;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Ví dụ 319. Giải bất phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}\ge x+1$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{x^2-2x+5}+1)\ge 4x\sqrt{x^2+1}+2x$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[\sqrt{(x-1)^2+4}+1\right]\ge 2x(2\sqrt{x^2+1}+1)$

$\Leftrightarrow (x-1).\left[\sqrt{(x-1)^2+4}+1\right]\ge (2x).\left[\sqrt{(2x)^2+4}+1\right] \Leftrightarrow f(x-1)\ge f(2x).$

Xét hàm số $f(t)=t.(\sqrt{t^2+4})$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\sqrt{t^2+1}+1+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $f(x-1)\ge f(2x) \Leftrightarrow x-1\ge 2x \Leftrightarrow x\le -1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x\in\left(-\infty;-1\right]$.

Ví dụ 320. Giải bất phương trình: $x^4-17x^3+34x^2-32x+12\le 5x\sqrt{x-1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

$(*) \Leftrightarrow 5x\sqrt{x-1}+25x^2(x-1)\ge x^4+8x^3+9x^2-32x+12$

$\Leftrightarrow 25x^2(x-1)+5x\sqrt{x-1} \ge (x^2+4x-4)^2+(x^2+4x-4)$

$\Leftrightarrow f(5x\sqrt{x-1}) \ge f(x^2+4x-4).$

Với $x \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \ge 0 \\ x^2+4x-4 \ge 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} \sqrt{x-1} \in \left[0;+\infty\right) \\ x^2+4x-4 \in \left[1;+\infty\right) \end{cases}.$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t)=2t+1>0,\ \forall t \ge 0.$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ và có $f(5x\sqrt{x-1}) \ge f(x^2+4x-4).$

$\Leftrightarrow 5x\sqrt{x-1} \ge x^2+4x-4 \xleftrightarrow{Chia:\ x^2>1} 5.\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}} \ge 1+4\cdot\dfrac{x-1}{x^2}$

$\Leftrightarrow 4\cdot\dfrac{x-1}{x^2}-5\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}}+1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \le \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1 \ge 0 \\ x^2-16x+16 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2-16x+16 \le 0 \Leftrightarrow 8-4\sqrt{3} \le x \le 8+4\sqrt{3}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm là $x \in [8-4\sqrt{3};8+4\sqrt{3}].$

Ví dụ 321. Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{24x-11}-16x\sqrt{2x-1}-1 \le 0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$ Đặt $y=\sqrt{2x-1} \ge 0 \Rightarrow y^2=2x-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2+1}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{24\cdot\dfrac{y^2+1}{2}-11}-16\cdot\dfrac{y^2+1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot\dfrac{y^2+1}{2}-1}-1 \le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{12y^2+1}-8(y^2+1)\sqrt{y^2}-1 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{12y^2+1} \ge 8y^3+8y+1$

$\Leftrightarrow 8y^3+12y^2+8y+2 \le \sqrt[3]{12y^2+1}+12y^2+1$

$\Leftrightarrow (2y+1)^3+(2y+1) \le (\sqrt[3]{12y^2+1})^3+\sqrt[3]{12y^2+1} \Leftrightarrow f(2y+1) \le f(\sqrt[3]{12y^2+1}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(2y+1) \le f(\sqrt[3]{12y^2+1}) \Leftrightarrow 2y+1 \le \sqrt[3]{12y^2+1}$

$\Leftrightarrow (2y+1)^3 \le 12y^2+1 \Leftrightarrow 8y^3+6y \le 0 \Leftrightarrow 2y(4y^2+3) \le 0 \Leftrightarrow y \le 0$

Suy ra: $\sqrt{2x-1} \le 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, bất phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

IV. Phương pháp đặt ẩn phụ để giải bất phương trình vô tỷ

Các dạng và phương pháp giải phương trình vô tỷ có điểm tương đồng với bất phương trình vô tỷ. Do đó, ta cần nắm vững những dạng cơ bản và phương pháp giải chúng. Nhưng lưu ý khi đặt ẩn phụ, ta cần tìm điều kiện chặt chẽ để không phát sinh ra bất phương trình hệ quả và biến đổi đại số đơn giản hơn.

Ví dụ 322. Giải bất phương trình: $x^2+3x\ge 2+\sqrt{5x^2+15x+14}$ (*)

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Quế Võ I – Bắc Ninh

Phân tích. *Nhận thấy* $5x^2+15x=5(x^2+3x)$, *nên khi đặt* $t=\sqrt{5x^2+15x+14}$ *thì biến x ngoài dấu căn sẽ biểu diễn được hết theo t và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{5x^2+15x+14}\ge 0$, suy ra: $x^2+3x=\dfrac{t^2-14}{5}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-14}{5}\ge 2+t\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-5t-24\ge 0\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 8\ \vee\ t\le -3\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow t\ge 8.$$

Với $t=\sqrt{5x^2+15x+14}\ge 8\Leftrightarrow x^2+3x-10\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$ hoặc $x\le -5$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in\left(-\infty;-5\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Ví dụ 323. Giải bất phương trình: $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2<2$ (*)

Học viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh

Lời giải. Điều kiện: $0\le x\le 4$.

$(*)\Leftrightarrow(x^2-4x)\sqrt{-x^2+4x}+x^2-4x+2<0$ (1)

Đặt $t=\sqrt{-x^2+4x}\ge 0$ thì $(*)\Leftrightarrow -t^3-t^2+2<0\Leftrightarrow(t-1)(t^2+2t+2)>0\Leftrightarrow t>1$.

Suy ra: $\sqrt{-x^2+4x}\ge 1\Leftrightarrow -x^2+4x>1\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$.

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm BPT là: $x\in(2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3})$.

Ví dụ 324. Giải bất phương trình: $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\ge 3\sqrt{x}$ (*)

Đại học khối B năm 2012

Phân tích. *Đối với PT, BPT chứa* $f\left[a(x\pm 1),\ \sqrt{a^2(x^2+1)\pm bx},\ c\sqrt{x}\right]$ *thường thì ta sẽ chia cho* $\sqrt{x}>0$ *sau khi xét* $x=0$ *có là nghiệm hay không và sẽ dẫn đến phương trình, bất phương trình có chứa* $f\left[a\left(\sqrt{x}\pm\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right),\ \sqrt{a^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\pm b},\ c\right]$ *có dạng thuận nghịch và đặt* $t=\sqrt{x}\pm\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=t^2\mp 2$ *đưa về dạng cơ bản.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$.

- Nếu $x=0$ thì bất phương trình luôn thỏa.
- Nếu $x>0$, chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$:

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}-4}-3\ge 0$ (1)

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, suy ra: $t^2=x+\dfrac{1}{x}+2$ thì $(*)\Leftrightarrow\sqrt{t^2-6}\ge 3-t$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t^2-6\ge 0\\3-t<0\end{cases}\\\begin{cases}3-t\ge 0\\t^2-6\ge(3-t)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>3\\t<-\sqrt{6}\ \vee\ t>\sqrt{6}\end{cases}\\\begin{cases}t\le 3\\t\ge\dfrac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>3\\\dfrac{5}{2}\le t\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow t\ge\frac{5}{2}\cdot$$

Với $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ge\dfrac{5}{2}$, suy ra $\Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}\ge 2\\\sqrt{x}\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\x\le\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm BPT là $x\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[4;+\infty\right)$.

Ví dụ 325. Giải bất phương trình: $8x^3+76x\sqrt{x}+1\ge 58x^2+29x \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$.

- Nếu $x=0$ thì bất phương trình luôn thỏa $(*)$ luôn thỏa.
- Nếu $x>0$, chia hai vế bất phương trình cho $x\sqrt{x}>0$, ta được:

$(*)\Leftrightarrow 8x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+76\ge 29\left(2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (1) và đặt $t=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\overset{\text{Cauchy}}{\ge}2\sqrt{2}$.

Suy ra: $t^3=8x\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+6\left(2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow 8x\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=t^3-6t$.

$(1)\Leftrightarrow t^3-6t+76\ge 29t\Leftrightarrow t^3-35t+76\ge 0\Leftrightarrow(t-4)(t^2+4t-19)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 4$.

Với $t\ge 4$, suy ra: $2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ge 4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}\le\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\\\sqrt{x}\ge\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\\x\ge\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\end{array}\right..$

Kết luận: So với điều kiện thì $x\in\left[0;\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ là tập nghiệm.

Ví dụ 326. Giải bất phương trình: $4(2x^2+1)+3(x^2-2x)\sqrt{2x-1}\ge 2x^3+10x \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow 3x(x-2)\cdot\sqrt{2x-1}\ge 2\cdot(x^3-4x^2+5x-2)$

$\Leftrightarrow 3x(x-2)\cdot\sqrt{2x-1}-2(x-2)(x^2-2x+1)\ge 0$

$\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left[3x\sqrt{2x-1}-2x^2+4x-2\right]\ge 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[3x\sqrt{2x-1}-2x^2+2(2x-1)\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(2\cdot\frac{2x-1}{x^2}+3\cdot\frac{\sqrt{2x-1}}{x}-2\right)\ge 0 \ ^{(i)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[2\cdot\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x}\right)^2+3\cdot\frac{\sqrt{2x-1}}{x}-2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+2\right)\ge 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x}-\frac{1}{2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2\ge 0\\ 2\sqrt{2x-1}\ge x\end{cases}\\ \begin{cases}x-2\le 0\\ 2\sqrt{2x-1}\le x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2\\ x^2-8x+4\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}0,5\le x\le 2\\ x^2-8x^2+4\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\le x\le 4+2\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}\le x\le 4-2\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[\frac{1}{2};4-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2;4+2\sqrt{3}\right]\cdot$

Nhận xét. *Bản chất của việc chia 2 vế được* (i) *và biến đổi sang* (ii) *là nhờ vào tính đẳng cấp của nhóm* $3x\sqrt{2x-1}-2x^2+2(2x-1)=3xy-2x^2+2y^2$, *với* $y=\sqrt{2x-1}$.

Ví dụ 327. Giải bất phương trình: $2\sqrt{5x-2}\ge 3\sqrt[4]{30x^2-17x+2}-\sqrt{6x-1}$ $\quad(*)$

Phân tích. *Nhận thấy* $30x^2-17x+2=(5x-2)(6x-1)$ *nên bất phương trình được viết lại là* $2.(\sqrt[4]{5x-2})^2-3.\sqrt[4]{(5x-2)(6x-1)}+(\sqrt[4]{6x-1})^2\ge 0.$ *Khi đó lối đi thường gặp là chia cho lượng dương bình phương, được phương trình bậc hai hoặc đặt hai ẩn phụ đưa về dạng đẳng cấp hai ẩn. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{2}{5}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow 2.(\sqrt[4]{5x-2})^2-3.\sqrt[4]{(5x-2)(6x-1)}+(\sqrt[4]{6x-1})^2\ge 0$$

$$\xleftrightarrow{Chia\,:\,(\sqrt[4]{6x-1})^2} 2\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{5x-2}{6x-1}}\right)^2-3\cdot\sqrt[4]{\frac{5x-2}{6x-1}}+1\ge 0\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{5x-2}{6x-1}}\le\frac{1}{2}\ \vee\ \sqrt[4]{\frac{5x-2}{6x-1}}\ge 1.$$

Với $\sqrt[4]{\frac{5x-2}{6x-1}}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{5x-2}{6x-1}\le\frac{1}{16}\Leftrightarrow 80x-32\le 6x-1\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le x\le\frac{31}{74}\cdot$

Với $\sqrt[4]{\frac{5x-2}{6x-1}}\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{2}{5}\\ 5x-2\ge 6x-1\end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $x\in\left[\frac{2}{5};\frac{31}{74}\right]\cdot$

_Ví dụ 328._ Giải BPT: $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$ (*)

Đại học An Ninh Nhân Dân

Phân tích. *Ta có* $\sqrt{49x^2+7x-42}=\sqrt{(7x+7)(7x-6)}$ *thì phương trình có dạng tổng tích và nếu đặt* $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\Rightarrow t^2=14x+1+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}$ *thì các biến còn lại đều biểu diễn hết theo t và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{6}{7}\cdot$ Đặt: $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6},\ (t\ge 0).$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 0\\ t^2+t-182<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 0\\ -14<t<13\end{cases}\Leftrightarrow 0\le t<13.$$

Với $0\le t<13,$ suy ra: $0\le\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}<13\Leftrightarrow\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}<13$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(7x+7)(7x-6)}<84-7x\Leftrightarrow\begin{cases}84-7x>0\\ (7x+7)(7x-6)\ge 0\\ (7x+7)(7x-6)<(84-7x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<12\\ x\le -1\ \vee\ x\ge\dfrac{6}{7}\\ x<6\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{6}{7};6\right)\cdot$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in\left[\dfrac{6}{7};6\right)\cdot$

_Ví dụ 329._ Giải bất phương trình: $8\sqrt{1-x}+5<3x+4(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1.$

$(*)\Leftrightarrow 4\sqrt{1-x^2}+4(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x})+3x-5>0$ (1)

Đặt: $t=\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}\Rightarrow\begin{cases}t^2=-3x+5-4\sqrt{1-x^2}\\ |t|\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le}\sqrt{1^2+(-2)^2}.\sqrt{(1+x)+(1-x)}=\sqrt{10}\end{cases}.$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{10}\le t\le\sqrt{10}\\ -t^2+4t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{10}\le t\le\sqrt{10}\\ 0<t<4\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\sqrt{10}.$$

Với $t>0,$ suy ra: $\sqrt{1+x}>2\sqrt{1-x}\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{5}\cdot$

Với $t<\sqrt{10},$ thì: $\sqrt{1+x}>2\sqrt{1+x}+\sqrt{10}\Leftrightarrow 4\sqrt{10+10x}<-13-3x,\ \forall x\in\left[-1;1\right].$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x\in\left(\dfrac{3}{5};1\right]\cdot$

Ví dụ 330. Giải bất phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+3)^3} - 9x \geq 0$ (*)

Học sinh giỏi tỉnh Bình Thuận 2015

Phân tích. *Nếu đặt* $t = \sqrt{x+3} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x+3$ *thì PT* $(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x(x+3) + 2t^3 \geq 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 3xt^2 + 2t^3 \geq 0$ *có dạng đẳng cấp bậc 3 và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -3$. Do $x = -3$ không là nghiệm nên chỉ xét $x > -3$.

Đặt $t = \sqrt{x+3} > 0 \Rightarrow t^2 = x+3$ thì $(*) \Leftrightarrow t^3 - 3xt^2 + 2t^3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{t}\right)^3 - 3\cdot\frac{x}{t} + 2 \geq 0,\ \left(\text{do}: t = \sqrt{x+3} > 0\right) \Leftrightarrow \frac{x}{t} \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -2t.$$

Suy ra: $x \geq -2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \geq -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow x \geq -2.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $x \in \left[-2; +\infty\right)$.

Ví dụ 331. Giải bất phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} \leq 6x$ (*)

Phân tích. *Nếu đặt* $t = \sqrt{x+2}$ *thì lúc đó:* $-3x^2 - 6x = -3x(x+2) = -3xt^2$ *sẽ đưa bất phương trình về dạng đẳng cấp bậc ba và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -2$.

$(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x(x+2) + 2(\sqrt{x+2})^3 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3xt^2 + 2t^3 \leq 0$, (1) với $t = \sqrt{x+2} \geq 0$.

- Nếu $t = 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ thì $(*)$ luôn thỏa.
- Nếu $t > 0 \Rightarrow x > -2$ thì chia hai vế cho t^3 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{t}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{t}\right) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{t} - 1\right)^2\left(\frac{x}{t} + 2\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{t} = 1 \text{ hoặc } \frac{x}{t} \leq -2.$$

Với $\frac{x}{t} = 1 \Leftrightarrow x = t$, suy ra: $\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Với $\frac{x}{t} \leq -2$, suy ra: $2\sqrt{x+2} \leq -x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ 4(x+2) \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 2 - 2\sqrt{3}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là: $x \in \left[-2; 2 - 2\sqrt{3}\right] \cup \{2\}\cdot$

Ví dụ 332. Giải bất phương trình: $x^3 + (3x^2 - 4x - 4)\sqrt{x+1} \leq 0$ (*)

Đề thi thử Đại học năm 2013 – THPT Ba Đình – Thanh Hóa

Phân tích. *Nếu đặt* $t = \sqrt{x+1}$ *thì* $t^2 = x+1$ *thì lúc đó:* $-4x - 4 = -4\left(x+1\right) = -4t^2$ *sẽ thu được bất phương trình đẳng cấp dạng:* $\alpha.x^n + \beta.x^a.t^b + \beta.t^n \leq 0$ *với* $n = a + b$ *mà đã biết cách giải và từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -1$.

$(*) \Leftrightarrow x^3 + \left[3x^2 - 4(x+1)\right]\sqrt{x+1} \le 0 \Leftrightarrow x^3 + (3x^2 - 4t^2)t \le 0,$ với $t = \sqrt{x+1} \ge 0.$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2t - 4t^3 \le 0 \qquad (1)$$

- Nếu $t = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ thì $(*)$ luôn thỏa.
- Nếu $t > 0 \Rightarrow x > -1$ thì chia hai vế cho t^3 ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{t}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{t}\right)^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{t} - 1\right)\left(\frac{x}{t} + 2\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{x}{t} \le 1 \Leftrightarrow t \ge x.$$

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt{x+1} \ge x \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x+1 \ge x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ 0 \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $x \in \left[-1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$

Ví dụ 333. Giải bất phương trình: $5x^2 + 2x + 2 \le 5x\sqrt{x^2 + x + 1}$ $(*)$

Phân tích. *Nhận thấy vế phải có dạng tích của bậc nhất với căn bậc hai chứa đa thức bậc hai và biểu thức ngoài dấu căn thức là cũng là đa thức bậc hai. Nếu phân tích biểu thức ngoài căn thức theo tích này, nghĩa là viết* $5x^2 + 2x + 2 = a.x^2 + b.(x^2 + x + 1)$ *và tồn tại hai số a, b thì sẽ hoàn toàn đưa được về dạng đẳng cấp. Thật vậy, đồng nhất hệ số, tức viết* $5x^2 + 2x + 2 = (a+b)x^2 + bx + b,$ *và so sánh hệ số, có ngay* $a = 3,\ b = 2.$ *Phương trình viết lại* $3x^2 + 2(x^2 + x + 1) - 5x\sqrt{x^2 + x + 1} \le 0,$ *rõ ràng có dạng đẳng cấp bậc hai nếu đặt* $t = \sqrt{x^2 + x + 1} > 0,$ *thì PT* $\Leftrightarrow 3x^2 + 2t^2 - 5xt \le 0.$ *Hoặc ta có thể chia trực tiếp với lượng dương, được bất phương trình bậc hai.*

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3x^2 + 2(x^2 + x + 1) - 5x\sqrt{x^2 + x + 1} \le 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x^2}{x^2 + x + 1} - 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + 2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \le \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + x + 1} \le x \le \sqrt{x^2 + x + 1} \quad (\Rightarrow x > 0).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 + x + 1} \le 3x \\ \sqrt{x^2 + x + 1} \ge x \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$$

Kết luận: Kết hợp x > 0, tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $x \in (0; +\infty)$.

Ví dụ 334. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} > \dfrac{4x-1}{3}$ $(*)$

Phân tích. *Nhận thấy* $(3x+1) - (2-x) = 4x - 1$ *có chung nhân tử với vế phải và sẽ đưa được về bất phương trình dạng tích số nếu sử dụng nhân liên hợp. Nhưng với*

điều kiện $x \in \left[-\frac{1}{3};2\right]$ *chưa xác định được lượng nhân vào* $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}$ *âm hay dương nên phải chia ra nhiều trường hợp, phức tạp. Do đó, ta sẽ chọn đặt hai ẩn phụ* $a=\sqrt{3x+1};\ b=\sqrt{2-x} \Rightarrow a^2-b^2=4x-1$ *cũng sẽ đưa được về bất phương trình dạng tích mà không cần chia trường hợp, đơn giản hơn. Từ đó có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-\frac{1}{3} \le x \le 2$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{3x+1} \ge 0 \\ b=\sqrt{2-x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=4x-1.$

$$(*) \Leftrightarrow a+b > \frac{a^2-b^2}{3} \Leftrightarrow 3(a+b)-(a-b)(a+b)>0 \Leftrightarrow (a+b)(3-a+b)>0$$

$$\Leftrightarrow 3-a+b>0,\ (\text{do}: a+b>0) \Rightarrow 3-\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}>0$$

$$\Leftrightarrow 3+\sqrt{2-x}>\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 3\sqrt{2-x}>2x-5: \text{ đúng } \forall x \in \left[-\frac{1}{3};2\right].$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[-\frac{1}{3};2\right]$.

Ví dụ 335. Giải bất phương trình: $(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x-1})(3x-1-\sqrt{5x^2-6x+1}) \le 4x$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 1$. Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{5x-1}>0 \\ b=\sqrt{x-1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-2b^2=3x+1 \\ a^2-b^2=4x \\ a^2-5b^2=4 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a^2-2b^2-2-ab) \le a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ a^2-5b^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a^2-2b^2-2-ab-a+b) \le 0 \\ a^2-5b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2b^2-2-ab-a+b \le 0 \\ a^2=5b^2+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3b^2+2-b\sqrt{5b^2+4}-\sqrt{5b^2+4}+b \le 0 \Leftrightarrow 3b^2+b+2 \le (b+1)\sqrt{5b^2+4}$$

$$\Leftrightarrow 9b^4+6b^3+13b^2+4b+4 \le 5b^4+10b^3+9b^2+8b+4$$

$$\Leftrightarrow 4b^4-4b^3+4b^2-4b \le 0 \Leftrightarrow b(b^3-b^2+b-1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b^3+b) \le 0 \Leftrightarrow b \le 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} \le 1 \Leftrightarrow x \le 2.$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in [1;2]$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 427. Giải bất phương trình: $(x^2-4x)\sqrt{2x^2-3x-2} \ge 0.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 428. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \ge \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$. $(x \in \mathbb{R})$

BT 429. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2-10x+16}-\sqrt{x-1} \le x-3.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 430. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{3x+3}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3x+3}-\sqrt{3-x}} \geq \dfrac{4}{x}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 431. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}} < \dfrac{27(12+x-\sqrt{x^2+24x})}{8(12+x+\sqrt{x^2+24x})}$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 432. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}} \geq \dfrac{2}{x}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 433. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5} \leq \sqrt{2x^2+9x+7}.$

BT 434. Giải bất phương trình: $x-3\sqrt{2-x^2}+2x^2\sqrt{2-x^2} \geq 0.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 435. Giải bất phương trình: $\dfrac{(x+2)^2}{(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1})^2} \leq x+8.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 436. Giải bất phương trình: $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x^2+2x-3}) \geq 4.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 437. Giải bất phương trình: $(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-1})(1+\sqrt{x^4+3x^2-4}) \geq 5.$

BT 438. Giải bất phương trình: $\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{2x+17}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 439. Giải bất phương trình: $\dfrac{6-3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}} \leq \dfrac{1-x}{x}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 440. Giải bất phương trình: $9x^2+\sqrt{4x-5} > \sqrt{x}+25.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 441. Giải bất phương trình: $\sqrt{8x+1}+\sqrt{2x-1}+3x^3-2 > 2x^2+3x.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 442. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x-2}+3x^3-8x \leq \sqrt{7-x}+17x^2-9.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 443. Giải bất phương trình: $3\sqrt{x^2+91} \geq 3\sqrt{x^2+7}+10x-12.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 444. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x-4}}{x-\sqrt{5x-4}} \geq 1.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 445. Giải bất phương trình: $x^2+x-\sqrt{2x-1} \leq 3-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 446. Giải bất phương trình: $(x+2)\sqrt{x+1} > 27x^3-27x^2+12x-2.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 447. Giải bất phương trình: $(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6})(x-1) > x+6.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 448. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-5x+6} < \sqrt{4x^2+11x-6}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 449. Giải bất phương trình: $\sqrt{4x^2+13x-173}+6\sqrt{x-3} \geq \sqrt{2x^2-x-1}.$

BT 450. Giải bất phương trình: $\sqrt{4x^3-x-12} > \sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^3-x-6}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 451. Giải bất phương trình: $2(x+1) \leq 3\sqrt{x-1}+\sqrt{4x^2+9x+3}.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 452. Giải bất phương trình: $\dfrac{2-x+\sqrt{x}}{\sqrt{2(x^2-5x+9)}-1} \leq 1.$ $(x \in \mathbb{R})$

BT 453. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5}\le\sqrt{2x^2+4x+8}$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 454. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{6(x^2-2x+4)}-2x}\ge\dfrac{1}{2}$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 455. Giải bất phương trình: $\dfrac{6-x+2\sqrt{x}}{3-\sqrt{3x^2-14x+27}}\ge 1$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 456. Giải bất phương trình: $\dfrac{3\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}-5}{2\sqrt{5x^2-2x+6}-5}\le 1$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 457. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}-6}{\sqrt{11x^2+5x+35}-6}\ge 1$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 458. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}+2\sqrt{x-4}-10}{\sqrt{x^3+4x^2-6x-4}-10}\ge 1$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 459. Giải bất phương trình: $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\le 1$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 460. Giải bất phương trình: $\dfrac{2\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^3+2x-3}-4}{\sqrt{x^3+8x^2+2x-27}-4}\le 1$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 461. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}-6}{\sqrt{11x^2+5x+35}-6}\ge 1$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 462. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^3+2x-3}+2(x+1)\le\sqrt{5x^3+4x^2+18x-11}$.

BT 463. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+x-2}\le\sqrt{3x^3+4x-4}$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 464. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-2}\le\sqrt{5x^2-6x+2}$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 465. Giải bất phương trình: $x-3\sqrt{x}+2\le\sqrt{x^2+7x+4}$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 466. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x^2-12x+5}\le\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^2-2x}$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 467. Giải bất phương trình: $5\sqrt{x-5}+3\sqrt{2x^2-x-17}\ge 4\sqrt{x^2-1}$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 468. Giải bất phương trình: $3\sqrt{81x^4+4}\ge 27x^2+42x+6$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 469. Giải bất phương trình: $4x^2-25x+14\le 3\sqrt{x^3-31x+30}$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 470. Giải bất phương trình: $\sqrt{2(4x^2-x-6)}-\sqrt{2x-3}<\sqrt{2x^2+x-1}$ $(x\in\mathbb{R})$

BT 471. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x(x^2-x+1)}\le\sqrt{\dfrac{(x^2+1)^3}{x}}$

BT 472. Giải bất phương trình: $8x^2-8x+3\le 8x\sqrt{2x^2-3x+1}$. $(x\in\mathbb{R})$

BT 473. Giải bất phương trình: $(2x+1)\sqrt{x+1}\ge x^2+2x-1$. $(x\in\mathbb{R})$

§6. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ



I. Các dạng toán thường gặp

① Dạng 1. Tìm m để $f(x;m)=0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D ?

- Bước 1. Tách m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x)=A(m)$.
- Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.
- Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $A(m)$ để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- Bước 4. Kết luận các giá trị của $A(m)$ để phương trình $f(x)=A(m)$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D.

Lưu ý

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min\limits_{x\in D} f(x)\le A(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại k điểm phân biệt.

② Dạng 2. Tìm m để bất phương trình $f(x;m)\ge 0$ hoặc $f(x;m)\le 0$ có nghiệm trên miền D ?

- Bước 1. Tách tham số m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $A(m)\le f(x)$ hoặc $A(m)\ge f(x)$.
- Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.
- Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm:
  + $A(m)\le f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.
  + $A(m)\ge f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m)\ge \min\limits_{x\in D} f(x)$.

Lưu ý

- Bất phương trình $A(m)\le f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in D \Leftrightarrow A(m)\le \min\limits_{x\in D} f(x)$.
- Bất phương trình $A(m)\ge f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in D \Leftrightarrow A(m)\ge \max\limits_{x\in D} f(x)$.
- Khi đặt ẩn số phụ để đổi biến, ta cần đặt điều kiện cho biến mới chính xác, nếu không sẽ làm thay đổi kết quả của bài toán do đổi miền giá trị của nó, dẫn đến kết quả sai lầm là hiển nhiên.

II. Các ví dụ minh họa

1. Các ví dụ về phương trình vô tỷ chứa tham số

Nhóm I. Độc lập và khảo sát trực tiếp hàm

Ví dụ 336. Tìm m để phương trình: $m\sqrt{2x^2+9}=x+m$ có đúng một nghiệm ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Chuyên Quốc Học – Huế

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Khi đó phương trình $\Leftrightarrow m(\sqrt{2x^2+9}-1)=x$

$$\Leftrightarrow m=\frac{x}{\sqrt{2x^2+9}-1}=f(x),\ (\text{do}: \sqrt{2x^2+9}-1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}).$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}-1}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có:

$f'(x)=\dfrac{2(36-x^2)}{\sqrt{2x^2+9}(9+\sqrt{2x^2+9})(\sqrt{2x^2+9}-1)^2}\cdot$ Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6\\x=6\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{4}$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có:

$f(-6)=-\dfrac{3}{4}$,

$f(6)=\dfrac{3}{4}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m=\pm\dfrac{3}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le m\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

Nhận xét. *Hình dạng đồ thị tương đồng với hình dạng biểu diễn $f(x)$ trong bảng biến thiên, do đó để phương trình $f(x)=A(m)$ có k nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ hai đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y=A(m)$ cắt nhau tại k điểm phân biệt. Từ đó, ta tìm được giới hạn của $A(m)$ thích hợp, rồi suy ra m.*

Ví dụ 337. Tìm m để phương trình: $\sqrt{2x^2-2mx+3}+2=x,\ (*)$ có nghiệm ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 khối A – THPT Chuyên – Vĩnh Phúc

Phân tích. *Đây là phương trình vô tỷ cơ bản dạng* $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\A=B^2\end{cases}\cdot$ *Do đó, ta tìm điều kiện, rồi bình phương hai vế và tách được m ra một vế một cách dễ dàng.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow(2x^2-2mx+3)=(x-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x-1=2mx \Leftrightarrow 2m=x-\dfrac{1}{x}+4=f(x),\ \forall x\ge 2.$

Xét hàm số $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+4$ trên $[2;+\infty)$ có: $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0,\ \forall x\ge 2.$

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2		$+\infty$
$f'(x)$	(gạch bỏ)		$+$	
$f(x)$	(gạch bỏ)	$\dfrac{11}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{11}{2}$ và

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty.$

Kết luận: Dựa bảng biến thiên, phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2m\ge\dfrac{11}{2}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{11}{4}$.

Ví dụ 338. Tìm m để phương trình: $3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}=m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-1;1\right]$?

Đề thi thử Đại học khối B năm 2014 – THPT Chuyên Vĩnh Phúc

Lời giải. Xét hàm số: $f\left(x\right)=3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ trên $\left[-1;1\right]$ có:

$$f'(x)=-\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}=-x\underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right)}_{>0,\ \forall x\in(-1;1)}.$$

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	(gạch bỏ)		$+$	0	$-$		(gạch bỏ)
$f(x)$	(gạch bỏ)	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	(gạch bỏ)

Ta có:

$f\left(-1\right)=-2\sqrt{2}$.

$f\left(0\right)=1$.

$f\left(1\right)=-4$.

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m=1$ hoặc $-4\le m<-2\sqrt{2}.$

Ví dụ 339. Tìm m để: $\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}=m$ có hai nghiệm phân biệt ?

Lời giải. Điều kiện: $-2\le x\le 5$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$ trên $\left[-2;5\right]$ có:

$$f'(x)=\frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}}-\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}}.$$

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow 2(2-x)\sqrt{-x^2+3x+10}=(3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}$ (1)

Do $\sqrt{-x^2+3x+10}\ge 0,\ \sqrt{-x^2+4x+21}\ge 0$ nên để phương trình có nghiệm thì $(2-x)$ và $(3-2x)$ cùng dấu, nghĩa là:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)(3-2x)\ge 0\\ 4(2-x)^2(-x^2+3x+10)=(3-2x)^2(-x^2+4x+21)\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\cdot.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{3}$		5	$+\infty$
$f'(x)$	//////	//////	$-$	0	$+$	//////	//////
$f(x)$	//////	3	↘	$\sqrt{2}$	↗	4	//////

Kết luận: Tư bảng biến thiên $\Rightarrow m\in\left(\sqrt{2};3\right]$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 340. Tìm m để: $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}),\ (*)$ có nghiệm ?

Phân tích. *Nếu tách m trực tiếp thì vế trái là một hàm số rất phức tạp và gây khó khăn trong công việc khảo sát sự biến thiên hàm này. Một cách tự nhiên, ta suy nghĩ đến việc làm cho nó đơn giản hơn bằng cách để ý:* $(5-x)-(4-x)=1$ *nên giúp liên tưởng đến nhân lượng liên hợp và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $0\le x\le 4\Rightarrow\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}>0.$

$$(*)\Leftrightarrow x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=\frac{m}{\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}}\Leftrightarrow m=(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}).$$

Xét hàm số $f(x)=(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ có:

$$f'(x)=(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x+12}}+\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}}\right)>0,\ \forall x\in\left[0;4\right].$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\left[0;4\right]$ nên $\begin{cases}\min\limits_{[0;4]}f(x)=f(0)=2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)\\ \max\limits_{[0;4]}f(x)=f(4)=12\end{cases}.$

Để $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\min\limits_{[0;4]}f(x)\le m\le\max\limits_{[0;4]}f(x)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)\le m\le 12.$

Nhận xét. *Trong ví dụ trên, tôi đã sử dụng kết quả: "Nếu hàm số* $y=f(x)$ *có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì các giá trị* $A(m)$ *cần tìm để phương trình* $f(x)=A(m)$ *là những* $A(m)$ *thỏa mãn:* $\min\limits_{x\in D}f(x)\le A(m)\le\max\limits_{x\in D}f(x)$ *". Và tôi không lập bảng biến thiên do: "* $f(x)$ *là hàm đồng biến trên đoạn* $\left[a;b\right]$ *thì* $\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)$ *và* $\max\limits_{[a;b]}f\left(x\right)=f\left(b\right)$*, và ngược lại thì* $\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(b),\ \max\limits_{[a;b]}f(x)=f(a).$

Ví dụ 341. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=m(4x-1),\ (*)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Phân tích. *Nhận thấy $(3x+1)-(2-x)=4x-1,$ có chung hạng tử với vế phải. Vì vậy ta sử dụng lượng liên hợp để độc lập m, đưa về phương trình dạng tích số và lúc đó phương trình luôn có một nghiệm $x=\dfrac{1}{4},\ \forall m.$ Nên để phương trình có hai nghiệm thực thì nhân tử còn lại phải có một nghiệm $x\neq\dfrac{1}{4}$ và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le 2.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow\dfrac{4x-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}}=m(4x-1)$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}}-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-1=0\\1=(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x})m\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\ \text{hoặc}\ \frac{1}{m}=\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}\ \ (1),\ (\text{do}:\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}>0\Rightarrow m>0).$$

Để $(*)$ có đúng hai nghiệm phân biệt thì (1) có đúng một nghiệm $x\neq\dfrac{1}{4}\cdot$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}$ trên $D=\left[-\dfrac{1}{3};2\right]\backslash\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ có:

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{3\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+1}}{2\sqrt{3x+1}.\sqrt{2-x}}\cdot$$

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow3\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+1}=0\Leftrightarrow3\sqrt{2-x}=\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{12}\cdot$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{17}{12}$		2	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	‖	$+$	0	$-$		
$f(x)$		$\frac{\sqrt{21}}{3}$	↗	$\sqrt{7}$ ‖ $\sqrt{7}$	↗	$\frac{2\sqrt{21}}{3}$	↘	$\sqrt{7}$	

Để (1) có đúng 1 nghiệm thì $\dfrac{1}{m}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\ \vee\ \dfrac{\sqrt{21}}{3}\le\dfrac{1}{m}<\sqrt{7}.$

Kết luận: $m\in\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7};\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right]\cup\left\{\dfrac{\sqrt{21}}{14}\right\}$ là những giá trị cần tìm.

Nhóm II. Đặt ẩn phụ và khảo sát hàm

Ví dụ 342. Tìm tham số m để: $\sqrt{21+4x-x^2}-\frac{3}{4}x+3=m(\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x}),\ (*)$ có nghiệm thực ?

Học sinh giỏi tỉnh Long An năm 2014

Phân tích. *Phương trình có dạng tổng – tích nên ta chọn phương án đặt ẩn phụ t = tổng và các biến còn lại biểu diễn được hết theo t. Nhưng lưu ý rằng, đây là bài toán chứa tham số nên ta cần tìm điều kiện cho ẩn phụ chính xác, nếu tìm sai thì việc giải tiếp sẽ không còn ý nghĩa gì. Có rất nhiều cách tìm điều kiện, nhưng tôi khuyên bạn nên dùng khảo sát hàm để tìm miền giá trị của t khi t phức tạp.*

Lời giải. Điều kiện: $-3\le x\le 7$.

$(*)\Leftrightarrow 4\sqrt{21+4x-x^2}-3x+12=4m(\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x})$ (1)

Đặt $t=\sqrt{x+3}+2\sqrt{7-x}$, suy ra: $t^2-19=4\sqrt{21+4x-x^2}-3x+12.$

$t'=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{7-x}}\cdot$ Cho $t'=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3}=\sqrt{7-x}\Leftrightarrow x=-1.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3		-1		7	$+\infty$
t'			$+$	0	$-$		
t		$2\sqrt{10}$	$\nearrow$	$5\sqrt{2}$	$\searrow$	$\sqrt{10}$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t\in\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow t^2-19=4mt\Leftrightarrow 4m=\frac{t^2-19}{t},\ \forall t\in\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-19}{t}$ trên đoạn $\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]$ có: $f'(t)=\frac{t^2+19}{t^2}>0,\ \forall t\in\left[\sqrt{10};5\sqrt{2}\right]$,

suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]$.

Do đó: $\min\limits_{\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]} f(t)=f(\sqrt{10})=-\frac{9\sqrt{10}}{10}$ và $\max\limits_{\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]} f(t)=f(5\sqrt{2})=\frac{31\sqrt{2}}{10}\cdot$

Để $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]} f(t)\le 4m\le \max\limits_{\left[\sqrt{10};\ 5\sqrt{2}\right]} f(t)\Leftrightarrow -\frac{9\sqrt{10}}{40}\le m\le\frac{31\sqrt{2}}{40}\cdot$

Kết luận: $m\in\left[-\frac{9\sqrt{10}}{10};\frac{31\sqrt{2}}{10}\right]$ thì phương trình đã cho có nghiệm thực.

Ví dụ 343. Tìm tham số m, ($m \in \mathbb{R}$) để phương trình sau có nghiệm thực:

$$2|x+3|+(2-2m).|x-3|=(m-1)\sqrt{x^2-9} \qquad (*)$$

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

Phân tích. *Phương trình cũng có dạng tổng – tích, nhưng tham số vẫn còn nằm trong phần tử của tổng. Do đó, ta không thể đặt* $t=$ *tổng mà thường thì chia hai vế cho lượng tổng có mang tham số sau khi xét nó* $=0$, *cụ thể chia cho* $|x-3|$ *và đặt ẩn phụ sẽ đưa được về phương trình bậc hai chứa tham số.*

Lời giải. Điều kiện: $x \le -3 \vee x \ge 3$.

Do $x=3$ không là nghiệm của phương trình nên xét $x \le -3 \vee x > 3$.

Với $x \le -3 \vee x > 3$, chia hai vế cho $|x-3| \ne 0$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 2\frac{|x+3|}{|x-3|}+2-2m=(m-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \Leftrightarrow 2\frac{x+3}{x-3}-(m-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}-2m+2=0 \quad (1)$$

Đặt: $t=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$, $(t \ge 0,\ t \ne 1)$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow 2t^2-(m-1)t-2m+2=0$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{2t^2+t+2}{t+2}=f(t)$ và xét hàm số $f(t)$ trên $[0;+\infty)\setminus\{1\}$ có:

$f'(t)=\dfrac{2t^2+8t}{(t+2)^2} \ge 0,\ \forall \begin{cases} t \ge 0 \\ t \ne 1 \end{cases}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1)$ và $(1;+\infty)$

Suy ra, phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm thỏa $t \ge 0,\ t \ne 1$

$\Leftrightarrow m \ge f(0)$ và $m \ne f(1) \Leftrightarrow m \ge 1$ và $m \ne \dfrac{5}{3}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm thực khi $m \in [1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

Ví dụ 344. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x}=\sqrt{-x^2+9x+9m}-\sqrt{9-x}$, $(*)$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt ?

Phân tích. *Đây là phương trình vô tỷ khá quen thuộc:* $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\sqrt{C}$ *(phương pháp giải: đặt điều kiện, chuyển vế sao cho hai vế không âm và bình phương). Khi đó được:* $9+2\sqrt{9x-x^2}=9m+9x-x^2$ *và đặt ẩn phụ t. Nhưng các em hãy lưu ý, đây là bài toán tìm tham số để phương trình có k nghiệm, khi đặt ẩn ta cần "**biện luận số nghiệm dựa vào sự tương quan giữa t và x**". Nghĩa là ứng với mỗi t cho được bao nhiêu nghiệm x, nhằm trả lời chính xác yêu cầu bài toán.*

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \le 9$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+9m}$

$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{9x-x^2}=-x^2+9x+9m \Leftrightarrow 9m=-(9x-x^2)+2\sqrt{9x-x^2}+9 \quad (1)$

Đặt $t=\sqrt{9x-x^2}\ge 0$ và ta có: $\sqrt{x.(9-x)}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{x+9-x}{2}=\dfrac{9}{2}$ nên $t\in\left[0;\dfrac{9}{2}\right]$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 9m=-t^2+2t+9$ (2)

Nếu $t=\dfrac{9}{2}\Rightarrow t=\sqrt{9x-x^2}=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$, có đúng một nghiệm x.

Nếu $t\in\left[0;\dfrac{9}{2}\right)$ thì với mỗi giá trị của t có 2 nghiệm phân biệt của x. Do đó, để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm phân biệt $t\in\left[0;\dfrac{9}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+9$ trên $\left[0;\dfrac{9}{2}\right)$ có: $f'(t)=-2t+2=0\Leftrightarrow t=1$.

t	$-\infty$	0		1		$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$+$	0	$-$		//////
$f(t)$	//////	9	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	//////

Kết luận: Để (2) có 2 nghiệm phân biệt $t\in\left[0;\dfrac{9}{2}\right)\Leftrightarrow 9\le 9m<10\Leftrightarrow 1\le m<\dfrac{10}{9}$.

Ví dụ 345. Tìm tham số m để: $x-5x\sqrt{5-x^2}=m-\sqrt{5-x^2}-7$, (*) có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải. Điều kiện: $-\sqrt{5}\le x\le 5$. Đặt: $t=x+\sqrt{5-x^2}\Rightarrow t'=1-\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$.

Cho $t'=0\Leftrightarrow\sqrt{5-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\5-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
t'	//////		$+$	0	$-$		//////
t	//////	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	$-\sqrt{5}$	//////

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tập giá trị của t là $t\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{10}\right]$.

Cũng từ bảng biến thiên, nhận thấy rằng:

- Ứng với $t=\sqrt{10}$ thì $t=x+\sqrt{5-x^2}$ có đúng một nghiệm x.

Ứng với mỗi $t\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$ thì $t=x+\sqrt{5-x^2}$ có đúng một nghiệm x.

Ứng với mỗt $t\in\left[\sqrt{5};\sqrt{10}\right)$ thì $t=x+\sqrt{5-x^2}$ có đúng hai nghiệm x.

$(*)\Leftrightarrow -5t^2+2t+39=2m$ (1)

Xét hàm số $f(t)=-5t^2+2t+39$ trên $\left[-\sqrt{5};\sqrt{10}\right]$ có $f'(t)=-10t+2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{5}\cdot$

- TH 1. Nếu $t\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$ thì yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

t	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$\frac{1}{5}$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(t)$			+	0	−		
$f(t)$		$14-2\sqrt{5}$	↗	$\frac{196}{5}$	↘	$14+2\sqrt{5}$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow 14+2\sqrt{5}<2m<\dfrac{196}{5}\Rightarrow m\in\left(7+\sqrt{5};\dfrac{196}{10}\right)\cdot$

- TH 2. Nếu $t\in\left[\sqrt{5};\sqrt{10}\right)$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 1 nghiệm.

t	$-\infty$	$\sqrt{5}$		$\sqrt{10}$	$+\infty$
$f'(t)$			−		
$f(t)$		$14+2\sqrt{5}$	↘	$2\sqrt{10}-11$	

Từ bảng, suy ra: $2\sqrt{10}-11<2m\le 14+2\sqrt{5}\Leftrightarrow m\in\left(\sqrt{10}-\dfrac{11}{2};7+\sqrt{5}\right]\cdot$

Kết luận: Hợp hai trường hợp, suy ra $m\in\left(\sqrt{10}-\dfrac{11}{2};\dfrac{196}{10}\right)\cdot$

Ví dụ 346. Tìm tham số m để: $\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{(2x-1)(2x+1)}+m\sqrt{2x+1}=0,$ (*) có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}-\sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{2x+1}}+m=0$ (1)

Đặt: $t=\sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$ có $t'=\dfrac{1}{(2x+1)^2\sqrt[4]{\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^3}}>0,\ \forall x>\dfrac{1}{2},$ nên tăng trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
t'	//////		$+$
t	//////	0	$\nearrow 1$

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} t = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x+1}} = 1.$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tập giá trị của t là: $t\in\left[0;1\right)$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow t^2 - t = m,$ (2) và ứng với mỗi $t=\sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x+1}},\ t\in\left[0;1\right)$ thì cho ta mỗi $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên để $(*)$ có hai nghiệm thực phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm thực phân biệt $t\in\left[0;1\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-t$ trên $\left[0;1\right)$ có $f'(t)=2t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\cdot$

t	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$+$	0	$-$	//////	//////
$f(t)$	//////	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	//////

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 347. Tìm tham số m để: $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})\left(m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x^2-x}\right)=1,\ (*)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải. Điều kiện: $x>1$. Suy ra: $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\neq 0.$

$$(*)\Leftrightarrow m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+16.\sqrt[4]{x^2-x}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{x}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}-16.\sqrt[4]{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}-16.\sqrt[4]{x(x-1)}\Leftrightarrow m=1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}-16.\sqrt[4]{\frac{x-1}{x}} \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}$. Lúc đó: (1) $\Leftrightarrow t^2+\frac{16}{t}=1-m \qquad (2)$

Vì $x>1 \Rightarrow t=\sqrt[4]{\dfrac{x}{x-1}}=\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x-1}}\in\left(1;+\infty\right)$ và ứng với mỗi t cho ta được một nghiệm x. Do đó, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có đúng hai nghiệm $t\in\left(1;+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\dfrac{16}{t}$ trên $\left(1;+\infty\right)$ có $f'(t)=2t-\dfrac{16}{t^2}=\dfrac{2t^3-16}{t^2}=0\Leftrightarrow t=2.$

t	$-\infty$	1		2		$+\infty$
$f'(t)$	//////		$-$	0	$+$	
$f(t)$	//////	17	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $12<1-m<17\Leftrightarrow -16<m<-11.$

<u>Ví dụ 348.</u> Tìm tham số m để $8x^2+4x+13=m^2(2x+1)\sqrt{x^2+3}$, $(*)$ có nghiệm ?

<u>Phân tích</u>*. Do* $8x^2+4x+13>0$ *nên cần* $m^2.(2x+1).\sqrt{x^2+3}>0\Leftrightarrow 2x+1>0$ *và nếu không phát hiện ra điều kiện kéo theo này thì kết quả chắc sẽ sai !!!. Bài toán chứa tích số* $(2x+1).\sqrt{x^2+3}$ *nên ta sẽ phân tích* $8x^2+4x+13$ *theo hai biểu thức tích, cụ thể* $8x^2+4x+13=(2x+1)^2+4(x^2+3)^2$ *và chia 2 vế cho lượng tích này sẽ tìm được phép đặt ẩn phụ và có lời giải chi tiết như sau:*

☙ ***<u>Lời giải</u>***. Điều kiện: $x>-\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow (2x+1)^2+4(x^2+3)=m^2(2x+1)\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}+4\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=m^2 \quad (1)$$

Đặt $t=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$, suy ra: $t'=\dfrac{4x^2+x+6}{\sqrt{x^2+3}}>0.$

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
t'	//////		$+$	
t	//////	0	$\nearrow$	2

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} t=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}=2.$

Do đó, miền giá trị của t là: $t\in\left(0;2\right)$.

$(1)\Leftrightarrow t+\dfrac{4}{t}=m^2$, (2) và để (1) có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t\in\left(0;2\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\dfrac{4}{t}$ trên $\left(0;2\right)$ có $f'(t)=1-\dfrac{4}{t^2}<0,\ \forall t\in\left(0;2\right)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$-$		//////
$f(t)$	//////	$+\infty$	$\searrow$	4	//////

Ta có: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(t+\frac{1}{t}\right) = +\infty.$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m^2 > 4 \Leftrightarrow m < -2$ hoặc $m > 2$.

Ví dụ 349. Tìm m để: $x^2+(m+2)x+4=(m-1)\sqrt{x^3+4x}$, $(*)$ có nghiệm ?

Đề thi thử Đại học khối A năm 2014 – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

Phân tích. *Phương trình có dạng đẳng cấp* $\alpha.f(x)+\beta.g(x)=\gamma.\sqrt{f(x).g(x)}$. *Do đó, ta sẽ chia cho lượng* $g(x)>0$ *có mang tham số sau khi xét* $g(x)=0$ *và có lời giải:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow (x^2+4)+(m+2)x=(m-1)\sqrt{x(x^2+4)}$ (1)

Do $x=0$ thì phương trình không thỏa. Chia hai vế cho $x \ne 0$ được:

$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x}-(m-1)\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}+m+2=0$ (2)

Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} \ge 2$ thì $(2) \Leftrightarrow t^2-(m-1)t+m+2=0 \Leftrightarrow m=\frac{t^2+t+2}{t-1}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+t+2}{t-1}$ trên $\left[2;+\infty\right)$ có: $f'(t)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow t=3.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	2		3		$+\infty$
$f'(t)$	//////		$-$	0	$+$	
$f(t)$	//////	8	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \ge 7$ thì phương trình có nghiệm.

Ví dụ 350. Tìm m để phương trình: $m\sqrt{x^3-1}=x^2+2$, $(*)$ có nghiệm thực ?

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 1$.

$(*) \Leftrightarrow m\sqrt{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=(x^2+x+1)-(x-1) \Leftrightarrow m.\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}=1-\frac{x-1}{x^2+x+1}$

Đặt: $t=\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}$ và có $t'=\frac{-x^2+2x+2}{2(x^2+x+1)^2\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

x	$-\infty$	1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
t'	//////		$+$	0	$-$	
t	//////	0	$\nearrow$	$\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là: $t \in \left[0;\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right]$. Khi đó:

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow mt = 1 - t^2 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{t} - t$ (do $t = 0$ không là nghiệm).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{t} - t$ trên $\left(0;\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right]$ có: $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} - 1 < 0.$

t	$-\infty$	0		$\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}$	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$-$		//////
$f(t)$	//////	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}$	//////

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}$.

Ví dụ 351. Tìm m để: $(2m-1)\sqrt{x+2} + (m-2)\sqrt{2-x} + m - 1 = 0,\ (*)$ có nghiệm ?

Học sinh giỏi tỉnh Thái Bình

Phân tích. *Nhận thấy* $(\sqrt{x+2})^2 + (\sqrt{2-x})^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2-x}}{2}\right)^2 = 1,$ *gợi nhớ đến công thức lượng giác* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$ *nên đặt ẩn phụ* $\sqrt{x+2} = 2\sin\alpha$ *và* $\sqrt{2-x} = 2\cos\alpha$ *với* $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. *Lúc đó yêu cầu bài toán trở thành: tìm tham số m để phương trình:* $2(2m-1)\sin\alpha + 2(m-2)\cos\alpha + m - 1 = 0$ *có nghiệm* $\forall\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Đến đây, sai lầm mà học sinh thường vấp phải là "phương trình cổ điển dạng: $a\sin\alpha + b\cos\alpha + c = 0$ *có nghiệm* $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2$ *" và từ đó kết luận giá trị của m. Nhưng điều ấy chỉ đúng khi* $\alpha \in \mathbb{R}$, *còn ở đây thì* $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. *Đối với dạng này,*

phương pháp xử lý tốt nhất là chuyển về phương trình đại số bằng cách đặt ẩn phụ: $t = \tan\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ *và* $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot$

Lời giải. Điều kiện: $-2 \le x \le 2$. Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+2} = 2\sin t \\ \sqrt{2-x} = 2\cos t\end{cases}$, $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 2(2m-1)\sin\alpha + 2(m-2)\cos\alpha + m - 1 = 0$ (1)

Đặt $t = \tan\frac{\alpha}{2}\cdot$ Do $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0;1] \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot$

$(1) \Leftrightarrow \frac{(8m-4)t}{1+t^2} + \frac{2(m-2)(1-t^2)}{1+t^2} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3t^2-4t-5}{t^2-8t-3}\cdot$

Xét hàm số $f(t) = \frac{3t^2-4t-5}{t^2-8t-3}$ trên $[0;1]$ có: $f'(t) = \frac{-20t^2-8t-28}{(t^2-8t-3)^2} < 0.$

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$.

Suy ra $\min\limits_{[0;1]} f(t) = f(1) = \frac{3}{5}$ và $\max\limits_{[0;1]} f(t) = f(0) = \frac{5}{3}\cdot$

Kết luận: Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[0;1]} g(t) \le m \le \max\limits_{[0;1]} g(t) \Leftrightarrow \frac{3}{5} \le m \le \frac{5}{3}\cdot$

Bình luận. *Công cụ chính là "kỹ thuật dùng đạo hàm". Khi ta cô lập được* $A(m)$ *thì phải làm thế nào để hàm số phải xét tương đối đơn giản. Lúc đó, có các hướng xử lý:*

- *Đạo hàm trực tiếp đối với hàm* $f(x)$ *đơn giản.*
- *"Làm sạch" bằng phương pháp nhân liên hiệp để được* $f(x)$ *đơn giản.*
- *Đặt ẩn phụ thích hợp và tìm điều kiện cho ẩn phụ chính xác.*

Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ *(hoặc* $f(t)$ *nếu đặt ẩn phụ), rồi dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *(hoặc* $y = f(t)$*) và đường thẳng nằm ngang* $y = A(m)$ *để biện luận số nghiệm k (số giao điểm k). Nếu hàm số* $y = f(x)$ *(hoặc* $y = f(t)$*) có GTLN và GTNN trên D thì giá trị m cần tìm để p hương trình có nghiệm là những m thỏa mãn:* $\min\limits_{x\in D} f(x) \le A(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x).$

Đó là phương pháp tổng quát đối với những bài toán độc lập được tham số m, còn đối với những bài không độc lập được m thì sao ? Ta cùng xét ví dụ sau:

Ví dụ 352. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x-m} + \sqrt{1-x} = 3m,\ (*)$ có nghiệm ?

Lời giải. Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x-m} \ge 0 \\ v = \sqrt{1-x} \ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x - m \\ v^2 = 1 - x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 - m \\ u + v = 3m\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2 - 2uv = 1 - m \\ u + v = 3m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3m \\ uv = \frac{9m^2+m-1}{2}\end{cases}\cdot$$

Do đó u,v là hai nghiệm của phương trình: $t^2-3mt+\dfrac{9m^2+m-1}{2}=0$ (1)

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm không âm $(\text{do}: u,v\ge 0)$:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ge 0\\ S\ge 0\\ P\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9m^2+2m-2\le 0\\ m\ge 0\\ 9m^2+m-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{37}-1}{18}\le m\le\frac{\sqrt{19}-1}{9}.$$

_Ví dụ 353._ Tìm m để: $\sqrt[5]{x^2-34x+m}-\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1,\ (*)$ có nghiệm ?

Lời giải. Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt[5]{x^2-34x+m}\\ v=\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^5=x^2-34x+m\\ v^4=x^2-34x+33\end{cases}.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^5-v^4=m-33\\ u-v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=u-1\ge 0\\ u^5-v^4=m-33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\ge 1\\ u^5-(u-1)^4+33=m,\end{cases}\quad (1)$$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\forall u\ge 1$.

Xét hàm số $f(u)=u^5-(u-1)^4+33$ trên $\left[1;+\infty\right)$ có:

$f'(u)=5u^4-4(u-1)^3>0,\ \forall u\ge 1\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Để (1) có nghiệm $\forall u\ge 1\Leftrightarrow m\ge\min\limits_{[1;+\infty)}f(u)\Leftrightarrow m\ge f(1)\Leftrightarrow m\ge 34.$

Kết luận: $m\ge 34$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

_Ví dụ 354._ Tìm tham số m để: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=m^3$, $(*)$ có nghiệm duy nhất ?

Lời giải. Điều kiện cần:

Ta thấy nếu x_o là một nghiệm của $(*)$ thì $1-x_o$ cũng là một nghiệm của $(*)$.

Do đó $(*)$ có nghiệm duy nhất thì phải có $x_o=1-x_o\Leftrightarrow x_o=\dfrac{1}{2}$.

Với $x_o=\dfrac{1}{2}$ thì $(*)\Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{1}{2}}+m-2\sqrt[4]{\dfrac{1}{4}}=m^3\Leftrightarrow m=m^3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm 1\end{array}\right.$.

Điều kiện đủ:

- Với $m=0$ thì $(*)\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=0$

  $\Leftrightarrow(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất nên nhận $m=0$.

- Với $m=-1$ thì $(*)\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=-1$

  $\Leftrightarrow\left[\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}+\sqrt{1-x}\right]+\left[x-2\sqrt{x(1-x)}+(1-x)\right]=0$

  $\Leftrightarrow(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}=0\\ \sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}.$

Do $x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất nên nhận $m=-1$.

- Với $m=1$ thì $(*)\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}-1=0$, có $f(1)=f(0)=0$ nên có ít nhất hai nghiệm $x=0,\ x=1$ nên loại $m=1$.

Kết luận: $m=-1\vee m=0$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bình luận. *Trong cách giải trên, tôi đã sử dụng điều cần và điều kiện đủ để tìm m trong bài toán có nghiệm duy nhất. Điểm mấu chốt để tìm ra điều kiện cần là nêu ra được nhận xét đặc trưng của phương trình, cụ thể chú ý đến tính chẵn lẻ, tính đối xứng của các biểu thức có mặt trong phương trình. Dạng tổng quát của bài toán là* $f\left[\sqrt[n]{x+a}+\sqrt[n]{b-x};\ \sqrt[2n]{(x+a)(b-x)}\right]=0$ *với* $f(x)=f(b-a-x)$. *Nên phương trình có nghiệm duy nhất thì nghiệm đó phải thỏa mãn* $x=b-a-x$ *suy ra* $x=\dfrac{b-a}{2}\cdot$

2. Các thí dụ về bất phương trình vô tỷ chứa tham số

Để xác định tham số m trong bài toán bất phương trình vô tỷ, ta cũng có các bước và các dạng giống như phương trình. Nhưng khi độc lập m, ngoài lưu ý về dấu khi nhân hoặc chia, ta cần ghi nhớ:

- $A(m)\le f(x)$ có nghiệm trên $\forall x\in D\Leftrightarrow A(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.
- $A(m)\ge f(x)$ có nghiệm trên $\forall x\in D\Leftrightarrow A(m)\ge \min\limits_{x\in D} f(x)$.
- $A(m)\le f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in D\Leftrightarrow A(m)\le \min\limits_{x\in D} f(x)$.
- $A(m)\ge f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in D\Leftrightarrow A(m)\ge \max\limits_{x\in D} f(x)$.

Vì thế, cần nắm vững các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số (trên đoạn, trên khoảng…).

Ví dụ 355. Tìm m để bất phương trình: $mx\sqrt[4]{x}(\sqrt{1-x}-1)^3\le x^3-3x-1,\ (*)$ có nghiệm thực ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 – Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An

Lời giải. Điều kiện: $0\le x\le 1$.

Do $x=0$ không là nghiệm của bất phương trình.

Với $x\in(0;1]\Rightarrow \sqrt{1-x}-1<0$ nên $(*)\Leftrightarrow m\ge \dfrac{x^3-3x-1}{x\sqrt[4]{x}(\sqrt{1-x}-x)^3}=f(x)$.

Để (1) có nghiệm trên $(0;1]\Leftrightarrow m\ge \min\limits_{(0;1]} f(x)$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{3x+1-x^3}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}(1-\sqrt{1-x})^3}=\left(3+\dfrac{1-x^3}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}(1-\sqrt{1-x})^3}\cdot$

Với $x\in(0;1]\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{x}\ge 0\\ 0<1-\sqrt{1-x}\le 1\end{cases}\Rightarrow f(x)\ge 3\Rightarrow \min\limits_{(0;1]} f(x)=3$ khi $x=1$.

Kết luận: $m \ge 3$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 356. Tìm m để bất phương trình: $mx - 3 \ge \sqrt{4x - x^2}$, $(*)$ có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \le 4$. Do $x = 0$ không là nghiệm bất phương trình.

Với $x \in (0;4]$ thì $(*) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{\sqrt{4x - x^2}}{x} + \dfrac{3}{x} = f(x)$ (1)

Để (1) có nghiệm $x \in (0;4]$ thì $m \ge \min\limits_{(0;4]} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x - x^2}}{x} + \dfrac{3}{x}$ có: $f'(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{4x - x^2}} - \dfrac{3}{x^2} < 0,\ \forall x \in (0;4]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;4] \Rightarrow \min\limits_{(0;4]} f(x) = f(4) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow m \ge \dfrac{3}{4}$.

Kết luận: $m \in \left[\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 357. Tìm m để bất phương trình: $x(4 - x) + m\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2 \ge 0$, $(*)$ có nghiệm $\forall x \in \left[2; 2 + \sqrt{3}\right]$?

Đề thi thử Đại học khối A năm 2014 – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \Rightarrow t'(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \ge 0,\ \forall x \in \left[2; 2 + \sqrt{3}\right]$.

Suy ra miền giá trị t là $t \in \left[\min\limits_{[2;2+\sqrt{3}]} t; \max\limits_{[2;2+\sqrt{3}]} t\right] \Leftrightarrow t \in \left[t(2); t(2 + \sqrt{3})\right] \Leftrightarrow t \in [1;2]$.

$(*) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{t^2 - 7}{t} = f(t),\ \forall t \in [1;2]$ và yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[1;2]} f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - 7}{t}$ trên $[1;2]$ có: $f'(t) = \dfrac{t^2 + 7}{t^2} > 0,\ \forall t \in [1;2]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;2] \Rightarrow m \ge \min\limits_{[1;2]} f(t) = f(1) = -6 \Rightarrow m \ge -6$.

Kết luận: $m \in [-6; +\infty)$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm $\forall x \in \left[2; 2 + \sqrt{3}\right]$.

Ví dụ 358. Tìm m để: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{(1 - x)(3 + x)} \le 2m$, $(*)$ có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ -3 \le x \le -2 \end{array}\right.$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{3 - 2x - x^2} \le 2m$, (1)

Đặt $t = 3 - 2x - x^2 \Rightarrow t' = -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	$-\infty$	-3		-2	-1	0		1	$+\infty$
t'	//////		+		////// 0		$-$		//////
t	//////	0	$\nearrow$	3	//////	3	$\searrow$	0	//////

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tập giá trị của t là $t \in [0;3]$.

$(1) \Leftrightarrow 2m \ge \sqrt{3-t} + \sqrt{t} = f(t)$, (2). Để $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t \in [0;3]$

$$\Leftrightarrow 2m \ge \min f(t) \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}\min f(t).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{3-t} + \sqrt{t}$ trên $[0;3]$ có $f'(t) = -\dfrac{1}{2\sqrt{3-t}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$ và có $f(0) = f(3) = \sqrt{3}$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{6}$, nên $\min\limits_{[0;3]} f(t) = \sqrt{3}$.

Kết luận: $m \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 359. Tìm m để: $\sqrt{\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - m} - \sqrt{3+2x-x^2} \le 2$, $(*)$ có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 3$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - m} \le 2 + \sqrt{3+2x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - m \ge 0 \\ \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - m \le (2 + \sqrt{3+2x-x^2})^2 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt: $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$ có $t' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$ và $t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
t'	//////		+	0	$-$	//////	
t	//////	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	//////

Dựa vào bảng biến thiên Þ tập giá trị của t là $t \in [2;2\sqrt{2}]$.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m \le t \\ m \ge t - \dfrac{t^4}{4} = f(t) \end{cases}$. Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \le \max\limits_{[2;2\sqrt{2}]} t \\ m \ge \min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} f(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2\sqrt{2} \\ m \ge \min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} f(t) \end{cases}$.

Xét hàm số $f(t) = t - \dfrac{t^4}{4}$ trên $[2;2\sqrt{2}]$ có $f'(t) = 1 - t^3 < 0$, $\forall t \in [2;2\sqrt{2}]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến nên $\min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} f(t) = f(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 16$.

Kết luận: BPT có nghiệm $\Leftrightarrow m \le 2\sqrt{2}$ và $m \ge 2\sqrt{2} - 16 \Leftrightarrow m \in [2\sqrt{2} - 16; 2\sqrt{2}]$.

Ví dụ 360. Tìm m để bất phương trình: $x^2+\sqrt{(1-x^2)^3}\ge m,\ (*)$ có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $f(x)=x^2+\sqrt{(1-x^2)^3}$ thì $(*)\Leftrightarrow m\le f(x)$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\le \max\limits_{[-1;1]} f(x)$.

Xét hàm số $f(x)=x^2+\sqrt{(1-x^2)^3}$ trên $\left[-1;1\right]$ có $f'(x)=2x-3x\sqrt{1-x^2}$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x(2-3\sqrt{1-x^2})=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\pm\dfrac{\sqrt5}{3}$.

Ta có: $f\left(\pm1\right)=1,\ f\left(0\right)=1,\ f\left(\pm\dfrac{\sqrt5}{3}\right)=\dfrac{23}{27}$ nên $\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=1\Rightarrow m\le 1$.

Kết luận: $m\le 1$ sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 361. Tìm m để: $\sqrt{x^2-2x-3}+\sqrt{8-2x-x^2}>m,\ (*)$ có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}-2\le x\le -1\\ 3\le x\le 4\end{array}\right.$. Đặt $t=x^2-2x\Rightarrow t'=2x-2=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$		-2		-1	1	3		4		$+\infty$
t'	//////	//////		$-$	//////	0	//////	$+$		//////	//////
t	//////	//////	8	$\searrow$	3 //////	//////	////// 3	$\nearrow$	8	//////	//////

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t\in\left[3;8\right]$.

$(*)\Leftrightarrow m<\sqrt{t-3}+\sqrt{8-t},\ (1)$ và đặt $f(t)=\sqrt{t-3}+\sqrt{8-t}$.

Để $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $t\in\left[3;8\right]\Leftrightarrow m<\max\limits_{[3;8]} f(t)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t-3}+\sqrt{8-t}$ trên $\left[3;8\right]$ có: $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t-3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{8-t}}$.

Cho $f'(t)=0\Rightarrow t=\dfrac{11}{2}\Rightarrow\begin{cases}f(3)=f(8)=\sqrt5\\ f\left(\dfrac{11}{2}\right)=\sqrt{10}\end{cases}$ nên $\max\limits_{[3;8]} f\left(t\right)=\sqrt{10}\Rightarrow m<\sqrt{10}$.

Kết luận: $m\in\left(-\infty;\sqrt{10}\right)$ sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 362. Tìm m để: $2(x+\sqrt{2-x^2})-x\sqrt{2-x^2}\ge 3m,\ (*)$ nghiệm đúng $\forall x\in\left[-\sqrt2;\sqrt2\right]$?

Lời giải. Điều kiện: $-\sqrt2\le x\le\sqrt2$. Đặt: $t=x+\sqrt{2-x^2}$.

Ta có: $t'=1-\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$. Cho $t'=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=x\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
t'	//////		$+$	0	$-$		//////
t	//////	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$	//////

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tập giá trị của t là $t\in\left[-\sqrt{2};2\right]$.

$(*)\Leftrightarrow 3m\le -\frac{1}{2}t^2+2t+1=f(t)$ (1)

Để $(*)$ nghiệm đúng $\Leftrightarrow$ (1) nghiệm đúng $\forall t\in\left[-\sqrt{2};2\right]\Leftrightarrow 3m\le \min\limits_{\left[-\sqrt{2};2\right]} f(t)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=-\frac{1}{2}t^2+2t+1$ trên $\left[-\sqrt{2};2\right]$ có $f'(t)=-t+2=0\Leftrightarrow t=1$.

Ta có: $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2};\ f(2)=3$ và $\min f(t)=-2\sqrt{2}$.

Kết luận: $3m\le -2\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 363. Tìm m để: $x^4+x^2+m+2\le 2x\sqrt{x^2+1}$, $(*)$ nghiệm đúng $\forall x\in\left[0;1\right]$?

Lời giải. Đặt $t=x\sqrt{x^2+1}$. Do $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$. Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow -m\ge t^2-2t+2=f(t)$, (1). Để $(*)$ có nghiệm đúng $\forall x\in\left[0;1\right]$

$\Leftrightarrow$ (1) nghiệm đúng $\forall t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow -m\ge \max\limits_{\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2-2t+2$ trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$ có $f'\left(t\right)=2t-2=0\Rightarrow t=1$.

Ta có: $f(0)=2;\ f(1)=1;\ f(\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}$ nên $\max\limits_{\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t)=2\Rightarrow -m\ge 2\Leftrightarrow m\le -2$.

Kết luận: $m\in\left(-\infty;-2\right]$ thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 474. Tìm tham số m để: $m\sqrt{x^2-2x+2}=x+2$ có 2 nghiệm phân biệt ?

BT 475. Tìm m để phương trình: $m\sqrt{x^2+2}=x+m$ có ba nghiệm phân biệt ?

BT 476. Tìm tham số m để phương trình: $2x+1=m\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm ?

BT 477. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm ?

BT 478. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

BT 479. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$ có nghiệm thực duy nhất ?

BT 480. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$?

BT 481. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$ có nghiệm thực ?

BT 482. Tìm tham số m để : $\sqrt[4]{x^2+2x+4}-\sqrt{x+1}=m$ có đúng một nghiệm ?

BT 483. Tìm tham số m để: $(m-2)(1+\sqrt{x^2+1})=x^2-m$ có nghiệm thực ?

BT 484. Tìm m để: $\sqrt{x^2-4x+5}=m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương ?

BT 485. Tìm m để: $6+x+2\sqrt{(4-x)(2x-2)}=m+4(\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-2})$ có nghiệm thực ?

BT 486. Tìm m để: $2(x+\sqrt{4-x^2})-x\sqrt{4-x^2}+2-3m=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

BT 487. Tìm tham số m để: $\sqrt{x}+\sqrt{4-x}-\sqrt{m+4x-x^2}=0$ có nghiệm thực ?

BT 488. Tìm tham số m để: $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm thực ?

BT 489. Tìm tham số m để $m(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2)=\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ có nghiệm thực ?

BT 490. Tìm tham số m để: $|1+x|+(4-m)|x-1|=(m-1)\sqrt{x^2-1}$ có nghiệm ?

BT 491. Tìm m để: $2mx=2x^2-3\sqrt{2x+4x^3}+1$ có hai nghiệm phân biệt ?

BT 492. Tìm tham số m để: $m(x+4)\sqrt{x^2+2}=5x^2+8x+24$ có nghiệm ?

BT 493. Tìm tham số m để: $3x^2+2x+3=m(x+1)\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm ?

BT 494. Tìm tham số m để phương trình: $10x^2+8x+4=m(2x+1)\sqrt{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

BT 495. Tìm m để: $(4m-3)\sqrt{x+3}+(3m-4)\sqrt{1-x}+m-1=0$ có nghiệm ?

BT 496. Tìm tham số m để: $m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right)=2\sqrt{x^2-x^4}+|x|+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm thực ?

BT 497. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}=m$ có nghiệm ?

BT 498. Tìm tham số m để: $\sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}=m$ có nghiệm duy nhất ?

BT 499. Tìm tham số m để phương tình $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt ?

BT 500. Tìm m để: $(m-1)\sqrt{(x^2+2)^3}+(x+4)(11x^2-8x+8)=0$ có nghiệm ? có đúng 4 nghiệm thực phân biệt ?

BT 501. Tìm m để: $(x^2+1)^2+m=x\sqrt{x^2+2}+4$ có hai nghiệm phân biệt ?

BT 502. Tìm tham số m để: $\sqrt{x^4-4x^3+16x+m}+\sqrt[4]{x^4-4x^3+16x+m}=6$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Phần 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ – VÔ TỶ



§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

1. Hệ phương trình đối xứng loại I

– Nhận dạng: Đổi chỗ hai ẩn thì hệ phương trình không thay đổi và trật tự các phương trình cũng không thay đổi.

– Cách giải: Biến đổi về dạng tổng – tích

+ Đặt $S = x + y,\ P = xy.$

+ Giải hệ với ẩn $S,\ P$ với điều kiện có nghiệm $(x;y)$ là $S^2 \ge 4P.$

+ Tìm nghiệm $(x;y)$ bằng cách thế vào phương trình $X^2 - SX + P = 0.$

– Một số biến đổi để đưa về dạng tổng – tích thường gặp:

+ $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P.$

+ $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = S^3 - 3SP.$

+ $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = S^2 - 4P.$

+ $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2.$

+ $x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) = \cdots\cdots\cdots$

2. Hệ phương trình đối xứng loại II

– Nhận dạng: Đổi chỗ hai ẩn thì hệ phương trình không thay đổi và trật tự các phương trình thay đổi (phương trình này trở thành phương trình kia).

– Cách giải: Lấy vế trừ vế và phân tích thành nhân tử, lúc nào cũng đưa được về dạng $(x-y).f(x) = 0,$ tức luôn có $x = y.$

3. Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases} \quad (i)$

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} d_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2) = d_1.d_2 & (1) \\ d_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) = d_1.d_2 & (2) \end{cases}$$

Lấy $(1) - (2) \Rightarrow (a_1d_2 - a_2d_1)\cdot x^2 + (b_1d_2 - b_2d_1)\cdot xy + (c_1d_2 - c_2d_1)\cdot y^2 = 0$

Đây là phương trình đẳng cấp bậc hai nên sẽ tìm được mối liên hệ $x,\ y.$

(bản chất là nhân chéo hai phương trình lại với nhau tạo đồng bậc).

Lưu ý. Ta sẽ làm tương tự đối với dạng đẳng cấp bậc ba và bậc bốn.

4. Sử dụng phương pháp thế tạo phương trình đẳng cấp (đồng bậc)

Dạng thường gặp là $\begin{cases} f_m(x;y) = a \\ f_n(x;y) = f_k(x;y) \end{cases}$ với $f_m(x;y),\ f_n(x;y),\ f_k(x;y)$ là các biểu thức đẳng cấp bậc $m,\ n,\ k$ thỏa mãn $m + n = k.$

Phương pháp giải: Sử dụng kỹ thuật đồng bậc, tức:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} = f_m(x;y) \\ \downarrow \\ a \cdot f_n(x;y) = a \cdot f_k(x;y) \end{cases} \Rightarrow f_m(x;y) \cdot f_n(x;y) = a.f_k(x;y)$ và đây là phương trình đẳng cấp bậc $k,$ sẽ tìm được mối liên hệ giữa $x,\ y.$

Chẳng hạn: $\begin{cases} 4x^4 + y^4 = 4x + y \\ x^3 + y^3 - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.(4x^4 + y^4) = (4x + y).\boxed{2} \\ \uparrow \\ \overline{x^3 + y^3 - xy^2} = \boxed{2} \end{cases}$

Suy ra: $2(4x^4 + y^4) = (x^3 + y^3 - xy^2)(4x + y)$ có dạng đẳng cấp bậc bốn.

★ Nhóm ví dụ về hệ đối xứng loại I

Ví dụ 364. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$ $(*)$ $(x;y \in \mathbb{R}).$

Đại học Sư phạm Hà Nội

Phân tích. *Khi thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi và trật tự các phương trình trong hệ cũng không thay đổi $\Rightarrow$ đây là hệ đối xứng loại I và phương pháp giải là biến đổi về tổng và tích.*

Lời giải. Đặt $S = x + y,\ P = xy,\ (S^2 \geq 4P).$

Khi đó: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] = S^3 - 3PS.$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3SP = 8 \\ S + 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P = 2 - S \\ 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases}$: thỏa điều kiện.

Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases},$ suy ra: $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S = (x;y) = \left\{(2;0);(0;2)\right\}\cdot$

Ví dụ 365. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 91 \end{cases}$ $(*)$ $(x;y \in \mathbb{R}).$

Lời giải. Đặt: $S = x + y$ và $P = xy,\ (S^2 \geq 4P).$

Khi đó: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = (x+y)^2 - xy = S^2 - P \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = \left[(x+y)^2 - 2xy\right]^2 - x^2y^2 = (S^2 - 2P)^2 - P^2 \end{cases}.$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - P = 13 \\ (S^2 - 2P)^2 - P^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 13 + P \\ (13 - P)^2 - P^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 3 \\ S = \pm 4 \end{cases}$: thỏa điều kiện.

Suy ra: $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(-3;-1);(-1;-3);(1;3);(3;1)\}\cdot$

Ví dụ 366. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=4\\ x(x+y+1)+y(y+1)=2\end{cases}$ $(*)$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy+x+y=4\\ x^2+y^2+xy+x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[(x+y)^2+(x+y)\right]-2xy=4\\ \left[(x+y)^2+(x+y)\right]-xy=2\end{cases}\quad(1)$$

Xem đây là hệ bậc nhất với hai ẩn $\left[(x+y)^2+(x+y)\right]$, xy ta được:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2+(x+y)=0\\ xy=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\ xy=-2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x+y=-1\\ xy=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=-\sqrt{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=\sqrt{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(\pm\sqrt{2};\mp\sqrt{2});(1;-2);(-2;1)\}\cdot$

Nhận xét. *Bạn đọc có thể giải bình thường bằng cách đặt* $S=x+y,\ P=xy,$ *cũng ra được kết quả tương tự như trên.*

Ví dụ 367. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy(x-y)=-2\\ x^3-y^3=2\end{cases}$ $(*)$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Nếu đặt* $t=-y$ *thì hệ* $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}-xt(x+t)=-2\\ x^3+t^3=2\end{cases}$ *và đây là hệ đối xứng loại I.*

Lời giải. Đặt $t=-y$ thì $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}-xt(x+t)=-2\\ x^3+t^3=2\end{cases}$, (i). Đặt $\begin{cases}S=x+t\\ P=xt\end{cases}$, $(S^2\ge 4P)$.

Suy ra: $x^3+t^3=(x+t)^3-3xt.(x+t)=S^3-3SP$.

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}SP=2\\ S^3-3SP=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SP=2\\ S^3=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=2\\ P=1\end{cases}\cdot\text{ Suy ra: }\begin{cases}x+t=2\\ xt=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ t=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(1;-1)\}\cdot$

Ví dụ 368. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $(*)$

Đại học khối A năm 2012

Lời giải. Đặt $t=-x$ thì $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}y^3+t^3+3(y^2+t^2)-9(t+y)=22\\ y^2+t^2+t+y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (i)

Đặt $\begin{cases} S = y + t \\ P = yt \end{cases}$, $(S \geq 4P)$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3PS + 3(S^2 - 2P) - 9S = 22 \\ S^2 - 2P + S = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{3}{4} \\ S = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + t = -2 \\ yt = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S = (x;y) = \left\{ \left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2} \right); \left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2} \right) \right\}$.

Ví dụ 369. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$ $(*)$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Đại học Hoa Sen

Phân tích. *Nếu thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi và trật tự các phương trình cũng không thay đổi nên đây là hệ đối xứng loại I. Nhưng trong hệ phương trình có chứa:* $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, *nên ta sẽ đặt:* $S = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $P = \sqrt{xy}$ *hoặc ta có thể đặt* $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, *rồi sau đó đặt S, P theo u, v cũng được kết quả tương tự.*

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y \geq 0$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \geq 0 \\ v = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^4v^2 + u^2v^4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ u^2v^2(u^2 + v^2) - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (uv)^2\left[(u+v)^2 - 2uv\right] = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PS = 6 \\ P^2(S^2 - 2P) = 20 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} S = u + v \\ P = uv \end{cases}, (S^2 \geq 4P).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PS = 6 \\ (PS)^2 - 2P^3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ S = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 2 \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S = (x;y) = \{(1;4), (4;1)\}$.

Ví dụ 370. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ x + y = 5 + \sqrt{(x-1)(y-1)} \end{cases}$ $(*)$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ b = \sqrt{y-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x - 1 \\ b^2 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = x + y - 2.$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^2+b^2+2=5+ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ (a+b)^2-3ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{y-1}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(2;5);(5;2)\}\cdot$

Ví dụ 371. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$ $(*)$ $(x;y\in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Nếu thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi và trật tự các phương trình cũng không thay đổi nên đây là hệ đối xứng loại I (biến đổi về tổng – tích). Phương trình đầu tiên đã có dạng tổng và tích nên ta quan tâm đến việc biến đổi phương trình thứ hai. Do hai vế đều dương nên bình phương lên sẽ thu được dạng tổng – tích và đặt ẩn phụ $S=x+y,\ P=xy,$ từ đó có lời giải 1. Ngoài ra, ta có thể giải chúng bằng phương pháp đánh giá (lời giải 2, lời giải 3).*

Lời giải 1. Điều kiện: $\begin{cases} xy\ge 0 \\ x,y\ge -1 \end{cases}$ thì $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2\sqrt{x+y+xy+1}=14 \end{cases}$ (i)

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$, $(S^2\ge 4P)$ thì $(i)\Leftrightarrow \begin{cases} S-\sqrt{P}=3 \\ S+2\sqrt{S+P+1}=14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=(S-3)^2;\ S\ge 3 \\ 2\sqrt{S^2-5S+10}=14-S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\le S\le 14 \\ 3S^2+8S-156=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=9 \end{cases}$$: thỏa điều kiện.

Suy ra: $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases}$ nên x,y là nghiệm phương trình: $X^2-6X+9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Lời giải 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Từ (1), suy ra: $x+y=3+\sqrt{xy}$ nên $x+y>0$ và do $xy\ge 0$ nên $x\ge 0,\ y\ge 0$ (3)

$$(1)\Leftrightarrow x+y=3+\sqrt{x.y} \overset{Cauchy}{\le} 3+\frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2(x+y)\le 6+x+y \Leftrightarrow x+y\le 6 \qquad (4)$$

$$(2)\Leftrightarrow 4=1.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{y+1} \overset{Cauchy-Schwarz}{\le} \sqrt{2(x+y+2)}\le \sqrt{2.(6+2)}=4.$$

Nghiệm hệ phương trình là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (3), (4) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=6 \\ \sqrt{x+1}=\sqrt{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(3;3)\right\}\cdot$

Lời giải 3. Đưa về tổng các số không âm.

Lấy $2.(1)-4.(2)\Rightarrow 2x+2y-2\sqrt{xy}-4\sqrt{x+1}-4\sqrt{y+1}=-10$

$$\Leftrightarrow (x-2\sqrt{xy}+y)+(x+1-2.2\sqrt{x+1}+4)+(y+1-2.2\sqrt{y+1}+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x+1}-2)^2+(\sqrt{y+1}-2)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}\\ \sqrt{x+1}=2\\ \sqrt{y+1}=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(3;3)\right\}\cdot$

★ Nhóm ví dụ về hệ đối xứng loại II

_Ví dụ 372._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3+x^2y=3 & (1)\\ 2y^3+xy^2=3 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Nếu thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi và phương trình này trở thành phương trình kia $\Rightarrow$ đây là hệ đối xứng loại II (lấy vế trừ vế). Ngoài ra, nếu quy đồng thì đây là hệ đẳng cấp bậc ba (đặt $x=ty$).*

Lời giải 1. Xem đây là hệ phương trình đối xứng loại II.

$(1)-(2)\Rightarrow 2(x^3-y^3)+xy(x-y)=0\Leftrightarrow (x-y)(2x^2+2y^2+3xy)=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[2\left(x+\frac{3}{4}y\right)^2+\frac{7y^2}{8}\right]=0\Leftrightarrow x=y,\ \left(\text{do}:2\left(x+\frac{3}{4}y\right)^2+\frac{7y^2}{8}>0,\forall x;y\right)\cdot$$

Thế vào $(1)\Leftrightarrow 3x^3=3\Leftrightarrow x=1,$ suy ra: $y=1.$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(1;1)\right\}\cdot$

Lời giải 2. Xem đây là hệ phương trình đẳng cấp bậc ba

Đặt $x=ty\neq 0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}2t^3y^3+t^2y^3=3\\ 2y^3t^3+ty^3=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y^3(2t^3+t^2)=3\\ y^3(2t^3+t)=3\end{cases}\Rightarrow \dfrac{2t^3+t^2}{2t^3+t}=1$

$$\Leftrightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow t=1,\ \text{suy ra: } x=y,\ \text{thế vào } (1)\Leftrightarrow 3x^3=3\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1.$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(1;1)\right\}\cdot$

_Ví dụ 373._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(4x+2)^2=2y+15 & (1)\\ (4y+2)^2=2x+15 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi Tp. Hồ Chí Minh

Lời giải. Điều kiện: $x\geq -\dfrac{15}{2},\ y\geq -\dfrac{15}{2}\cdot$

Lấy $(1)-(2)\Rightarrow (x-y)(8x+8y+9)=0\Leftrightarrow y=x$ hoặc $y=-\dfrac{8x+9}{8}\cdot$

- Với $y = x$, thế vào (1) $\Leftrightarrow 16x^2 + 14x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$ hoặc $x = y = -\frac{11}{8}$.

- Với $y = -\frac{8x+9}{8}$ thì $(1) \Leftrightarrow 64x^2 + 72x - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 \pm \sqrt{221}}{16} \\ y = \frac{-9 \mp \sqrt{221}}{16} \end{cases}$.

Kết luận: $S = (x;y) = \left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{11}{8};-\frac{11}{8}\right);\left(\frac{-9 \pm \sqrt{221}}{16};\frac{-9 \mp \sqrt{221}}{16}\right)\right\}$.

Ví dụ 374. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y^2 = y^3 & (1) \\ y + x^2 = x^3 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Czech And Slovak Mathematical Olympiad

Lời giải. Lấy $(1) - (2) \Rightarrow x - y + y^2 - x^2 = y^3 - x^3$

$\Leftrightarrow (x-y) + (y-x)(y+x) = (y-x)(y^2 + xy + x^2)$

$\Leftrightarrow (x-y)(y + x - 1 - y^2 - xy - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0 \end{array}\right.$.

- Với $x = y$, thế vào (1) $\Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \vee x = y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- Với $x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{2}(y^2 - 2y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(0;0);\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Nhận xét. *Nếu không phát hiện ra lượng* $x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0$ *đưa được về dạng tổng các số không âm, ta có thể nhìn nhận với góc độ đối xứng tổng tích và kết hợp với phương trình thu được sau khi lấy 2 phương trình của hệ cộng lại với nhau (hệ đối xứng loại I, dành cho bạn đọc). Để hiểu kỹ hơn vấn đề này, ta cùng xét ví dụ:*

Ví dụ 375. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y & (1) \\ yx^2 + 6y - x^2 - 6 = xy^2 + x & (2) \end{cases}$

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow 2xy(y-x)+7(y-x)+(x-y)(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (y-x)(x+y-2xy+7)=0 \Leftrightarrow y=x$ hoặc $x+y-2xy+7=0.$

- Với $x=y,$ thế vào $(1) \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=y=2$ hoặc $x=y=3.$
- Với $x+y-2xy+7=0$ có dạng đối xứng tổng, tích nên ta sẽ kết hợp với phương trình thu được khi lấy $(1)+(2) \Leftrightarrow x^2+y^2-5x-5y+12=0$ được hệ:

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-2xy+7=0 \\ x^2+y^2-5x-5y+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=x+y+7 \\ (x+y)^2-2xy-5(x+y)+12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=x+y+7 \\ (x+y)^2-6(x+y)+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(2;2);(3;3);(2;3);(3;2)\}\cdot$

Ví dụ 376. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+y^2-xy^3-\dfrac{9}{8}x=0 & (1) \\ y^4+x^2-yx^3-\dfrac{9}{8}y=0 & (2) \end{cases}$ $(*)$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lithuanian Mathematical Olympiad

Lời giải. Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ là 1 nghiệm của hệ.

Xét $(x;y)\neq(0;0),$ nhân hai vế của (1) cho $x^2,$ của (2) cho y^2 :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^6+x^2y^2-x^3y^3-\dfrac{9}{8}x^3=0 \\ y^6+x^2y^2-x^3y^3-\dfrac{9}{8}x^3=0 \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} x^6-y^6-\frac{9}{8}(x^3-y^3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x^3)^2-(y^3)^2\right]-\frac{9}{8}(x^3-y^3)=0 \Leftrightarrow (x^3-y^3)(x^3+y^3)-\frac{9}{8}(x^3-y^3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-y^3)\left(x^3+y^3-\frac{9}{8}\right)=0 \Leftrightarrow x^3=y^3 \text{ hoặc } x^3+y^3=\frac{9}{8}\cdot$$

- Với $x^3=y^3 \Leftrightarrow x=y,$ thế vào $(1) \Leftrightarrow x^2-\dfrac{9}{8}x=0 \Leftrightarrow x=y=\dfrac{9}{8}\cdot$
- Với $x^3+y^3=\dfrac{9}{8},$ thì $(i) \xleftrightarrow[\text{Chia (2) cho } y]{\text{Chia (1) cho } x} \begin{cases} x^3+\dfrac{y^2}{x}-y^3-\dfrac{9}{8}=0 \\ y^3+\dfrac{x^2}{x}-x^3-\dfrac{9}{8}=0 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{9}{4} \xleftrightarrow{\text{do: } x^3+y^3=\frac{9}{8}} \frac{\frac{9}{8}}{xy}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow xy=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^3y^3=\frac{1}{8}\cdot$$

Do $x^3+y^3=\dfrac{9}{8}$ và $x^3y^3=\dfrac{1}{8},$ nên theo Viét thì x^3, y^3 là nghiệm của:

$X^2-\frac{9}{8}X+\frac{1}{8}=0\Rightarrow\begin{cases}x^3=1\\ y^3=\frac{1}{8}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x^3=\frac{1}{8}\\ y^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(0;0);\left(\frac{9}{8};\frac{9}{8}\right);\left(\frac{1}{2};1\right);\left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 377. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} & (1)\\ \sqrt{y^2+3}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x} & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Đây là hệ đối xứng loại II có chứa căn thức và phương pháp giải là lấy vế trừ vế. Khi đó ta có hai hướng xử lý thường gặp: một là nhân liên hợp để để đưa về dạng $(x-y).f(x)=0$, hai là: xác định hàm đặc trưng và dùng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$, sau khi khẳng định hàm đặc trưng đơn điệu một chiều trên miền đang xét. Từ những định hướng này ta có các lời giải sau:*

Điều kiện: $x;\ y\ge 0$. Do $x=y=0$ không là nghiệm hệ, nên ta chỉ xét $x,\ y>0$.

Lấy $(1)-(2)\Rightarrow\sqrt{x^2+3}-\sqrt{y^2+3}+3(\sqrt{x}-\sqrt{y})=0\quad(*)$

✎ **Lời giải 1**. (Liên hợp). Ta có: $(*)\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\frac{3(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0\Leftrightarrow x=y.$$

Do $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0,\ \forall x,\ y>0.$

Thế $x=y$ vào $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}=3,\ (i)$. Đặt $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}$ trên $(0;+\infty)$ có

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0,\ \forall x>0.$ Do đó hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà ta luôn có: $f(x)=f(1)=3\Leftrightarrow x=1$: là nghiệm duy nhất của $f(x)=0$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(1;1)\}$.

✎ **Lời giải 2**. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}+3\sqrt{x}=\sqrt{y^2+3}+3\sqrt{y}\Leftrightarrow f(x)=f(y)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+3}+3\sqrt{t}$ trên $(0;+\infty)$ có:

$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}+\frac{3}{2\sqrt{t}}>0,\ \forall t>0,$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra: $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Giải tương tự như trên được $x=y=1$.

Ví dụ 378. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+\sqrt{x}=2y & (1) \\ y^2+\sqrt{y}=2x & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Bến Tre 2011

Lời giải. Điều kiện: $x,y\ge 0$. Với $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ đã cho.

Với $x;\ y>0$. Lấy $(1)-(2)\Rightarrow x^2-y^2+\sqrt{x}-\sqrt{y}+2(x-y)=0$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+2(x-y)=0\Leftrightarrow (x-y)\underbrace{\left(x+y+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+2\right)}_{f(x)}=0$$

$$\Leftrightarrow x=y,\ (\text{do}: f(x),\ \forall x,y>0).$$

Thế $x=y$ vào $(1)\Leftrightarrow x^2+\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow \sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)\cdot(x+\sqrt{x}-1)=0$

$$\Leftrightarrow x=y=0 \text{ (loại) hoặc } x=y=1 \text{ hoặc } x=y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(0;0);(1;1);\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 379. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}+5y=(\sqrt{y}+2\sqrt{y+1})^2 \\ 4\sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{(y+1)^2}}+5x=(\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})^2 \end{cases}$ (i)

Phân tích. *Rõ ràng đây là hệ đối xứng loại II có chứa căn thức, theo các ví dụ trên thì ta sẽ trừ vế với nhau, rồi sử dụng kỹ thuật nhân liên hợp hoặc hàm số. Nhưng bài này thì sẽ rất khó khăn và gây bế tắc nếu làm như thế vì nó quá cồng kềnh. Để ý biểu thức trong căn có:* $1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2(x+1)^2+(x+1)^2+x^2}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{x^2(x+1)^2+2x(x+1)+1}{x^2(x+1)^2}$

$=\dfrac{\left[x(x+1)+1\right]^2}{x^2(x+1)^2}=\left[\dfrac{x(x+1)+1}{x(x+1)}\right]^2=\left[1+\dfrac{1}{x(x+1)}\right]^2$ *thì khai căn chỉ còn* $1+\dfrac{1}{x(x+1)}\cdot$

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y>0$. Khi đó: $(i)\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)}=\sqrt{y(y+1)} \\ \dfrac{1}{y(y+1)}=\sqrt{x(x+1)} \end{cases}$ (ii)

Để đơn giản, ta có thể đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x(x+1)}>0 \\ b=\sqrt{y(y+1)}>0 \end{cases}$, thì $(ii)\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=b \\ \dfrac{1}{b^2}=a \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ab^2=1 \\ a^2b=1 \end{cases}$

Suy ra: $ab^2 = a^2b \Leftrightarrow b = a = 1 \Rightarrow \begin{cases} x(x+1) = 1 \\ y(y+1) = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: So điều kiện, nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\}$.

★ Nhóm ví dụ về hệ phương trình gần giống hệ đối xứng loại II

Trong mục nhỏ này, tôi xin được trình bày đến quý độc giả phần hệ phương trình gần giống đối xứng loại II, nó chỉ sai lệch nhau về dấu hoặc hằng số ở một số vị trí. Khi đó lối đi thường gặp là cộng hoặc trừ hai vế của hai phương trình với nhau sẽ thu được phương trình (nếu cộng hoặc trừ) hoặc hệ phương trình (nếu vừa cộng vừa trừ) giải được (đẳng cấp, tích số...). Để làm sáng tỏ ý tưởng này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 380. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)(3xy - 4\sqrt{x}) = -2 & (1) \\ (x+y)(3xy + 4\sqrt{y}) = 2 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Đồng Nai năm 2013

Phân tích. *Thoạt nhìn thì bài toán này gần giống như hệ đối xứng loại II, nhưng không phải. Theo kinh nghiệm của tôi, đối với hệ gần đối xứng loại II mà có chứa căn thức ta sẽ vừa cộng, vừa trừ để tạo hệ mới. Từ đó định hướng tạo phương trình đẳng cấp (nhân hợp lý tạo đồng bậc) hoặc phương trình vô tỷ giải được (hoặc đưa về tích).*

Lời giải. Điều kiện: $x, y \geq 0$. Do $x = y = 0$ không là nghiệm nên xét $x, y > 0$.

Lấy $(2)+(1)$ và $(2)-(1)$ ta được: $\begin{cases} (x+y)(3xy+4\sqrt{y}) + (x+y)(3xy - 4\sqrt{x}) = 0 \\ (x+y)(3xy+4\sqrt{y}) - (x+y)(3xy-4\sqrt{x}) = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(6xy - 4\sqrt{x} + 4\sqrt{y}) = 0 \\ (x+y)(\sqrt{y}+\sqrt{x}) = 1 \end{cases} \xleftrightarrow{do:\ x+y\ >\ 0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy = 2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) & (i) \\ 1 = (x+y)(\sqrt{y}+\sqrt{x}) \end{cases}$$

Lấy vế nhân vế của hai phương trình mới, thu được: $3xy = 2(x+y)(x-y)$

$\Leftrightarrow 3xy = 2(x^2 - y^2)$ và đây là phương trình đẳng cấp bậc 2 nên chia cho y^2:

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\dfrac{x}{y}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = 2$ (nhận) hoặc $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{2}$ (loại do $x,\ y > 0$).

Với $x = 2y$, thế vào $(i) \Leftrightarrow 6y^2 = 2(\sqrt{2y} - \sqrt{y}) \Leftrightarrow 3y^2 = \sqrt{y}(\sqrt{2}-1)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y})^3 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{3} \Leftrightarrow\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2}$, suy ra: $x = 2\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(2\sqrt[3]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9}}; \sqrt[3]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9}}\right)\right\}$.

Ví dụ 381. Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 & (1) \\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh An Giang

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x+y+1\geq 0 \\ y^2+x+y+1\geq 0 \end{cases}$.

$$\text{Hệ} \xleftrightarrow[(1)-(2)]{(1)+(2)} \begin{cases} 2(\sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1})=20 \\ 2x+2y=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \end{cases} \quad (i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x=8 \\ \sqrt{y^2+9}=10-\sqrt{x^2+9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ 10-\sqrt{x^2+9}\geq 0 \\ y^2+9=100-20\sqrt{x^2+9}+x^2+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\geq\sqrt{x^2+9} \\ (8-x)^2=100-20\sqrt{x^2+9}+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{91}\leq x\leq\sqrt{91} \\ 9x^2-72x+144=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(4;4)\}$.

Nhận xét. Ta có thể giải (i) bằng bất đẳng thức véctơ như sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chọn $\begin{cases} \vec{u}=(x;3) \\ \vec{v}=(8-x;3) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(8;6)$.

Suy ra: $\begin{cases} |\vec{u}|=\sqrt{x^2+9} \\ |\vec{v}|=\sqrt{(8-x)^2+9}=\sqrt{y^2+9} \end{cases}$ và $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

Do ta luôn có $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$ nên $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\geq 10$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow 3x+3(8-x)=0\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=4$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(4;4)\}$.

Ví dụ 382. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{x}=2 \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{y}=6 \end{cases}$ $(*)$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 400

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y>0;\ y+3x>0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}, & (1) \\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}, & (2) \end{cases} \xleftrightarrow[(1)-(2)]{(1)+(2)} \begin{cases} 1=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}} & (3) \\ -\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{y}} & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) nhân (4) được: $-\dfrac{12}{y+3x}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-\dfrac{9}{y}=-\dfrac{12}{y+3x}$

$$\Leftrightarrow \frac{y-9x}{xy}+\frac{12}{y+3x}=0 \Leftrightarrow (y-9x)(y+3x)+12xy=0 \Leftrightarrow y^2+6xy-27x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2+6\left(\frac{y}{x}\right)-27=0 \Leftrightarrow \frac{y}{x}=3 \text{ (nhận) hoặc } \frac{y}{x}=-9 \text{ (loại } x,\ y>0).$$

Với $y=3x$, thì (1) $\Leftrightarrow 1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=4+2\sqrt{3} \\ y=12+6\sqrt{3} \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(4+2\sqrt{3};12+6\sqrt{3})\right\}$.

Ví dụ 383. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+2y^3-x=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3} & (1) \\ y^4+2x^3-y=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3} & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Thái Nguyên năm 2013

***Phân tích**. Theo kinh nghiệm của tôi, khi bắt gặp hệ phương trình gần đối xứng loại II ở dạng đa thức, bạn nên cộng hai phương trình lại với nhau để thu phương trình mới. Lối đi thường gặp của phương trình mới này đưa về tổng các số không âm hoặc dạng $A^n=B^n$ hoặc phương trình bậc 2, bậc 3,… theo ẩn $ax+by$. Nhưng do đa thức thường không có điều kiện và khi cộng lại được phương trình mới là phép biến đổi hệ quả. Do đó, khi giải xong ta cần thế vào để kiểm tra lại nhằm loại nghiệm ngoại lai.*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lấy $(1)+(2)$ được: $x^4+2x^3-x+y^4+2y^3-y=-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[(x^4+2x^2.x+x^2)-(x^2+x)\right]+\left[(y^4+2y^2.y+y^2)-(y^2+y)\right]+\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[(x^2+x)^2-2.(x^2+x).\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]+\left[(y^2+y)^2-2.(y^2+y).\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y^2+y-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-\dfrac{1}{2}=0 \\ y^2+y-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Kết luận: Thử lại thấy nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ví dụ 384. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2 & (1)\\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{7}{4} & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x^2-y^2\geq 0\\ 1-x^2+y^2>0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x^2-y^2\leq 1$.

Hệ $\xleftrightarrow[(1)-(2)]{(1)+(2)}\begin{cases}\dfrac{(x+y)(1-\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{15}{4}\\ \dfrac{(x-y)(1+\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\overset{\text{nhân}}{\Rightarrow}\dfrac{(x^2-y^2)(1-x^2+y^2)}{1-x^2+y^2}=\dfrac{15}{16}$

$\Leftrightarrow x^2-y^2=\dfrac{15}{16}$ và thế vào hệ ban đầu được: $\begin{cases}x-y\cdot\sqrt{\dfrac{15}{16}}=2\cdot\sqrt{1-\dfrac{15}{16}}\\ y-x\cdot\sqrt{\dfrac{15}{16}}=\dfrac{7}{4}\cdot\sqrt{1-\dfrac{15}{16}}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-y\sqrt{15}=2\\ 16y-4x\sqrt{15}=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=2+y\sqrt{15}\\ 16y-(2+y\sqrt{15})\sqrt{15}=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8+\dfrac{7\sqrt{15}}{4}\\ y=7+2\sqrt{15}\end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(8+\dfrac{7\sqrt{15}}{4};7+2\sqrt{15}\right)\right\}$.

Ví dụ 385. Giải hệ: $\begin{cases}(x-2y)(3x+8y+4\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16})=-6\\ (y-4x)(3y+2x+2\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16})=-10\end{cases}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x^2-4xy+4y^2-16\geq 0$

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2y)(3x+8y)+4(x-2y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}=-6\\ (y-4x)(3y+2x)+2(y-4x)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}=-10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(3x^2+2xy-16y^2)+(4x-8y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}=-6 & (1)\\ (3y^2-10xy-8x^2)+(2y-8x)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}=-10 & (2)\end{cases}$

$\xleftrightarrow{(1)+(2)}-5x^2-8xy-13y^2-2(2x+3y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}=-16$

$\Leftrightarrow 5x^2+8xy+13y^2+2.(2x+3y).\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}-16=0$

Do có chứa hằng số chẵn trước căn nên nghĩ đến việc đưa về hằng đẳng thức:

$\Leftrightarrow (2x+3y)^2+2.(2x+3y).\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}+x^2-4xy+4y^2-16=0$

$\Leftrightarrow (2x+3y+\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16})^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}=-(2x+3y)$

Thế vào hệ $(*)$, được hệ: $\begin{cases}(x-2y)\cdot\left[3x+8y-4(2x+3y)\right]=-6\\(y-4x)\cdot\left[3y+2x-2(2x+3y)\right]=-10\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2y)(5x+4y)=6 \quad (i)\\(y-4x)(2x+3y)=10\end{cases}$ và nhân chéo thu phương trình đẳng cấp bậc 2:

$\Rightarrow 10(x-2y)(5x+4y)=6(y-4x)(2x+3y) \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow x=\pm y.$

Với $y=x,$ thế vào $(i) \Leftrightarrow -9x^2=6:$ vô nghiệm.

Với $y=-x,$ thế vào $(i) \Leftrightarrow 3x^2=6 \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(-\sqrt{2};\sqrt{2});(\sqrt{2};-\sqrt{2})\right\}\cdot$

★ Nhóm ví dụ về hệ đẳng cấp cơ bản

Ví dụ 386. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+2xy+3y^2=9 & (1)\\2x^2+2xy+y^2=2 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R}).$

Đại học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh

Phân tích. *Đây là hệ đẳng cấp bậc hai được nêu ở phần lý thuyết. Về phương diện tổng quát, ta kiểm tra $y=0$ có phải là nghiệm không và sau đó đặt $x=ty$ để giải. Ngoài ra, có thể nhân chéo từng vế của hai phương trình với nhau để tạo thành phương trình đẳng cấp thuần nhất bậc hai mà đã biết cách giải.*

✍ ***Lời giải 1***. Với $y=0$ thì hệ vô nghiệm. Với $y\neq 0,$ đặt $x=ty.$ Khi đó:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}t^2y^2+2ty^2+3y^2=9\\2t^2y^2+2ty^2+y^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2(t^2+2t+3)=9 & (3)\\y^2(2t^2+2t+1)=2 & (4)\end{cases}$

Lập $\dfrac{(3)}{(4)} \Rightarrow \dfrac{t^2+2t+3}{2t^2+2t+1}=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow 16t^2+14t+3=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{8}$ hoặc $t=-\dfrac{1}{2}\cdot$

- Với $t=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=-2x,$ thế vào $(2) \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x\\x^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}.$
- Với $t=-\dfrac{3}{8} \Rightarrow y=\dfrac{-8x}{3},$ thế vào $(2) \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{-8x}{3}\\x^2=\dfrac{9}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\dfrac{3\sqrt{17}}{17}\\y=\mp\dfrac{8\sqrt{17}}{17}\end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(\pm1;\mp2);\left(\pm\dfrac{3\sqrt{17}}{17};\mp\dfrac{8\sqrt{17}}{17}\right)\right\}\cdot$

Lời giải 2. Nhân chéo hai vế của (1) với (2):

Suy ra: $2(x^2+2xy+3y^2)=9(2x^2+2xy+y^2)\Leftrightarrow 16x^2+14xy+3y^2=0$

$\Leftrightarrow(2x+y)(8x+3y)=0\Leftrightarrow y=-2x$ hoặc $y=-\dfrac{8}{3}x\cdot$

Đến đây ta sẽ giải tương tự như trên sẽ tìm được bốn cặp nghiệm.

Ví dụ 387. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}14x^2-21y^2+22x-39y=0 & (1)\\ 35x^2+28y^2+111x-10y=0 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Bài toán có dạng tổng quát* $\begin{cases}a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+d_1x+e_1y=0\\ a_2x^2+b_2y^2+c_2xy+d_2x+e_2y=0\end{cases}\cdot$ *Khi đó có 2 hướng xử lý thường gặp, một là đặt* $x=ty$ *sau khi xét* $x=0$ *có phải là nghiệm hay không, rồi tìm* t, *nghĩa là tìm được mối liên hệ giữa x và y. Hai là biến đổi về dạng* $\begin{cases}a_1x^2+b_1y^2+c_1xy=-(d_1x+e_1y)\\ a_2x^2+b_2y^2+c_2xy=-(d_2x+e_2y)\end{cases}$, *rồi nhân chéo 2 phương trình thu được phương trình đẳng cấp bậc ba với 2 ẩn x, y và tìm được mối liên hệ giữa chúng.*

Lời giải. Nhận thấy $x=y=0$ là một nghiệm của hệ.

Với $x\neq0,\ y\neq0,$ đặt $x=ty$ thì hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}14x^2-21t^2x^2+22x-39tx=0\\ 35x^2+28t^2x^2+111x-10tx=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(14-21t^2)x^2=(39t-22)x\\ (35+28t^2)x^2=(10t-111)x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{39t-22}{14-21t^2} & (i)\\ x=\dfrac{10t-111}{35+28t^2}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{39t-22}{14-21t^2}=\dfrac{10t-111}{35+28t^2}$$

$\Leftrightarrow 186t^3-421t^2+175t+112=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3}\cdot$

Thế vào (i), suy ra: $x=-3\Rightarrow y=1.$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(0;0);(-3;1)\}\cdot$

Ví dụ 388. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^2-3y=x-3xy\\ x^3-x^2=y^2-3y^3\end{cases}\quad(*)\qquad(x;y\in\mathbb{R}).$

Đề thi thử Đại học năm 2013 – Chuyên Amsterdam Hà Nội

Phân tích. *Viết hệ* $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+3xy=x+3y\\ x^3+3y^3=x^2+y^2\end{cases}$ *và nhân chéo thu được phương trình đẳng cấp bậc bốn với hai biến x, y và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Nhận thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ. Xét $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 3xy = x + 3y \\ x^3 + 3y^3 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow (5x^2 + 3xy)(x^2 + y^2) = (x^3 + 3y^3)(x + 3y)$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + 5x^2y^2 - 9y^4 = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2 + 5\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$$

Với $x = y$, thế vào phương trình thứ nhất của hệ $\Leftrightarrow 8x^2 = 4x \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Với $x = -y$, thế vào phương trình thứ nhất của hệ $\Leftrightarrow 2x^2 = -2x \Leftrightarrow x = -y = -1$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \left\{(0;0);(-1;1);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$.

★ Phương pháp thế tạo phương trình bậc cao hoặc đẳng cấp

Trong nhóm ví dụ này, tôi muốn truyền đến quý độc giả phương pháp thế cơ bản với mục đích tạo ra phương trình bậc cao một ẩn mà trọng tâm đó là phương pháp thế cụm tạo thành phương trình đẳng cấp, nó là tiền đề cơ bản, công đoạn nhỏ để giải các dạng toán của các bài học kế tiếp.

Ví dụ 389. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)(y+x+1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ x(y+1) + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$

Tạp chí Toán học & Tuổi Trẻ số 379

Phân tích. *Nhận thấy (2) có hạng tử $y + 1$ và (1) cũng có chứa hai hạng tử ấy nên sẽ rút nó ở phương trình (2) và thế vào phương trình (1) sẽ thu được phương trình bậc cao với ẩn x. Từ định hướng nay, ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Do $x = 0$ thì (2) vô nghiệm nên xét $x \neq 0$.

$(2) \Rightarrow y + 1 = \frac{x^2 - 1}{x}$, thế vào (1) được: $(1) \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{x^2-1}{x}\left(x + \frac{x^2-1}{x}\right) = 3x^2 - 4x + 1$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x^2 - 1) = (x-1)(3x-1) \Leftrightarrow (x-1)\left[(x+1)(2x^2-1) - (3x-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^3 + 2x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1 \text{ hoặc } x = -2 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}.$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{(1;-1);\left(-2;-\frac{5}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 390. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 & (1) \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Đại học khối B năm 2008

Phân tích. *Nhận thấy (2) có chứa hạng tử xy bậc nhất và $(1) \Leftrightarrow (x^2+xy)^2 = 2x+9$ cũng có hạng tử hạng tử xy nhưng bậc hai. Do đó, ta rút $x.y$ từ (2) và thay thế vào (1) để thu được phương trình bậc cao với ẩn x và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Từ $(2) \Rightarrow xy = 3x+3-\dfrac{x^2}{2}$, (i), thế vào phương trình (1), ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x^2+3x+3-\frac{x^2}{2}\right)^2 = 2x+9 \Leftrightarrow (x^2+6x+6)^2 = 8x+36$$

$$\Leftrightarrow x^4+36x^2+36+12x^3+72x+12x^2 = 8x+36 \Leftrightarrow x^4+12x^3+48x^2+64x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3+12x^2+48x+64) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=\dfrac{17}{4} \end{cases} \text{ hoặc } x=0: \text{ (loại do } (i) \text{ vô nghiệm).}$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(-4;\dfrac{17}{4}\right)\right\}$.

Ví dụ 391. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y & (1) \\ x^2-3y^2=6 & (2) \end{cases} \quad (*) \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh

Phân tích. Hệ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=2(4x+y) \\ x^2-3y^2=6 \end{cases}$ *nên ta nghĩ đến việc đồng bậc của phương trình (1) bằng cách dùng phép thế từ phương trình (2) trong hệ. Nhưng trước hết ta cần nhân thêm 3 hai vế của phương trình (1) để xuất hiện hệ số 6 để thế* $6=x^2-3y^2$.

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^3-y^3)=6(4x+y) \\ \qquad\qquad\uparrow \\ 6=\boxed{x^2-3y^2} \end{cases} \Leftrightarrow 3x^3-3y^3=(x^2-3y^2)(4x+y)$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2y-12xy^2=0 \Leftrightarrow x(x^2+xy-12y^2)=0 \Leftrightarrow x(x-3y)(x+4y)=0.$$

- Với $x=0$, thế vào $(2) \Leftrightarrow -3y^2=6$: vô nghiệm.
- Với $x=3y$, thế vào $(2) \Leftrightarrow 6y^2=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$.
- Với $x=-4y$, thế vào $(2) \Leftrightarrow 13y^2=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y=\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(\pm3;\pm1);\left(\pm4\sqrt{\dfrac{6}{13}};\mp\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right)\right\}$.

Nhận xét. *Sau khi biến đổi* $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3=2(4x+y)\\x^2-3y^2=6\end{cases}$ *và ta hoàn toàn có thể giải bằng cách nhân chéo hai phương trình với nhau, cũng tạo được phương trình đẳng cấp bậc 3 với 2 biến x, y. Nhưng trong rất nhiều bài toán, sự nhân chéo này mang lại hiệu quả không cao, tức không tạo ra phương trình đẳng cấp. Ta cùng xét ví dụ sau:*

> ***Ví dụ 392.*** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2=2 & (1)\\(x+y)(4-x^2y^2-2xy)=2y^5 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Phương trình thứ hai có vế phải bậc 5, vế trái là tích* $x+y$ *bậc một và* $4-x^2y^2-2xy.$ *Nếu nhóm này biến đổi được thành bậc 4, sẽ tạo được ngay phương trình đẳng cấp bậc 5. Thật vậy, nếu thế* $2=x^2+y^2$ *vào* $4-x^2y^2-2xy$ *sẽ thu được:* $4-x^2y^2-2xy=2^2-x^2y^2-2.xy=(x^2+y^2)^2-x^2y^2-(x^2+y^2)xy$ *có dạng bậc 4 và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Thế $2=x^2+y^2$ vào $(2)\Leftrightarrow(x+y)\left[(x^2+y^2)^2-x^2y^2-(x^2+y^2)xy\right]=2y^5$

$\Leftrightarrow(x+y)\cdot(x^4+y^4+x^2y^2-x^3y-xy^3)=2y^5$

$\Leftrightarrow x^5+xy^4+x^3y^2-x^4y-x^2y^3+x^4y+y^5+x^2y^3-x^3y^2-xy^4=2y^5$

$\Leftrightarrow x^5+y^5=2y^5\Leftrightarrow x^5=y^5\Leftrightarrow x=y.$

Thế $x=y,$ vào $(1)\Leftrightarrow 2x^2=2\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(-1;-1);(1;1)\right\}\cdot$

> ***Ví dụ 393.*** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3) & (1)\\x^2-xy+y^2=3 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Phương trình (1) có vế trái là bậc 3, vế phải là tích bậc nhất* $(x-y)$ *với lượng* $(2xy+3).$ *Nếu lượng này biến đổi được thành bậc 2, sẽ thu được phương trình đẳng cấp bậc 3. Thật vấy nếu thế* $3=x^2-xy+y^2$ *vào* $2xy+3=2xy+(x^2-xy+y^2)$ *thu được bậc 2, hiển nhiên (1) là phương trình đẳng cấp bậc 3 và có lời giải sau:*

Lời giải. Thế $3=x^2-xy+y^2$ $(1)\Leftrightarrow 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+x^2-xy+y^2)$

$\Leftrightarrow 2x^3-9y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3\Leftrightarrow x^3=8y^3\Leftrightarrow x=2y.$

Thế $x=2y$ vào $(2)\Leftrightarrow 5y^2-2y^2=3\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$ hoặc $y=-1\Rightarrow x=-2.$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(2;1);(-2;-1)\right\}\cdot$

> ***Ví dụ 394.*** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}16x^3y^3-9y^3=(2xy-y)(4xy^2+3) & (1)\\4x^2y^2-2xy^2+y^2=3 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy vế trái (1) hoàn toàn có thể độc lập được y nếu chia 2 vế của (1) cho* $y^3 \neq 0,$ *tức* $(1) \Leftrightarrow 16x^3 - 9 = (2x-1)\left(4x - \dfrac{3}{y^2}\right)\cdot$ *Nếu ở (2), có thể rút* $\dfrac{3}{y^2}$ *theo x thì sẽ thế vào (1), tạo phương trình 1 biến x. Thật vậy, chia 2 vế của (2) cho* $y^2 \neq 0$ *ta được* $4x^2 - 2x + 1 = \dfrac{3}{y^2}$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Do $y = 0$ không là nghiệm hệ nên xét $y \neq 0.$

Chia (1) cho y^3, chia (2) cho y^2, được hệ: $\begin{cases} 16x^3 - 9 = (2x-1)\left(4x + \dfrac{3}{y^2}\right) & (i) \\ 4x^2 - 2x + 1 = \dfrac{3}{y^2} & (ii) \end{cases}$

Thế $\dfrac{3}{y^2} = 4x^2 - 2x + 1$ vào $(i) \Leftrightarrow 16x^3 - 9 = (2x-1)(4x + 4x^2 - 2x + 1)$

$\Leftrightarrow 16x^3 - 9 = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) = 8x^3 - 1 \Leftrightarrow 8x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 1.$

Thế $x = 1$ vào $(ii) \Leftrightarrow 3 = \dfrac{3}{y^2} \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1.$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{(1;1);(1;-1)\right\}\cdot$

Ví dụ 395. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5y - 4xy^2 + 3x^2y^3 = 2(x + x^2y) & (1) \\ 2x^2 = x^2y^2 + 1 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nếu chia cho lượng* $x^2 \neq 0$ *ở cả 2 phương trình, ta sẽ thu được hệ phương trình* $\begin{cases} 5\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot y - 4\cdot\dfrac{1}{x}\cdot y^2 + 3y^3 = 2\left(\dfrac{1}{x} + y\right) \\ 2 = y^2 + \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$ *và nếu đặt* $t = \dfrac{1}{x}$ *thì hệ phương trình được viết lại là* $\begin{cases} 5t^2y - 4ty^2 + 3y^3 = 2(t+y) \\ y^2 + t^2 = 2 \end{cases}\cdot$ *Với hệ quen thuộc này, ta hoàn toàn có thể đưa được về phương trình đẳng cấp nếu thế* $2 = y^2 + t^2$ *lên phương trình đầu tiên sẽ thu ngay* $5t^2y - 4ty^2 + 3y^3 = (y^2 + t^2)(t + y)$ *dạng đẳng cấp bậc 3. Từ đó suy ra được mối liên hệ của x, y và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Do $x = 0$ không là nghiệm nên chia 2 vế cho $x^2 \neq 0$ thì:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\dfrac{1}{x^2}y - 4\dfrac{1}{x}y^2 + 3y^3 = 2\left(\dfrac{1}{x} + y\right) \\ 2 = y^2 + \dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t^2y - 4ty^2 + 3y^3 = 2(t+y) \\ y^2 + t^2 = 2, \qquad (i) \end{cases}$, với $t = \dfrac{1}{x}\cdot$

Thế $2=y^2+t^2$ lên phương trình trên được: $5t^2y-4ty^2+3y^3=(y^2+t^2)(t+y)$

$\Leftrightarrow t^3-4t^2y+5y^2t-2y^3=0$ và do $y=0$ không là nghiệm hệ nên:

$$\Leftrightarrow\left(\frac{t}{y}\right)^3-4\cdot\left(\frac{t}{y}\right)^2+5\left(\frac{t}{y}\right)-2=0\Leftrightarrow\frac{t}{y}=2 \text{ hoặc } \frac{t}{y}=1\Leftrightarrow t=y \text{ hoặc } t=2y.$$

- Với $t=y,$ thế vào (i) và kết hợp $t=\dfrac{1}{x}$ được: $x=y=\pm1.$
- Với $t=y,$ thế vào (i) và kết hợp $t=\dfrac{1}{x}$ được: $x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{4};\ y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}\cdot$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(\pm1;\pm1);\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{4};\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)\right\}.$

Ví dụ 396. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2(2y^2+1)\sqrt{x}=(5xy+3y^2-2)\sqrt{y}\\ xy+y^2=2\end{cases}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge0;\ y\ge0.$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}=5xy\sqrt{y}+3y^2\sqrt{y}-2\sqrt{y}\\ xy+y^2=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5xy\sqrt{y}+3y^2\sqrt{y}-4y^2\sqrt{x}=2\sqrt{x}+2\sqrt{y} & (1)\\ xy+y^2=2 & (2)\end{cases}$$

Do $y=0$ thì $(2)\Leftrightarrow0=2$: sai, nên chỉ xét $y>0$ và nhân 2 vế (1) cho $\sqrt{y}$ được:

$(1)\Leftrightarrow5xy^2+3y^3-4y^2\sqrt{xy}=2\sqrt{xy}+2y=2(\sqrt{xy}+y)$ (3)

Thế $2=xy+y^2$ vào $(3)\Leftrightarrow5xy^2+3y^3-4y^2\sqrt{xy}=(xy+y^2)(\sqrt{xy}+y)$ (4)

Chia hai vế của (4) cho $y^3>0,$ được $(4)\Leftrightarrow5\cdot\dfrac{x}{y}+3-4\cdot\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\left(\dfrac{x}{y}+1\right)\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}+1\right)$

$$\Leftrightarrow5\cdot\frac{x}{y}+3-4\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{x}{y}}+1\Leftrightarrow\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}-4\cdot\frac{x}{y}+5\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}-2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^3-4\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+5\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)-2=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x}{y}}=2 \text{ hoặc } \sqrt{\frac{x}{y}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4y\\ x=y\end{array}\right.\cdot$$

- Với $x=y,$ thế vào $(2)\Leftrightarrow2y^2=2\xleftrightarrow{\text{do: } y>0}y=1\Rightarrow x=1.$
- Với $x=4y,$ thế vào $(2)\Leftrightarrow5y^2=2\xleftrightarrow{\text{do: } y>0}y=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\Rightarrow x=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(1;1);\left(\dfrac{4\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)\right\}.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 503. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ x^2 + y^2 + x + y = 12 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 504. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 505. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 506. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 507. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + xy} + 3\sqrt{xy} = 4\sqrt{3} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 508. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (5x - 4y)(3x + 2y) = 7y - 2x \\ (5y - 4x)(3y + 2x) = 7x - 2y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 509. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (6x + 4y)(x^2 + y^2 - 1) = 5y(x^2 + 1) \\ (6y + 4x)(x^2 + y^2 - 1) = 5x(y^2 + 1) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 510. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{7-y} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{7-x} = 4 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 511. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 2 \\ x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} = 2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 512. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = x - y^2 \\ y\sqrt{(1-y^2)(1-x^2)} = y - x^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 513. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x\left(1 + \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) = 3 \\ 2y\left(1 - \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) = 1 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 514. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{78y}{x^2 + y^2} = 20 \\ y + \dfrac{78x}{x^2 + y^2} = 15 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 515. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = x + 2xy \\ 2y^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = 2y - xy \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

BT 516. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9 \\ 2x^2-13xy+15y^2=18 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 517. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2-x(y-1)+y^2=3y \\ x^2+xy-3y^2=x-2y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 518. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 519. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3xy^2+49=0 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 520. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+2y+x=2 \\ 2x^2-y^2-2y-2=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 521. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y+3xy=4x^2+9y \\ 7y+6=2x^2+9x \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 522. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8(x^3-1)+6xy^2=y(12x^2+y^2) \\ (x^2+y-4x)(x^2+y^2-2x-5)=14 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 523. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}=1 \\ y^2+x+2y\sqrt{x}-y^2x=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 524. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 525. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 526. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y(x^2-y^2)=3x \\ x(x^2+y^2)=10y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 527. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-2y^3=x+4y \\ 13x^2-41xy+21y^2=-9 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 528. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2y^2=xy+2y \\ 2x^3+3xy^2=2y^2+3x^2y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 529. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-xy^2+y^3=1 \\ 4x^4-y^4=4x-y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

BT 530. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(y^3-x^3)=7 \\ x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Kom Tum – Tỉnh Kom Tum

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ TÍCH



Giải hệ phương trình đưa về tích số là một dạng toán thường xuyên xuất hiện trong các kì thi. Trong bài học này, tôi xin giới thiệu đến quý độc giả 3 kỹ thuật chính để đưa về tích số, đó là:

- ★ Kỹ thuật tách, ghép, nhóm và tam thức bậc hai (hằng số biến thiên).
- ★ Kỹ thuật liên hợp.
- ★ Kỹ thuật dùng phương pháp cộng.

1. Kỹ thuật tách, ghép, nhóm và dùng tam thức bậc hai

Ví dụ 396. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 & (1) \\ x^2-xy-2y^2=-x+2y & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Cao đẳng năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy (1) và (2) đều có dạng tam thức bậc 2 theo ẩn x hoặc theo ẩn y, nhưng ta sẽ không tìm được gì ở phương trình (1). Do đó sẽ định hướng biến đổi về tích số ở phương trình (2) với các hướng suy nghĩ sau đây:*

Hướng 1. *Nhận thấy vế trái (2) có dạng đẳng cấp nên sẽ sử dụng casio để phân tích thành tích số nhóm này, tức có* $x^2-xy-2y^2=(x-2y)\cdot(x+y)$. *Kế đến, ta cần phân tích vế trái theo 2 hạng tử tích này, nhưng nó đã có sẵn nếu viết* $-x+2y=-(x-2y)$ *nên có nhân tử, tức* $(2)\Leftrightarrow(x-2y)(x+y)+x-2y=0\Leftrightarrow(x-2y)(x+y+1)=0$.

Tôi xin được nhắc lại việc phân tích thành tích số đối với biểu thức có dạng bậc hai 2 biến $F(x;y)=ax^2+bxy+cy^2=a(x-x_1y)(x-x_2y)$ *với* x_1, x_2 *là hai nghiệm của phương trình* $f(x)=ax^2+bx+c=0$. *Ta sẽ làm tương tự đối với việc phân tích đa thức bậc 3 hai biến dạng* $F(x;y)=ax^3+bx^2y+cy^2x+dy^3=a(x-x_1y)(x-x_2y)(x-x_3y)$.

Hướng 2. *Xem (2) là phương trình bậc 2 ẩn x, tức* $(2)\Leftrightarrow x^2+(1-y).x-2y^2-2y=0$ *và có* $\Delta_x=(1-y)^2+4(2y^2+2y)=9y^2+6y+1=(3y+1)^2$ *là số chính phương nên có* $x=\dfrac{y-1+3y+1}{2}=2y$, $x=\dfrac{y-1-3y-1}{2}=-y-1$ *hay* $(2)\Leftrightarrow(x-2y)(x+y+1)=0$.

Hướng 3. *Xem (2) là phương trình bậc 2 ẩn y, ta cũng được kết quả tương tự.*

Lời giải. Ta có: $(2)\Leftrightarrow(x-2y)(x+y+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2y \\ x+y+1=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-y-1 \end{array}\right.$.

- Với $x=2y$, thế vào $(1)\Leftrightarrow 7y^2=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=2 \\ y=-1\Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$.
- Với $x=-y-1$, thế vào $(1)\Leftrightarrow y^2+y-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=-3\Rightarrow x=2 \\ y=2\Rightarrow x=-3 \end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(2;1);(-2;-1);(2;-3);(-3;2)\}$.

Ví dụ 397. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2y + 4y^3 = (x-2y)^2 & (1) \\ \sqrt{x-2y} + \sqrt{3x+2y} = 4x - 4 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Nhận thấy vế trái của (1) có dạng đẳng cấp bậc ba. Khi đó ta bấm máy tính đối với phương trình* $x^3 - 3x^2 + 4$ *sẽ được các nghiệm* $x = -1, x = 2$ *với* $x = 2$ *là nghiệm kép nên viết* $VT_{(1)} = x^3 - 3x^2y + 4y^3 = (x+y)(x-2y)^2$ *sẽ có chung nhân tử với vế phải. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x - 2y \ge 0;\ 3x + 2y \ge 0 \\ 4x - 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 2y \end{cases}$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)(x-2y)^2 = (x-2y)^2 \Leftrightarrow (x-2y)^2(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 1 - x \end{array}\right.$$

- Với $x = 2y$, thế vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 4x^2 - 9x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9+\sqrt{17}}{8} \\ y = \dfrac{9+\sqrt{17}}{16} \end{cases}$.
- Với $y = 1 - x$, thế vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = 4x - 4$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x-2} - 2) + (\sqrt{x+2} - 2) = 4x - 8 \Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} = 4(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1.$$

Do: $\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} - 4 \le \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} - 4 = -2 < 0,\ \forall x \ge 1$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm là $S = (x; y) = \left\{(2; -1); \left(\dfrac{9+\sqrt{17}}{8}; \dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)\right\}$.

Ví dụ 398. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Đại học khối D năm 2008

Phân tích. *Nhận thấy (1) có dạng tam thức bậc 2 với 2 ẩn x, y nên có các hướng sau:*

Hướng 1. *Nếu chuyển vế dạng* $(1) \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = x + y$ *có vế trái dạng đẳng cấp nên sẽ phân tích* $x^2 - xy - 2y^2 = (x-2y)(x+y)$ *có nhân tử với vế phải.*

Hướng 2. *Xem (2) là phương trình bậc 2 ẩn x hoặc ẩn y ta cũng phân tích và tìm được nhân tử từ (2), tức có* $(2) \Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1) = 0$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$, suy ra: $x + y \ge 1$.

$(1) \Leftrightarrow (x-2y)(x+y)-(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1)=0$

$\Leftrightarrow x-2y-1=0,\ (\text{do}: x+y \geq 1) \Leftrightarrow x=2y+1.$

Thế $x=2y+1$ vào $(2) \Leftrightarrow (2y+1)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=2y+2 \Leftrightarrow \sqrt{2y}(y+1)=2(y+1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2y}=2,\ (\text{do}: y+1 \geq 1) \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=5.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(5;2)\right\}\cdot$

Ví dụ 399. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 & (1) \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} & (2) \end{cases}$

Đại học khối B năm 2013

Phân tích. *Nhận thấy (1) có dạng tam thức bậc 2 với 2 ẩn x, y nên có các hướng sau:*

Hướng 1. *Phân tích cụm đẳng cấp* $2x^2-3xy+y^2=(x-y)\cdot(2x-y)$, *khi đó viết cụm còn lại theo 2 biểu thức tích này, tức* $(1) \Leftrightarrow (x-y)(2x-y)+(x-y)+(2x-y+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(2x-y+1)+(2x-y+1)=0 \Leftrightarrow (2x-y+1)(x-y+1)=0.$

Hướng 2. *Xem (1) là phương trình bậc 2 ẩn x hoặc ẩn y, ở đây tôi xem là ẩn x, tức có:* $(2) \Leftrightarrow 2x^2-3(y-1)\cdot x+y^2-2y+1=0$ *và* $\Delta_x=9(y-1)^2-8(y-1)^2=(y-1)^2$. *Suy ra 2 nghiệm là* $x=\dfrac{3y-3+y-1}{4}=y-1 \vee x=\dfrac{3y-3-y+1}{4}=\dfrac{y-1}{2}\cdot$

Lời giải. Điều kiện: $2x+y \geq 0,\ x+4y \geq 0.$

$(1) \Leftrightarrow (2x-y+1)(x-y+1)=0 \Leftrightarrow y=2x+1$ hoặc $y=x+1.$

- Với $y=2x+1$, thế vào $(2) \Leftrightarrow 3-3x=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}$

Sử dụng casio tìm được $x=0$ *là nghiệm duy nhất nên ghép hằng số và liên hợp.*

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x+1}-1)+(\sqrt{9x+4}-2)+3x=0 \Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9x}{\sqrt{9x+4}+2}+3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+4}+2}+3\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1.$$

Do $\forall x \geq -\dfrac{1}{4}$ thì biểu thức $\dfrac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\dfrac{9}{\sqrt{9x+4}+2}+3>0.$

- Với $y=x+1$, thế vào $(2) \Leftrightarrow 3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4},\ \left(\text{ĐK}: x \geq -\dfrac{1}{3}\right)\cdot$

Sử dụng casio, tìm được 2 nghiệm $x=0,\ x=1$ *nên ghép* $ax+b$ *để liên hợp.*

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\cdot\left(\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+3}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}+3\right)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.,\ \left(\text{do}: \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+3}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}+3>0,\ \forall x \geq -\frac{1}{3}\right)\cdot$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(0;1);(1;2)\right\}\cdot$

Ví dụ 400. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{2x+1}-2\sqrt{2y+1}-2xy=0 & (1)\\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4 & (2)\end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 lớp 11 – Chuyên Nguyễn Tất Thành – Kon Tum

Phân tích. *Viết* $(2)\Leftrightarrow x^2+(3y+3).x+2y^2+2y-4=0$ *và kiểm tra biệt số delta thì thấy là số chính phương nên có lời giải sau:*

Lời giải 1. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2};\ y\ge -\dfrac{1}{2}\cdot$

Từ $(2)\Leftrightarrow x^2+(3y+3).x+2y^2+2y-4=0$ có:

$$\Delta_y=(3y+3)^2-4(2y^2+2y-4)=y^2+10y+25=(y+5)^2>0.$$

Suy ra: $x=1-y$ hoặc $x=-2y-4\Leftrightarrow x+2y+4=0$: loại do $x\ge -\dfrac{1}{2};\ y\ge -\dfrac{1}{2}\cdot$

Với $x=1-y$, thế vào $(1)\Leftrightarrow 4y^2-4y+1-2\sqrt{3-2y}-2\sqrt{2y+1}=0$

$$\Leftrightarrow\left[(3-2y)-2\sqrt{3-2y}\right]+\left[(2y+1)-2\sqrt{2y+1}\right]+4y^2-4y-3=0 \qquad (3)$$

Nếu: $3-2y-2\sqrt{3-2y}=0\Leftrightarrow\sqrt{3-2y}.(\sqrt{3-2y}-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$: thỏa (3)

Nếu: $2y+1-2\sqrt{2y+1}=0\Leftrightarrow\sqrt{2y+1}.(\sqrt{2y+1}-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$: thỏa (3)

Suy ra: $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$: là 2 cặp nghiệm của hệ.

Với $y\ne -\dfrac{1}{2};\ y\ne\dfrac{3}{2}\Rightarrow 4y^2-4y-3\ne 0$ thì phương trình:

$$(3)\Leftrightarrow\frac{4y^2-4y-3}{3-2y+2\sqrt{3-2y}}+\frac{4y^2-4y-3}{2y+1+2\sqrt{2y+1}}+4y^2-4y-3=0$$

$\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{3-2y+2\sqrt{3-2y}}+\dfrac{1}{2y+1+2\sqrt{2y+1}}+1=0$: vô nghiệm khi $\begin{cases} y>-\dfrac{1}{2}\\ y\ne\dfrac{3}{2}\end{cases}.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right);\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\right\}\cdot$

Lời giải 2. Từ $(2)\Leftrightarrow x^2+(3y+3).x+2y^2+2y-4=0$ có:

$$\Delta_y=(3y+3)^2-4(2y^2+2y-4)=y^2+10y+25=(y+5)^2>0.$$

Suy ra: $x = 1 - y$ hoặc $x = -2y - 4 \Leftrightarrow x + 2y + 4 = 0$: loại do $x \geq -\frac{1}{2};\ y \geq -\frac{1}{2}\cdot$

(2) $\Leftrightarrow 2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}) = (x-y)^2$ và do 2 vế đều dương nên bình phương:

$\Leftrightarrow 8(x+y) + 8 + 8\sqrt{4xy + 2(x+y) + 1} = \left[(x+y)^2 - 4xy\right]^2$ và thế $x + y = 1$ thì:

$\Leftrightarrow 8\sqrt{4xy+3} = (1-4xy)^2 - 16 \Leftrightarrow 8\sqrt{4xy+3} = (1-4xy-4)(1-4x+4)$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{4xy+3} = (4xy+3)(4xy-5) \Leftrightarrow \sqrt{4xy+3}.\left[(4xy-5)\sqrt{4xy+3} - 8\right] = 0$

$\Leftrightarrow 4xy + 3 = 0$ do: $1 = (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow 4xy - 5 \leq -4 < 0$. Hay $xy = -\frac{3}{4}\cdot$

Suy ra: $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 401. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 & (1) \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 & (2) \end{cases}$

Đại học khối D năm 2012

Phân tích. *Từ phương trình (2), nếu nhìn nhận đó là phương trình bậc 2 với ẩn y thì khi lập Δ không là số chính phương nên sẽ không áp dụng phân tích được theo tam thức. Lúc này ta nghĩ đến việc nhóm hạng tử. Theo kinh nghiệm của tôi, ta nên ưu tiên phép thử đối với hạng tử có chứa những hằng số giống nhau trước, nhận thấy nhóm $2x^3 - 2xy = 2x(x^2 - y)$ có $(x^2 - y)$ và dựa vào nó để ghép các cặp còn lại. Tức $2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 2x(x^2 - y) + (x^2 - y) - y(x^2 - y)$ có nhân tử $x^2 - y$.*

Lời giải. Từ (2) $\Leftrightarrow 2x(x^2 - y) - y(x^2 - y) + (x^2 - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - y)(2x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = x^2$ hoặc $y = 2x + 1$.

- Với $y = x^2$, thế vào (1) $\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.
- Với $y = 2x + 1$, thế vào (1) $\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{5} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = -\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{(1;1), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Kỹ thuật phân tích thành tích số bằng việc tách – ghép – nhóm hạng tử là kỹ thuật khá cơ bản trong việc giải hệ phương trình. Sau đây, tôi trình bày thêm phương pháp phân tích đa thức 2 biến $F(x;y)$ bằng máy tính bỏ túi như sau:*

***Bước 1**. Cho biến chứa bậc cao nhất $=1000$, chẳng hạn $x=1000$ (nếu x, y cùng bậc thì cho x hay y gì cũng được).*

***Bước 2**. Thế $x=1000$ vào $F(x;y)$ và phân tích $F(x;y)$ thành nhân tử (phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ hoặc Hoocner đối với phương trình bậc cao).*

***Bước 3**. Dựa vào đa thức, thế $1000=x$ trở lại $F(x;y)$ được biểu thức tích.*

***<u>Đối với đề D – 2012</u>**: Viết $(2)\Leftrightarrow y^2-(x^2+2x+1)\cdot y+2x^3+x^2=0$ và cho $x=1000$ được $y^2-1002001y+2001000000=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1000000=(1000)^2=x^2\\ y=2001=2.1000+1=2x+1\end{array}\right.$. Lúc này sẽ viết $(2)\Leftrightarrow(y-x^2)(y-2x-1)=0$.*

***<u>Đối với đề B – 2013</u>**: Viết $(1)\Leftrightarrow y^2-(3x+2)y+2x^2+3x+1=0$ và cho $x=1000$ sẽ được: $y^2-3002y+2003001=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2001=2.1000+1=2x+1\\ y=1001=1000+1=x+1\end{array}\right.$. Hiển nhiên lúc sẽ viết lại $(1)\Leftrightarrow(y-2x-1)(y-x-1)=0$. Bạn hãy thực hành lại các ví dụ trên, sẽ thấy ngay đều ấy. Sau đây tôi xin được trình bày một số ví dụ nâng cao hơn:*

***<u>Ví dụ 1</u>**. $F(x;y)=2y^3+6x^2y-13xy^2-18x^2-3y^2+10xy+87x-14y+15=0$*

Do y bậc cao nhất nên cho $y=1000\Rightarrow F(x;y)=5982x^2-129899x+1996986015=0$

$\Rightarrow F(x;y)=2991(2x-333)(x-2005)=0.$

Chọn: $2991=3.1000-9=3y-9;\ 333=\dfrac{1000-1}{3}=\dfrac{y-1}{3},\ 2005=2y+5.$

$$\Rightarrow F(x;y)=(3y-9)\left(2x-\frac{y-1}{3}\right)(x-2y-5)=(y-3)(6x-y+1)(x-2y-5)=0.$$

***<u>Ví dụ 2</u>**. $F(x;y)=x^3+2y^3+2x^2y^2+4x^2+6y^2+xy+3x+4y+12=0.$*

Do x và y cùng bậc nên có thể cho $y=1000$.

$\Rightarrow F(x;y)=x^3+2000004x^2+1003x+2006004012=(x+2000004)(x^2+1003).$

Chọn: $2000004=2.1000000+4=2y^2+4$ *và* $1003=1000+3=y+3.$

Suy ra: $F(x;y)=(x+2y^2+4)(x^2+y+3).$

***<u>Ví dụ 3</u>**. $F(x;y)=x^3-3xy^2-2y^3-7x^2+10xy+17y^2+8x-40y+16=0.$*

Do x, y cùng bậc nên có thể chọn $y=1000$ (thường chọn giá trị 1000 là biểu thức chứa hằng số khác 1, tức chọn $y=1000$ do có $2y^3$, sẽ dễ dàng cho việc lựa số của y).

$\Rightarrow F(x)=x^3-7x^2-2989992x-1983039984=(x-1999)(x+996)^2=0.$

Chọn $1999=2y-1$ *và* $996=y-4\Rightarrow F(x;y)=(x-2y+1)(x+y-4)^2=0.$

<u>Ví dụ 402.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 & (1)\\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 & (2)\end{cases}$

Đại học khối A năm 2011

Phân tích. *Nhận thấy ở phương trình (2) đều có chung nhân tử* x^2+y^2 *sau khi biến đổi* $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ *nên ta sẽ ưu tiên nhóm 2 cụm này trước. Tức có:*
$(2)\Leftrightarrow xy\cdot(x^2+y^2)+2-(x^2+y^2)-2xy=0\Leftrightarrow(x^2+y^2)\cdot(xy-1)-2(xy-1)=0$ *sẽ có nhân tử* $(xy-1)$. *Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Ta có: $(2)\Leftrightarrow xy(x^2+y^2)+2-(x^2+y^2)-2xy=0$

$$\Leftrightarrow(x^2+y^2)(xy-1)-2(xy-1)=0\Leftrightarrow(xy-1)(x^2+y^2-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xy=1\\x^2+y^2=2\end{array}\right..$$

- Với $xy=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{y},\ (y\neq0)$ thế vào $(1)\Leftrightarrow\dfrac{5}{y}-4y+3y^3-2\left(\dfrac{1}{y}+y\right)=0$

$$\Leftrightarrow 3y^4-6y^2+3=0\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm1\Leftrightarrow x=\pm1.$$

- Với $x^2+y^2=2$, kết hợp với (1) được hệ: $\begin{cases}2=\boxed{x^2+y^2} & (i)\\ \qquad\downarrow\\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2.(x+y)=0\end{cases}$

$$\Rightarrow 5x^2y-4xy^2+3y^3-(x^2+y^2)(x+y)=0\Leftrightarrow 2y^3+4x^2y-5xy^2-x^3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^3-4\left(\frac{x}{y}\right)^2+5\left(\frac{x}{y}\right)-2=0 \text{ (do: } y=0\Rightarrow x=0 \text{ vô nghiệm).}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{y}=1 \text{ hoặc } \frac{x}{y}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\overset{(i)}{\Rightarrow}2y^2=2\\x=2y\overset{(i)}{\Rightarrow}5y^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\pm1\Rightarrow x=\pm1\\y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}\Rightarrow x=\pm2\sqrt{\dfrac{2}{5}}\end{array}\right..$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(1;1),(-1;-1),\left(\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5};\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)\right\}.$

Ví dụ 403. Giải hệ: $\begin{cases}2x^3-y^2+\sqrt[3]{2x^3-3y+1}-\sqrt[3]{y^2+1}=3y & (1)\\ x^5+x^3y^2+xy^4-yx^4-x^2y^3-y^5+2013(x-y)=0 & (2)\end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Lê Quí Đôn – Đà Nẵng

Phân tích và lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
Nhận thấy phương trình (2) có dạng đa thức với dấu hiệu nhân tử là $(x-y)$.

$$(2)\Leftrightarrow(x^5-yx^4)+(xy^4-y^5)+x^3y^2-x^2y^3+2013(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x-y)+y^4(x-y)+x^2y^2(x-y)+2013(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(x^4+y^4+x^2y^2+2013)=0\Leftrightarrow x=y,\ (\text{do}: x^4+y^4+x^2y^2+2013>0).$$

Thế $x=y$ vào $(1)\Leftrightarrow 2x^3-3x+1+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=x^2+1+\sqrt[3]{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{2x^3-3x+1})^3+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=(\sqrt[3]{x^2+1})^3+\sqrt[3]{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{2x^3-3x+1})=f(\sqrt[3]{x^2+1}) \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $(3)\Rightarrow f(\sqrt[3]{2x^3-3x+1})=f(\sqrt[3]{x^2+1})\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3-3x+1}=\sqrt[3]{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow 2x^3-3x+1=x^2+1\Leftrightarrow 2x^3-x^2-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}=y \\ x=y=0 \ \vee \ x=y=-1 \end{array}\right..$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(0;0);(-1;-1);\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 404. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x+y+y^2)=x(y+1) & (1)\\ \sqrt{x^3+4x}=1+\dfrac{(y+2)^2}{3} & (2)\end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Huỳnh Thúc Kháng – Quảng Nam

Phân tích và lời giải. Do $VP_{(2)}>0$ nên điều kiện là $x(x^2+4)>0\Leftrightarrow x>0.$

Nhận thấy (1) có thể viết lại dưới dạng phương trình bậc 2 với ẩn là x và kiểm tra biệt số Δ là số chính phương nên trước hết khai thác (1) để tìm mối liên hệ giữa x và y.

$(1)\Leftrightarrow x^2+(y^2-y-1).x-(y^3+y^2)=0,$ có biệt số:

$$\Delta_x=(y^2-y-1)^2+4(y^3+y^2)=y^4+y^2+1-2y^3+2y-2y^2+4y^3+4y^2$$
$$=y^4+2y^3+3y^2+2y+1=(y^4+2y^3+y^2)+2(y^2+y)+1$$
$$=(y^2+y)^2+2(y^2+y)+1=(y^2+y+1)^2>0.$$

Suy ra: $x=\dfrac{-y^2+y+1+y^2+y+1}{2}=y+1$ hoặc $x=-y^2\le 0$: loại do $x>0.$

Với $x=y+1$ thì $(2)\Leftrightarrow x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x}=3\sqrt{x(x^2+4)}$

Do biểu thức trong căn thức phân tích thành tích số, nên sẽ nghĩ đến việc biểu diễn biểu thức ngoài căn thức theo tổng bình phương của 2 biểu thức này, để đưa về phương trình đẳng cấp, nghĩa là viết:

$$\Leftrightarrow (x^2+4)+2.x=3\sqrt{x}.\sqrt{x^2+4} \qquad (3)$$

Đặt $a=\sqrt{x}>0;\ b=\sqrt{x^2+4}>2$ thì $(3)\Leftrightarrow b^2+2a^2=3ab\Leftrightarrow (b-2a)(b-a)=0.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\sqrt{x^2+4}:\text{VN}_o\\ 2\sqrt{x}=\sqrt{x^2+4}\end{array}\right.\Leftrightarrow 4x=x^2+4\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=3.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(2;3)\}$.

Nhận xét. *Để giải hoàn thiện hệ phương trình, ta cần nắm vững các kỹ thuật giải phương trình cơ bản. Bởi lẽ, khi thế vào phương trình còn lại, thường bắt gặp các kỹ thuật như liên hợp, đặt ẩn phụ, hàm số, bất đẳng thức…… (xem phần 1). Ngoài ra, khi lập Δ thường sử dụng khai triển:* $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

Ví dụ 405. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 - 3x(y^2 - 2y + 6) - 18x^2 + 6y = 0 & (1) \\ (6x+5)\cdot(3 + 2\sqrt{y^2+4}) = 16 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy (1) là phương trình bậc hai với ẩn x và kiểm tra biệt số Δ là số chính phương nên sẽ khai thác từ (1) để tìm mối liên hệ giữa x và y.*

Lời giải. Để hệ có nghiệm thì từ (2) có $6x + 5 > 0.$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 18x^2 + 3(y^2 - 2y + 6)\cdot x - (y^3 + 6y) = 0$ và biệt số:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= 9(y^2 - 2y + 6)^2 + 72(y^3 + 6y) \\ &= 9(y^4 + 4y^2 + 36 - 4y^3 - 24y + 12y^2 + 8y^3 + 48y) \\ &= 9(y^4 + 4y^3 + 16y^2 + 24y + 36) = 9\left[(y^4 + 4y^3 + 4y^2) + 12y^2 + 24y + 36\right] \\ &= 9\left[(y^2+2y)^2 + 12.(y^2+2y) + 36\right] = 9(y^2 + 2y + 6)^2 > 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3(y^2 - 2y + 6) + 3(y^2 + 2y + 6)}{36} = \frac{y}{3} \ \vee \ x = -\frac{1}{6}y^2 - 1 \le -1 : \text{loại do } x > -\frac{5}{6}\cdot$$

Với $y = 3x$ thì $(2) \Leftrightarrow (6x+5)(3 + 2\sqrt{9x^2+4}) = 16 \Leftrightarrow (6x+5)(3 + \sqrt{36x^2+16}) = 16$

Để đơn giản đặt $t = 6x > -5 \left(\text{do}: x > -\dfrac{5}{6}\right)$ thì phương trình

$$\Leftrightarrow (t+5)(3 + \sqrt{t^2+16}) = 16 \Leftrightarrow (t+5)(3 + \sqrt{t^2+16}) - 16 = 0 \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = (t+5)\cdot(3 + \sqrt{t^2+16}) - 16$ trên $(-5;+\infty)$ có:

$$f'(t) = 3 + \sqrt{t^2+16} + \frac{t(t+5)}{\sqrt{t^2+16}} = 3 + \frac{2t^2 + 5t + 16}{\sqrt{t^2+16}} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(-5;+\infty)$ và phương trình $f(t) = 0$ có không quá 1 nghiệm. Mặt khác, ta có: $f(\text{t}) = f(-3) = 0 \Leftrightarrow t = -3.$

Suy ra: $x = \dfrac{t}{6} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 3x = -\dfrac{3}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)\right\}.$

Ví dụ 406. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 - (x+4)y^2 + 8y + x^2 - 4x = 0 & (1) \\ \sqrt{\dfrac{1-x}{2}} + \sqrt{x + 2y + 3} = 4(x-1)^2 + 8y - \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên

Phân tích và lời giải. *Điều kiện:* $x \le 1$ *và* $x + 2y + 3 \ge 0.$

Nhận thấy (1) là phương trình bậc hai với ẩn x và kiểm tra biệt số Δ là số chính phương nên sẽ khai thác từ (1) để tìm mối liên hệ giữa x và y.

$(1) \Leftrightarrow x^2 - (y^2 + 4).x + 2y^3 - 4y^2 + 8y = 0,$ có:

$$\Delta_x=(y^2+4)^2-4(2y^3-4y^2+8y)=y^4+8y^2+16-8y^3+16y^2-32y$$
$$=y^4-8y^3+24y^2-32y+16=(y^4-8y^3+16y^2)+8y^2-32y+16$$
$$=(y^2-4y)^2+8(y^2-4y)+16=(y^2-4y+4)^2\ge 0.$$

Suy ra: $x=2y$ hoặc $x=y^2-2y+4=(y-1)^2+3\ge 3$: loại do $x\le 1$.

Thế $x=2y$ vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+\sqrt{2x+3}=4x^2-4x+\dfrac{7}{2}$ (3)

Phương trình (3) có vế trái là tổng 2 căn thức với 2 biến trong căn có dấu đối nhau và vế phải có thể đưa được về dạng bình phương, hơn nữa sử dụng casio tìm được phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\cdot$ Đó là dấu hiệu sử dụng BĐT Cauchy.

Ta có: $\begin{cases}\bullet\ \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}=2\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{2}\cdot\dfrac{1}{4}}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{x}{2} & (4)\\ \bullet\ \sqrt{2x+3}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(2x+3)\cdot 4}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{1}{4}(2x+7)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{7}{4} & (5)\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}VT_{(3)}=\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+\sqrt{2x+3}\le\dfrac{5}{2}\cdot\\ VP_{(3)}=4x^2-4x+\dfrac{7}{2}=(2x-1)^2+\dfrac{5}{2}\ge\dfrac{5}{2} & (6)\end{cases}$

Do đó nghiệm phương trình là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (4), (5), (6) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 407. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3x-5)(x^2-1)=y(x^2+3x-y-6) & (1)\\ \sqrt[4]{-y^2-2y+1}=y-3x+4 & (2)\end{cases}$

Đề nghị Olypic 30/04/2014 lớp 10 – Chuyên Nguyễn Tất Thành – KonTum

Phân tích và lời giải. *Điều kiện:* $-y^2-2y+1\ge 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{2}\le y\le -1+\sqrt{2}$.

Nhận thấy (1) là phương trình bậc hai với ẩn y và kiểm tra biệt số Δ là số chính phương nên sẽ khai thác từ (1) để tìm mối liên hệ giữa x và y.

(1) $\Leftrightarrow y^2-(x^2+3x-6).y+(3x^3-5x^2-3x+5)=0$ có biệt số:

$$\Delta_y=(x^2+3x-6)^2-4(3x^3-5x^2-3x+5)=(x^2-3x+4)^2>0.$$

Suy ra: $y=3x-5$ hoặc $y=x^2-1$.

Với $y=3x-5$, thế vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt[4]{-y^2-2y+1}=-1$: vô nghiệm.

Với $y=x^2-1$, thế vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt[4]{2-x^4}=x^2-3x+3$ (3)

Sử dụng casio, tìm được $x=1$ là nghiệm duy nhất của (1) nên có thể sử dụng BĐT.

Ta có: $VT_{(3)} = \sqrt[4]{(2-x^4).1.1.1} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \dfrac{2-x^4+1+1+1}{4} = \dfrac{5-x^4}{4}\cdot$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2-x^4=1 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=1.$

Mặt khác: $VP_{(3)} = x^2-3x+4 \geq \dfrac{5-x^4}{4} \Leftrightarrow x^4+4x^2-12x+7 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+2x+7) \geq 0:$ luôn đúng với mọi x.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$

Do đó nghiệm của (3) là $x=1 \Rightarrow y=0.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(1;0)\right\}\cdot$

Ví dụ 408. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4\sqrt{x+1}-xy\sqrt{y^2+4}=0 & (1) \\ \sqrt{x^2-xy^2+1}+3\sqrt{x-1}=xy^2 & (2) \end{cases}$

***Phân tích**. Nhận thấy cả 2 phương trình đều có chứa căn thức, nhưng phương trình (1) dễ dàng khử căn hơn bằng cách lũy thừa, tức* $(1) \Leftrightarrow 16(x+1)=x^2y^2(y^2+4)$ *và nó có dạng phương trình bậc 2 với ẩn x. Từ đó ta kiểm tra biệt số* Δ_x *là số chính phương nên hướng đi là đúng. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-xy^2+1 \geq 0 \end{cases}$ nên từ $(1) \Rightarrow y>0.$

$(1) \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1}=xy\sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow 16(x+1)=x^2y^2(y^2+4) \Leftrightarrow (y^4+4y^2)x^2-16x-16=0$

$\Delta'_x = 64+16(y^4+4y^2)=16(y^4+4y^2+4)=16(y^2+2)^2.$

Suy ra: $x=\dfrac{8+4y^2+8}{y^4+4y^2}=\dfrac{4(y^2+4)}{y^2(y^2+4)}=\dfrac{4}{y^2}$ hoặc $x=-\dfrac{4}{y^2+4}<0:$ loại do $x \geq 1.$

Với $xy^2=4,$ thế vào $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3}+3\sqrt{x-1}=4,$ $(\text{ĐK}: x \geq \sqrt{3})$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3}-1)+3(\sqrt{x-1}-1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=2 \Rightarrow \begin{cases} y^2=2 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\sqrt{2},$ do: $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}>0,\ \forall x \geq \sqrt{3}.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(2;\sqrt{2})\right\}.$

Ví dụ 409. Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{3y+2x+3}+2.\sqrt[3]{19y+2x+10}=2y^2+y-5x & (1) \\ (x+y-1)\sqrt{y-1}=(y-2)\sqrt{x+y} & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Cao Lãnh 2 – Đồng Tháp

***Phân tích**. Nhận thấy cả 2 phương trình đều có chứa căn thức, nhưng ta sẽ không làm gì được đối với hình thức của (1). Nếu quan sát kỹ, thì hình thức của (2) chỉ có 2 căn thức có dạng $\sqrt{y-1}$, $\sqrt{x+y}$ khi biến đổi và hoàn toàn có thể đưa về tích số.*

Lời giải. Điều kiện: $y \ge 1,\ x+y \ge 0,\ 3y+2x+3 \ge 0.$

$$(2) \Leftrightarrow \left[(\sqrt{x+y})^2-1\right]\sqrt{y-1}-\left[(\sqrt{y-1})^2-1\right]\sqrt{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^2.\sqrt{y-1}-\sqrt{y-1}-(\sqrt{y-1})^2.\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{x+y})^2.\sqrt{y-1}-(\sqrt{y-1})^2.\sqrt{x+y}\right]+(\sqrt{x+y}-\sqrt{y-1})=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}.\sqrt{x+y}.(\sqrt{x+y}-\sqrt{y-1})+(\sqrt{x+y}-\sqrt{y-1})=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+y}-\sqrt{y-1}).(\sqrt{y-1}.\sqrt{x+y}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+y}=\sqrt{y-1}\ (\text{do}: \sqrt{y-1}\cdot\sqrt{x+y}+1>0) \Leftrightarrow x=-1.$$

Với $x=-1,$ thế vào $(1) \Leftrightarrow \sqrt{3y+1}+2.\sqrt[3]{19y+8}=2y^2+y+5$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{3y+1}-(y+1)\right]+2\cdot\left[\sqrt[3]{19y+8}-(y+2)\right]=2y^2-2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{-y^2+y}{\sqrt{3y+1}+y+1}+\frac{-2(y^3+6y^2-7y)}{\sqrt[3]{(19y+8)^2}+(y+2)\sqrt[3]{19y+8}+(y+2)^2}=2y^2-2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-y}{\sqrt{3y+1}+y+1}+\frac{2(y^2-y)(y+7)}{\sqrt[3]{(19y+8)^2}+(y+2)\sqrt[3]{19y+8}+(y+2)^2}+2(y^2-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-y)\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2(y+7)}{\sqrt[3]{(19y+8)^2}+(y+2)\sqrt[3]{19y+8}+(y+2)^2}+2\right]}_{>0,\ \forall y\ge 1}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-y=0 \\ y \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow y=1.$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(-1;1)\right\}\cdot$

Ví dụ 410. Giải hệ: $\begin{cases} x^3+3xy^2+x^2+y^2+x+1=2y^3+3x^2y+xy+2y & (1) \\ x(2y-1)-5x-2y+5=0 & (2) \end{cases}$

***Phân tích**. Ta sẽ không làm được gì với hình thức của phương trình* (2). *Nếu viết* (1) *theo cụm đẳng cấp:* $(1) \Leftrightarrow (x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3)+(x^2+y^2-xy)+x-2y+1=0$ *và*

sẽ phân tích cụm đẳng cấp bậc 2, bậc 3 này theo cụm bậc thấp $x-2y+1$ *với hy vọng sẽ đưa được về tích số có chứa* $(x-2y+1).f(x;y)=0.$ *Thật vậy:*

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2-xy+y^2)+(x^2-xy+y^2)+(x-2y+1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-xy+y^2)(x-2y+1)+x-2y+1=0 \Leftrightarrow (x-2y+1)(x^2-xy+y^2+1)=0$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Có $(1) \Leftrightarrow \left[(x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3)+(x^2+y^2-xy)\right]+(x-2y+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[(x-2y)(x^2-xy+y^2)+(x^2-xy+y^2)\right]+(x-2y+1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-xy+y^2)(x-2y+1)+x-2y+1=0 \Leftrightarrow (x-2y+1)(x^2-xy+y^2+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2y+1)\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1\right]=0 \Leftrightarrow x-2y+1=0 \Leftrightarrow 2y=x+1.$

Thế $2y=x+1$ vào $(2) \Leftrightarrow x^2-6x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{5} \Rightarrow y=\dfrac{4+\sqrt{5}}{2} \\ x=3-\sqrt{5} \Rightarrow y=\dfrac{4-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(3\pm\sqrt{5};\dfrac{4\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 411. Giải hệ: $\begin{cases} 3x^2y+2x^2+y^3+2y^2+y+2=2x^3+3xy^2+2xy+2x & (1) \\ 8x^3+5y-7=8.\sqrt[3]{15y-24x^2+23} & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Tương tự như ví dụ trên, ta sẽ viết phương trình* (1) *theo từng cụm đẳng cấp:* $\Leftrightarrow (y^3-3xy^2+3x^2y-2x^3)+2(y^2-xy+x^2)+(y-2x+2)=0.$ *Sử dụng casio để phân tích cụm bậc 3, tức có* $t^3-3t^2+3t-2=(t-2)(t^2-t+1)$ *nên sẽ viết phương trình* $\Leftrightarrow (y-2x)(x^2-xy+y^2)+2(x^2-xy+y^2)+(y-2x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-xy+y^2)(y-2x+2)+(y-2x+2)=0 \Leftrightarrow (y-2x+2)(x^2-xy+y^2+1)=0.$

Lời giải. Có $(1) \Leftrightarrow (y^3-3xy^2+3x^2y-2x^3)+2(y^2-xy+x^2)+(y-2x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[(y-2x)(x^2-xy+y^2)+2(x^2-xy+y^2)\right]+(y-2x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-xy+y^2)(y-2x+2)+(y-2x+2)=0$

$\Leftrightarrow (y-2x+2)(x^2-xy+y^2+1)=0 \Leftrightarrow y-2x+2=0 \Leftrightarrow y=2x-2.$

Thế $y=2x-2$ vào $(2) \Leftrightarrow 8x^3+10x-17=8.\sqrt[3]{30x-24x^2-7}$

$\Leftrightarrow (2x-2)^3+(24x^2-14x-9)=8.\sqrt[3]{8.(2x-2)-(24x^2-14x-9)} \quad (3)$

Đặt $\begin{cases} u=2x-2 \\ v=\sqrt[3]{8.(2x-2)-(24x^2-14x-9)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3+24x^2-14x-9=8v \\ v^3+24x^2-14x-9=8u \end{cases}$

$\Rightarrow u^3 - v^3 + 8(u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow u = v.$

Với $u = v \Rightarrow 8x^3 - 6x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2}$ với $x = \cos t,\ t \in [0;\pi]$.

Suy ra: $(x;y) = \left(\cos\frac{\pi}{9}; 2\cos\frac{\pi}{9} - 2\right); \left(\cos\frac{5\pi}{9}; 2\cos\frac{5\pi}{9} - 2\right); \left(\cos\frac{7\pi}{9}; 2\cos\frac{7\pi}{9} - 2\right)$.

2. Kỹ thuật nhân lượng liên hợp

Trong phần này, tôi xin giới thiệu về kỹ thuật liên hợp trong hệ phương trình. Khi đó, ta cần chọn 1 phương trình để liên hợp và đưa về tích số, rồi kết hợp với phương trình còn lại để giải. Thông thường, có 2 cách ra đề: một là ghép hợp lý để liên hợp. Hai là thêm bớt để liên hợp. Trong một số trường hợp khó hơn, cần có sự kết hợp giữa 2 phương trình, sau đó sử dụng kỹ thuật liên hợp mới đưa được về dạng tích số.

Ví dụ 412. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+3} = \frac{1}{x}(y-3) & (1) \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x} = x + 3 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Từ (1), nhận thấy* $(x+y) - (x+3) = y - 3$ *có nhân tử với vế phải nên sẽ ghép 2 căn thức lại với nhau để tiến hành liên hợp. Nhưng khi liên hợp sẽ xuất hiện ở mẫu số dạng* $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ *nên ta phải xét lượng này có khác 0 hay chưa ?!*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$. Khi đó vế trái (1) dương nên cần $y > 3$.

Với $y > 3 \Leftrightarrow x + y > x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+y} > \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x+y} - \sqrt{x+3} > 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y-3}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x+3}} = \frac{y-3}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x+3}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+y} - \sqrt{x+3} = x \quad (3)$$

Kết hợp (3) với (2), suy ra hệ: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x} = x + 3 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x+3} = x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{x^2 + 3x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 8.$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S = (x;y) = \{(1;8)\}$.

Ví dụ 413. Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} & (1) \\ x^3 + 5x^2 + 6x = (3x + 2y + 1)(\sqrt{3-2y} + \sqrt{5-x}) & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy ở (1) có* $3(x+y) - (x+y+1) = 2x + 2y - 1$ *và biểu thức ngoài căn:* $[2(x+y)]^2 - 1^2 = (2x+2y-1)\cdot(2x+2y+1)$ *có chung* $2x + 2y - 1$, *nên sẽ ghép 2 căn thức này lại với nhau để liên hợp và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x+y\ge 0,\ x\le 5,\ y\le \dfrac{3}{2}\cdot$

$(1)\Leftrightarrow\left[\sqrt{3(x+y)}-\sqrt{x+y+1}\right]+\left[2(x+y)\right]^2-1^2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+2y-1}{\sqrt{3(x+y)}+\sqrt{x+y+1}}+(2x+2y-1)(2x+2y+1)=0$

$\Leftrightarrow (2x+2y-1)\cdot\left[2(x+y)+1+\dfrac{1}{\sqrt{3(x+y)}+\sqrt{x+y+1}}\right]=0\Leftrightarrow 2x+2y=1.$

Vì $2(x+y)+1+\dfrac{1}{\sqrt{3(x+y)}+\sqrt{x+y+1}}>0,\ \forall x+y\ge 0.$

Thế $2y=1-2x$ vào $(2)\Leftrightarrow x(x^2+5x+6)=(x+2)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x})\ \left(x\in[-1;5]\right)$

$\Leftrightarrow x(x+2)(x+3)=(x+2)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x})$

$\Leftrightarrow x(x+3)=\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}\quad \left(\text{do}: x+2>0,\ \forall x\in[-1;5]\right)$

Do sử dụng casio được $x=1$ là nghiệm duy nhất nên truy ngược dấu để liên hợp.

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+2}(\sqrt{2x+2}-2)+2(2-\sqrt{5-x})+2x^2+4x-6=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+2}+2}+\dfrac{(x-1)}{2+\sqrt{5-x}}+(x-1)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+2}+2}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5-x}}+x+3\right)=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}\cdot$

Vì $\dfrac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+2}+2}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5-x}}+x+3>0,\ \forall x\in[-1;5].$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm hệ phương trình là $(x;y)=\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)\cdot$

Ví dụ 414. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+\sqrt{2x-y}+x^2y=\sqrt{x}+\sqrt{3y}+y^2x & (1)\\ 2(1-y)\sqrt{x^2+2y-1}=y^2-2x-1 & (2)\end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Lê Quí Đôn – Bình Định

Phân tích. *Nhận thấy rằng phương trình (1) luôn đúng khi $x=y$, tức sẽ có nhân tử là $(x-y)$. Thật vậy, nếu ghép $(\sqrt{x+2y}-\sqrt{3y}),\ (\sqrt{2x-y}-\sqrt{x})$ và liên hợp sẽ xuất hiện nhân tử $x-y$ với lượng $(x^2y-y^2x)=xy(x-y)$. Từ đó có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x+2y\ge 0,\ 2x-y\ge 0\\ x\ge 0,\ y\ge 0\\ x^2+2y-1\ge 0\ (i)\end{cases}\cdot$ Từ (i) suy ra: $\begin{cases}x>0,\ y>0\\ 2x\ge y\\ x^2+2y-1\ge 0\end{cases}\cdot$

$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{x+2y}-\sqrt{3y})+(\sqrt{2x-y}-\sqrt{x})+(x^2y-y^2x)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\frac{x-y}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}+xy(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\frac{1}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}+xy\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Vì: $\frac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\frac{1}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}+xy>0,\ \forall x,\ y>0.$

Thế $x=y$ vào $(2) \Leftrightarrow 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-5)+2(x-1)(\sqrt{x^2+2x-1}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-5)+\frac{2(x-1)(x^2+2x-5)}{\sqrt{x^2+2x-1}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-5)\left[1+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2+2x-1}+2}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{6} \\ \sqrt{x^2+2x-1}=-2x: \text{VN}_0 \end{array}\right..$$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm hệ phương trình là $(x;y)=(\sqrt{6}-1;\sqrt{6}-1)$.

Ví dụ 415. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1) \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 & (2) \end{cases}$

Đại học khối A năm 2013

Phân tích. *Ngoài việc giải bằng phương pháp hàm số, bài này ta có thể giải bằng cách liên hợp để đưa về tích số. Từ (1), nếu ghép* $(\sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2})$ *và liên hợp sẽ có tử số là* $x-y^4-1$. *Còn đối với cụm* $(\sqrt[4]{x-1}-y)$ *có chứa căn bậc bốn nên liên hợp 2 lần cũng xuất hiện* $x-1-y^4$ *và có chung nhân tử với nhóm đầu tiên. Nhưng do khi liên hợp cụm* $(\sqrt[4]{x-1}-y)$ *thì mẫu số có chứa lượng* $\sqrt[4]{x-1}+y$ *chưa khẳng định được có bằng 0 hay không ?! Do đó ta tìm điều kiện cho y. Xuất phát từ phương trình (2), nhận thấy có dạng hằng đẳng thức nên biến đổi* $\Leftrightarrow (x^2+2xy+y^2)-2x-6y+1=0$ $\Leftrightarrow (x+y)^2-2(x+y)+1=4y \Leftrightarrow (x+y-1)^2=4y\ge 0 \Rightarrow y\ge 0.$ *Vì vậy khi liên hợp, ta nên xét 2 trường hợp:* $x=1,\ y=0$ *và* $x>1,\ y>0.$ *Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$ Khi đó: $(2) \Leftrightarrow (x^2+2xy+y^2)-2(x+y)+1=4y$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-2(x+y)+1=4y \Leftrightarrow (x+y-1)^2=4y\ge 0 \qquad (*)$$

- Trường hợp 1. Với $x=1,\ y=0$ luôn thỏa nên $(x;y)=(1;0)$ là 1 cặp nghiệm.
- Trường hợp 2. Với $x>1,\ y>0,$ thì: $(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2})+(\sqrt[4]{x-1}-y)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{\sqrt{x-1}-y^2}{\sqrt[4]{x-1}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{x-y^4-1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y^4-1)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=y^4+1.\text{ Do: }\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)}>0,\ \forall:\begin{cases}x>1\\y>0\end{cases}.$$

Thế $x=y^4+1$ vào (*) $\Leftrightarrow (y^4+y)^2=4y \Leftrightarrow y=0$ (loại) hoặc $y^7+2y^4+y-4=0.$

Do sử dụng casio tìm nghiệm duy nhất $y=1$ nên sử dụng phương pháp hàm số.

Xét $f(y)=y^7+2y^4+y-4$ trên $(0;+\infty)$ có: $f'(y)=7y^4+8y^3+1>0,\ \forall y>0.$

Suy ra hàm số $f(y)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $f(y)=f(1)=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(1;0);(2;1)\}\cdot$

Ví dụ 416. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x(x+y)+\sqrt{x+y}=2y^2+\sqrt{2y} & (1)\\ x^2y-5x^2+7x+7y-4=6\sqrt[3]{xy-x+1} & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy rằng phương trình (1) luôn đúng khi $x=y,$ tức sẽ có nhân tử là $(x-y).$ Thật vậy nếu ghép 2 căn để liên hợp được: $(x+y)-2y=x-y$ và cụm còn lại $x^2+xy-2y^2$ có dạng đẳng cấp nên phân tích $x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y).$*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}y\ge 0\\x+y\ge 0\end{cases}.$

Với $y=0$ thì hệ $\begin{cases}x^2+\sqrt{x}=0\\-5x^2+7x-4=\sqrt[3]{1-x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\-4=1\end{cases}$: vô nghiệm.

Xét $y>0,$ thì (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{x+y}-\sqrt{2y})+(x^2+xy-2y^2)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+(x-y)(x+2y)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+x+2y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y.\text{ Do }\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+(x+y)+y>0,\ \forall\begin{cases}x+y\ge 0\\y>0\end{cases}.$$

Thế $y=x$ vào (2) $\Leftrightarrow x^3-5x^2+14x-4=6\sqrt[3]{x^2-x+1}$

$$\Leftrightarrow x^3-5x^2+14x-4=3.\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$$

$$\Leftrightarrow 3.\sqrt[3]{8x^2-8x+8}+(\sqrt[3]{8x^2-8x+8})^3=3.(x+1)+(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{8x^2-8x+8})=f(x+1).$$

Xét hàm số $f(t)=3t+t^3$ có $f'(t)=3+3t^2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(\sqrt[3]{8x^2-8x+8})=f(x+1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{8x^2-8x+8}=x+1$

$\Leftrightarrow 8x^2-8x+8=(x+1)^3\Leftrightarrow x^3-5x^2+11x-7=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(1;1)\}\cdot$

Ví dụ 417. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3y-6)\sqrt{x^3-1}=x^3+y^2-17\sqrt{xy}+18 & (1)\\ x^2+y^2+2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}=x+y+2xy & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy rằng phương trình (2) luôn đúng khi $x=y$, tức sẽ có nhân tử là $(x-y)$. Thật vậy, nếu nhóm cụm đẳng cấp $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$ và ghép căn với cụm còn lại: $2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}-(x+y)$ và liên hợp ta sẽ thu được tử số có dạng:*
$4(2x^2-3xy+2y^2)-(x^2+2xy+y^2)=7(x^2-2xy+y^2)=7(x-y)^2$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\ xy\ge 0\\ 2x^2-3xy+2y^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ y>0\\ 2x^2-3xy+2y^2\ge 0\end{cases}$.

$(2)\Leftrightarrow(x-y)^2+\left[2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}-(x+y)\right]=0$

$\Leftrightarrow(x-y)^2\cdot\left(1+\dfrac{7}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y}\right)=0\Leftrightarrow(x-y)^2=0\Leftrightarrow x=y.$

Vì: $1+\dfrac{7}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y}>0,\ \forall\begin{cases}x\ge 1,\ y>0\\ 2x^2-3xy+2y^2\ge 0\end{cases}$.

Thế $x=y$ vào $(1)\Leftrightarrow(3x-6)\sqrt{x^3-1}=x^3+x^2-17x+18$

$\Leftrightarrow(3x-6)\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}=x(x^2+x+1)-18(x-1)\qquad(3)$

Đặt $a=\sqrt{x-1}\ge 0,\ b=\sqrt{x^2+x+1}>0\Rightarrow a^2=x-1\Leftrightarrow x=a^2+1.$

$(3)\Leftrightarrow(3a^2-3)ab=(a^2+1)b^2-18a^2\Leftrightarrow 3a^2b-3ab-a^2b^2-b^2+18a^2=0$

$\Leftrightarrow(3a^3b-a^2b^2)-(3ab-b^2)+(18a^2-2b^2)=0$

$\Leftrightarrow 3a^2b.(3a-b)-b.(3a-b)+2.(3a-b).(3a+b)=0$

$\Leftrightarrow(3a-b)(3a^2b-b+6a+2b)=0\Leftrightarrow(3a-b)(3a^2b+6a+b)=0$

$\Leftrightarrow 3a-b=0\Leftrightarrow b=3a,\ \ (\text{do}: 3a^2b+6a+b>0,\ \forall a\ge 0,\ b>0).$

Với $b=3a$, suy ra: $3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+x+1}\Leftrightarrow 9(x-1)=x^2+x+1\Leftrightarrow x=y=4\pm\sqrt{6}.$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm hệ là $(x;y)=(4\pm\sqrt{6};\ 4\pm\sqrt{6}).$

Ví dụ 418. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+\sqrt{x^2+2y+1}=x^2y+y+1 & (1) \\ 3\sqrt{2x-1}+\sqrt{xy}.\sqrt{5-4y^2}=4x^2 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy rằng phương trình (1) luôn đúng khi $x=y$, tức sẽ có nhân tử là $(x-y)$. Thật vậy, nếu nhóm cụm bậc ba: $(x^3-x^2y)=x^2(x-y)$ và đối với cụm $\sqrt{x^2+2y+1}-(y+1)$ sau khi liên hợp được tử số là: $x^2+2y+1-(y+1)^2=x^2-y^2$ $=(x-y)(x+y)$ sẽ có nhân tử chung $(x-y)$. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\ge\dfrac{1}{2};\ xy\ge 0;\ x^2+2y+1\ge 0 \\ -\dfrac{\sqrt5}{2}\le y\le\dfrac{\sqrt5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{1}{2} \\ 0\le y\le\dfrac{\sqrt5}{2} \end{cases}$.

$$(1)\Leftrightarrow (x^3-x^2y)+\sqrt{x^2+2y+1}-(y+1)=0\Leftrightarrow x^2(x-y)+\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}\right)=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y.$$

Vì: $x^2+\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}>0,\ \forall x\ge\dfrac{1}{2}$ và $0\le y\le\dfrac{\sqrt5}{2}$.

Thế $x=y$ vào $(2)\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}=4x^2$ (3)

- Với $\sqrt{2x-1}+2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$: thỏa hệ nên là 1 cặp nghiệm của hệ.
- Với $x\ne\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2x-1}+2x-1\ne 0$ thì:

$$(3)\Leftrightarrow 3\left[\sqrt{2x-1}-(2x-1)\right]+x\left[\sqrt{5-4x^2}-(-2x+3)\right]-3(2x^2-3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-6(2x^2-3x+1)}{\sqrt{2x-1}+2x-1}-\frac{4x(2x^2-3x+1)}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}-3(2x^2-3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-3x+1)\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{2x-1}+2x-1}+\frac{4x}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}+3\right)=0 \quad (4)$$

Vì $\dfrac{6}{\sqrt{2x-1}+2x-1}+\dfrac{4x}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}+3>0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt5}{2}\right]$, nên phương trình

$(4)\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (loại) hoặc $x=1\Rightarrow y=1$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right);(1;1)\right\}$.

Ví dụ 419. Giải hệ: $\begin{cases}(8x-6)\sqrt{y}=(2+\sqrt{x-2})(y+4\sqrt{x-2}+4) & (1)\\ 2\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}=x+1 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Do hệ không có dấu hiệu của sự đặt ẩn phụ cũng như hàm số và ta cũng sẽ không làm được gì đối với hình thức của (1). Từ đó sẽ nghĩ đến việc khai thác phương trình (2). Nếu biến đổi* $(2)\Leftrightarrow(\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2})+(\sqrt{x^2+3x-y}-x-1)=0$ *và liên hợp trong các dấu ( ) được các tử số là:* $x^2-y^2-(x+y)=(x+y)(x-y-1)$ *và* $(x^2+3x-y)-(x^2+2x+1)=x-y-1$ *sẽ có nhân tử chung* $(x-y-1)$.

Lời giải. Điều kiện: $y\ge 0;\ x\ge 2;\ x^2+3x-y\ge 0$.

$$(2)\Leftrightarrow(\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2})+\left[\sqrt{x^2+3x-y}-(x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+3x-y-4x-y^2}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{x^2+3x-y-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x^2-y^2)-(x+y)}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{x-y-1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(x+y)-(x+y)}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{x-y-1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+y)(x-y-1)}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{x-y-1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y-1)\cdot\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=x-1,\ \text{vì: }\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}>0,\ \forall\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 0\end{cases}.$$

Thế $y=x-1$ vào $(1)\Leftrightarrow(8x-6)\sqrt{x-1}=(2+\sqrt{x-2})\cdot(x+3+4\sqrt{x-2})$

$$\Leftrightarrow(2+\sqrt{x-2})\cdot\left[(\sqrt{x-2})^2+4\sqrt{x-2}+4+1\right]=(8x-6)\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x-2}+2)\cdot\left[(\sqrt{x-2}+2)^2+1\right]=(8x-6)\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x-2}+2)^3+(\sqrt{x-2}+2)=(8x-6)\sqrt{x-1}$$

Do vế trái có dạng hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$ *luôn đơn điệu trên* $\mathbb{R}$ *nên sẽ định hướng phân tích vế phải theo hàm này để sử dụng hàm số. Thật vậy:*

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x-2}+2)^3+(\sqrt{x-2}+2)=(4x-3)\sqrt{4x-4}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x-2}+2)^3+(\sqrt{x-2}+2)=\left[(\sqrt{4x-4})^2+1\right]\cdot\sqrt{4x-4}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x-2}+2)^3+(\sqrt{x-2}+2)=(\sqrt{4x-4})^3+\sqrt{4x-4}$$

$\Leftrightarrow f(\sqrt{x-2}+2)=f(\sqrt{4x-4})$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{x-2}+2)=f(\sqrt{4x-4})\Leftrightarrow\sqrt{x-2}+2=\sqrt{4x-4}$

$\Leftrightarrow x+2+4\sqrt{x-2}=4x-4\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2}=3x-6$

$\Leftrightarrow 16(x-2)=9x^2-36x+36\Leftrightarrow 9x^2-52x+68=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=1\\ x=\dfrac{34}{9}\Rightarrow y=\dfrac{25}{9}\end{array}\right.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(2;1);\left(\dfrac{34}{9};\dfrac{25}{9}\right)\right\}$.

Ví dụ 420. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y & (1)\\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3) & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy rằng phương trình (1) luôn đúng khi* $x=y$, *tức sẽ có nhân tử là* $(x-y)$. *Thật vậy, có* $(1)\Leftrightarrow(\sqrt{xy}-y)+\left[\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}-2y\right]=0$ *và thực hiện liên hợp thì thu được các tử số* $xy-y^2=x(x-y)$ *và* $4x^2-4y^2+(4x-9)(x-y)$ $=4(x-y)(x+y)+(x-y)(4x-9)=(x-y)(8x+4y-9)$ *nên có lời giải như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0,\ y\ge 0$.

Do $x=y=0$ thì hệ $\begin{cases}0=0\\0=9\end{cases}$: vô nghiệm nên xét $x>0,\ y>0$.

$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{xy}-y)+\left[\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}-2y\right]=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}+\dfrac{4x^2+(4x-9)(x-y)-4y^2}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}+\dfrac{4(x-y)(x+y)+(4x-9)(x-y)}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}=0$

$$\Leftrightarrow(x-y)\cdot\left[\frac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0 \qquad (3)$$

Do với $x>0,\ y>0$ *thì ta chưa khẳng định được lượng* $8x+4y-9=4(2x+y)-9$ *có dấu như thế nào ?! Khi đó ta quan tâm đến phương trình (2) để đi chứng minh điều này luôn dương. Thật vậy, ở (2) có thể biểu diễn* $2x+y$ *theo* $x>0$, *bằng cách biến đổi* $(2)\Leftrightarrow\sqrt{y+2x}=\dfrac{3(x+3)}{4\sqrt{x+2}}\Leftrightarrow 4(y+2x)=\dfrac{9(x+3)^2}{4(x+2)}\cdot$ *Mong muốn lúc này là có thể*

chứng minh lượng $4(y+2x)=\dfrac{9(x+3)^2}{4(x+2)}>9$ *để có* $4(y+2x)-9>0$. *Có nhiều cách chứng minh điều này, ở đây tôi xin được trình bày bằng phép biến đổi tương đương.*

Từ $(2)\Rightarrow 16(x+2)(y+2x)=9(x+3)^2 \Leftrightarrow 4(2x+y)=\dfrac{9(x+3)^2}{4(x+2)}$ (4)

Giả sử: $\dfrac{9(x+3)^2}{4(x+2)}>9 \Leftrightarrow x^2+6x+9>4x+8 \Leftrightarrow (x+1)^2>0$: luôn đúng khi $x>0$.

Suy ra: $(4)\Leftrightarrow 4(2x+y)>9 \Leftrightarrow 8x+4y-9>0$. Nên: $(3)\Leftrightarrow x=y$.

Thế $x=y$ vào $(2)\Leftrightarrow 4\sqrt{3x(x+2)}=3(x+3)\Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(1;1)\}\cdot$

Lưu ý. *Ta có thể chứng minh* $8x+4y-9\ge 0$ *bằng BĐT Cauchy như sau:*

$$(2)\Rightarrow \sqrt{y+2x}=\frac{3}{4}\left(\frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\right)=\frac{3}{4}\left[\frac{(\sqrt{x+2})^2+1}{\sqrt{x+2}}\right]=\frac{3}{4}\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\ge}\frac{3}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{\sqrt{x+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}}}=\frac{3}{2}\ \text{hay}\ \sqrt{y+2x}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4(y+2x)\ge 9.$$

Ví dụ 421. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1)\\ (x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4 & (2)\end{cases}$

Chọn đội tuyển VMO tỉnh Ninh Bình 2014 – 2015

Phân tích. *Nhận thấy rằng phương trình (1) luôn đúng khi* $x=y$, *tức sẽ có nhân tử là* $(x-y)$. *Thật vậy:* $(1)\Leftrightarrow\left[\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}-y\right]=\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)$ *và liên hợp theo từng cụm được các tử số* $xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)-y^2=y(x-y)+(x-y)(\sqrt{xy}-2)$ $=(x-y)(y+\sqrt{xy}-2)$ *và* $(y-x)$ *nên xuất hiện nhân tử và có lời giải như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0,\ y\ge 0,\ xy\ge 0\\ xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)\ge 0\end{cases}$.

Với $x=y=0$ thì hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\0=4\end{cases}$: vô nghiệm nên xét $x>0,\ y>0$.

$$(1)\Leftrightarrow\left[\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}-y\right]=\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)-y^2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}=\frac{y-x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(x-y)+(x-y)\sqrt{xy}-2)}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(y+\sqrt{xy}-2)}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\cdot\left(\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0 \qquad (3)$$

Do với $x>0,\ y>0$ thì lượng: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$, còn lượng $y+\sqrt{xy}-2$ chưa xác định được dấu của nó ?!. Quan sát phương trình (2) cũng có lượng $y+\sqrt{xy}$ và hoàn toàn có thể biểu diễn theo x. Tức $(2)\Leftrightarrow y+\sqrt{xy}=\frac{4}{x+1}-x(1-x)$ và mong muốn của ta lúc này là chứng minh lượng: $\frac{4}{x+1}-x(1-x)\ge 2,\ \forall x>0$ để thu được $x+\sqrt{xy}\ge 2$, tức luôn có $x+\sqrt{xy}-2\ge 0$ thì việc liên hợp đưa về tích đã hoàn thành.

Từ $(2)\Rightarrow y+\sqrt{xy}=\frac{4}{x+1}+x^2-x$. Giả sử $\forall x>0$ thì $\frac{4}{x+1}+x^2-x\ge 2$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x)+4\ge 2(x+1)\Leftrightarrow x^3-3x+2\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)\ge 0$: luôn đúng với mọi $x>0$.

Do đó $y+\sqrt{xy}=\frac{4}{x+1}+x^2-x\ge 2\Leftrightarrow y+\sqrt{xy}-2\ge 0$. Nên $(3)\Leftrightarrow x=y$.

Thế $x=y$ vào $(2)\Leftrightarrow (x+1)(3x-x^2)=4\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ hoặc $x=y=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(1;1);\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\right\}$.

Lưu ý. *Có thể sử dụng phương pháp hàm số chứng minh $y+\sqrt{xy}-2\ge 0$ như sau:*

Từ $(2)\Rightarrow y+\sqrt{xy}=\frac{4}{x+1}+x^2-x=\frac{x^3-x+4}{x+1}=f(x)$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^3-x+4}{x+1}$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(x)=\frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	//////		$-$	0	$+$	
$f(x)$	//////	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $y+\sqrt{xy}=\dfrac{x^3-x+4}{x+1}\ge 2 \Leftrightarrow y+\sqrt{xy}-2\ge 0.$

<u>*Ví dụ 422.*</u> Giải hệ: $\begin{cases} x^2+4y-13+(x-3)\sqrt{x^2+y-4}=0 & (1)\\ (x+y-3)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x+y+1}=x+3y-5 & (2)\end{cases}$

<u>Phân tích</u>. *Nhận thấy rằng phương trình (2) luôn đúng khi $y=1$, tức luôn có nhân tử $(y-1)$. Thật vậy $(2)\Leftrightarrow (x+y-3)\left[\sqrt{y}-1\right]+(y-1)\left[\sqrt{x+y+1}-2\right]=0$ và liên hợp các biểu thức trong dấu ngoặc $\left[\quad\right]$ sẽ xuất hiện nhân tử chung.*

☙ ***<u>Lời giải</u>***. Điều kiện: $\begin{cases} x+y+1\ge 0\\ y\ge 0\\ x^2+y-4\ge 0\end{cases}$.

$(2)\Leftrightarrow (x+y-3)(\sqrt{y}-1)+(y-1)\sqrt{x+y+1}-2(y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+y-3)(\sqrt{y}-1)+(y-1)(\sqrt{x+y+1}-2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+y-3)(y-1)}{\sqrt{y}+1}+\dfrac{(y-1)(x+y-3)}{\sqrt{x+y+1}+2}=0$

$\Leftrightarrow (y-1)\cdot(x+y-3)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+y+1}+2}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\\ y=3-x\end{array}\right.$.

Do lượng: $\dfrac{1}{\sqrt{y}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+y+1}+2}>0,\ \forall\begin{cases} y\ge 0\\ x+y+1\ge 0\end{cases}$.

- Với $y=1$, thế vào $(1)\Leftrightarrow x^2-9+(x-3)\sqrt{x^2-3}=0$

  $\Leftrightarrow (x-3)\left[(x+3)+\sqrt{x^2-3}\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0\\ \sqrt{x^2-3}=-x-3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ \begin{cases} x\le -3\\ x=-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3.$

- Với $y=3-x$, thế vào $(1)\Leftrightarrow x^2-4x-1+(x-3)\sqrt{x^2-x-1}=0$ (3)

  $\Leftrightarrow (x^2-x-10)+(x-3)(\sqrt{x^2-x-1}-3)=0$

  $\Leftrightarrow (x^2-x-10)+\dfrac{(x-3)(x^2-x-10)}{\sqrt{x^2-x-1}+3}=0\Leftrightarrow (x^2-x-10)\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-x-1}+3}+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 10 = 0 \\ \sqrt{x^2 - x - 1} = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{array}\right..$$

Kết luận: So điều kiện, suy ra: $S = (x;y) = \left\{(1;3),(-1;4);\left(\dfrac{1-\sqrt{41}}{2};\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}\right)\right\}$.

Nhận xét. *Trong cách giải của phương trình (3), do tôi đã sử dụng chức năng table của máy tính bỏ túi và tìm được nhân tử* $x^2 - x - 10$ *nên có tách ghép và liên hợp như trên. Ngoài cách này, ta có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn:*

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x - 1}$, suy ra: $t^2 = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^2 = t^2 + x + 1$. Khi đó:

$(3) \Leftrightarrow t^2 + x + 1 - 4x + (x-3)t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + (x-3).t - 3x = 0.$

$\Delta_t = (x-3)^2 + 12x = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2.$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3 - x + x + 3}{2} = 3 \\ t = \dfrac{3 - x - x - 3}{2} = -x \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 - x - 1} = 3 \\ \sqrt{x^2 - x - 1} = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \\ x = -1 \end{array}\right..$

Từ đó suy ra y và cũng có kết quả như trên sau khi so với điều kiện.

Ví dụ 423. Giải hệ: $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} & (1) \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} & (2) \end{cases}$

Đại học khối B năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy rằng phương trình (1) luôn đúng khi* $y = 1$, *tức luôn có nhân tử* $(y-1)$. *Thật vậy* $(1) \Leftrightarrow (x-y-1)(\sqrt{y}-1) + (y-1)\sqrt{x-y} - (y-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y-1)\left[\sqrt{y}-1\right] + (y-1)\left[\sqrt{x-y}-1\right] = 0$ *và liên hợp trong dấu ngoặc* $[\ ]$ *sẽ xuất hiện nhân tử* $y-1$ *và* $x-y-1$, *nên có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge y;\ y \ge 0 \\ 4x \ge 5y + 3 \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow (x-y-1)(\sqrt{y}-1) + x - y - 1 + 2 = (1-y)\sqrt{x-y} + x$

$\Leftrightarrow (x-y-1)(\sqrt{y}-1) + (y-1)\sqrt{x-y} - (y-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y-1)(\sqrt{y}-1) + (y-1)(\sqrt{x-y}-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y-1)(y-1)}{\sqrt{y}+1} + \frac{(y-1)(x-y-1)}{\sqrt{x-y}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = x - 1 \end{array}\right..$$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{y}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}+1}>0,\ \forall\begin{cases}x\ge y\\ y\ge 0\end{cases}$.

- Với $y=1$, thế vào (2) $\Leftrightarrow 9-3x=0\Leftrightarrow x=3$.
- Với $y=x-1\ge 0\Rightarrow x\ge 1$, thế vào (2) $\Leftrightarrow 2x^2-x-3=\sqrt{2-x}$, $\left(\text{ĐK}: 1\le x\le 2\right)$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-x-1)+\left[(x-1)-\sqrt{2-x}\right]=0\Leftrightarrow 2(x^2-x-1)+\frac{x^2-x-1}{x-1+\sqrt{2-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(2+\frac{1}{x-1+\sqrt{2-x}}\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-1=0\\ 1\le x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra: $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot$ Do $2+\dfrac{1}{x-1+\sqrt{2-x}}>0,\ \forall x\in\left[1;2\right]$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(3;1);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 424. Giải hệ: $\begin{cases}\sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}+\sqrt{x+1}=y+\sqrt{y} & (1)\\ \sqrt{3x-2}-\sqrt{y}=2x^2-y-2 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử TN.THPT Quốc Gia 2015 – TT. Đại học Ngoại Thương – TPHCM

Phân tích. *Xuất phát từ (2), nhận thấy biểu thức trong căn lớn chứa tích* $(x-y+1)$ *nên dự đoán đó là nhân tử nên ghép cụm* $\sqrt{x+1}-\sqrt{y}$ *để liên hợp sẽ có* $x+1-y$. *Còn lại:* $\sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}-y$ *và liên hợp có tử số là* $(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}-y^2$ $y(x+1-y)+(x-y+1)\sqrt{y}=(x-y+1)(y+\sqrt{y})$, *đã có nhân tử và có lời giải như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3};\ y\ge 0\\ (x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}\ge 0\end{cases}$.

$$(1)\Leftrightarrow\left[\sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}-y\right]+\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)y-y^2+(x-y+1)\sqrt{y}}{\sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}+y}+\frac{x-y+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{y(x+1-y)+(x-y+1)\sqrt{y}}{\sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}+y}+\frac{x-y+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y+1)(y+\sqrt{y})}{\sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}+y}+\frac{x-y+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(\frac{y+\sqrt{y}}{\sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}+y}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}\right)=0 \Leftrightarrow y=x+1.$$

Do $\dfrac{y+\sqrt{y}}{\sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}>0,\ \forall x\ge\dfrac{2}{3},\ y\ge 0.$

Thế $y=x+1,$ vào $(2)\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}-(2x-3)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}-(x+1)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}=x+1 \quad (i)\end{array}\right.$$

Ta có: $\forall x\ge\dfrac{2}{3}$ thì $f(x)=x+1\ge\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}>1$ $\qquad (ii)$

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}$ có: $g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}>0,\ \forall x>\dfrac{2}{3}\cdot$

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ nên $h(x)=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}$

nghịch biến trên $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)\Rightarrow \max\limits_{\left[\frac{2}{3};+\infty\right)} h(x)=h\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{15}}{5}<1$ hay $h(x)<1$ $\qquad (iii)$

Từ $(i),(ii),(iii),$ suy ra: $f(x)=h(x)$ vô nghiệm hay (i) vô nghiệm.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)\right\}.$

<u>Ví dụ 425.</u> Giải hệ: $\begin{cases}(x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1 & (1)\\ (x+1)\sqrt{y^2+y+2}+(y-1)\sqrt{x^2+x+1}=x+y & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R}).$

<u>Phân tích</u>. *Ta sẽ không làm được gì ở (2), còn ở (1), nhận thấy vế trái có hạng tử tích số* $(x^2+x).\sqrt{x-y+3}$ *nên ta sẽ phân tích vế phải* $2(x^2+x)+(y-x+1).$ *Khi đó nếu nhóm* $(x^2+x).\left[\sqrt{x-y+3}-2\right]$ *và liên hợp trong dấu* $[\ \ ]$ *sẽ thu được* $x-y-1,$ *đã xuất hiện nhân tử chung nên có lời giải chi tiết như sau:*

<u>Lời giải</u>. Điều kiện: $x-y+3\ge 0.$

$(1)\Leftrightarrow (x^2+x)\sqrt{x-y+3}-2(x^2+x)=(y-x+1)$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)(\sqrt{x-y+3}-2)+(x-y-1)=0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+x)(x-y-1)}{\sqrt{x-y+3}+2}+(x-y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}+1\right)=0 \Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{x^2+x+2+\sqrt{x-y+3}}{\sqrt{x-y+3}+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1. \text{ Do } \frac{x^2+x+2+\sqrt{x-y+3}}{\sqrt{x-y+3}+2}>0,\ \forall x-y+3\ge 0.$$

Thế $y=x-1$ vào (2) $\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2-x+2}+(x-2)\sqrt{x^2+x+1}=2x-1$ (3)

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2-x+2}>0 \\ b=\sqrt{x^2+x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=x^2-x+2 \\ b^2=x^2+x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-a^2=2x-1 \\ x=\dfrac{b^2-a^2+1}{2} \end{cases}.$

$$(3) \Leftrightarrow \left(\frac{b^2-a^2+1}{2}+1\right)\cdot a+\left(\frac{b^2-a^2+1}{2}-2\right)\cdot b=b^2-a^2$$

$$\Leftrightarrow a.(b^2-a^2+3)+b.(b^2-a^2-3)=2(b-a)(b+a)$$

$$\Leftrightarrow ab^2-a^3+3a+b^3-a^2b-3b=2(b-a)(b+a)$$

$$\Leftrightarrow (b^3-a^3)+(ab^2-a^2b)+(3a-3b)=2(b-a)(b+a)$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(a^2+ab+b^2)+ab(b-a)-3(b-a)-2(b-a)(b+a)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(a^2+ab+b^2+ab-3-2b-2a)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(a^2+b^2+2ab-2b-2a-3)=0 \Leftrightarrow (b-a)\left[(a+b)^2-2(a+b)-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(a+b+1)(a+b-3)=0 \Leftrightarrow (b-a)(a+b-3)=0 \Leftrightarrow b=a \ \vee\ a+b=3.$$

- Với $a=b$, suy ra: $\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}\cdot$
- Với $a+b=3$, suy ra: $\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2+x+1}=3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+2}=3-\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\sqrt{x^2+x+1}\ge 0 \\ x^2-x+2=10+x^2+x-6\sqrt{x^2+x+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1}\le 3 \\ 3\sqrt{x^2+x+1}=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-8\le 0 \\ 8x^2+x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ hoặc } x=\frac{7}{8} \Rightarrow y=-\frac{1}{8}\cdot$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right);(-1;-2);\left(\dfrac{7}{8};-\dfrac{1}{8}\right)\right\}\cdot$

<u>Ví dụ 426.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y-1}=2\sqrt{y+1} & (1) \\ x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1} & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử TN.THPT Quốc Gia 2015 – TT.LTĐH Trí Minh – Tp. HCM

<u>Phân tích</u>*. Ở (2), nhận thấy x và y độc lập 1 vế, nên hướng suy nghĩ thường là hàm số, nhưng sẽ bị bế tắc do không tìm được hàm đặc trưng ở hai vế. Nhưng để ý kỹ, viết*

$(2) \Leftrightarrow (x-\sqrt{y^2-1})+(\sqrt{x^2+1}-y)=0$ *và liên hợp trong từng dấu ( ), sẽ thu được lượng nhân tử là* x^2-y^2+1. *Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0,\ y\ge 1.$

$$(2)\Leftrightarrow (x-\sqrt{y^2-1})+(\sqrt{x^2+1}-y)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-y^2+1}{x+\sqrt{y^2-1}}+\frac{x^2-y^2+1}{\sqrt{x^2+1}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2+1)\cdot\left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+y}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-y^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=y^2-1.\ \text{Do } \frac{1}{x+\sqrt{y^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+y}>0,\ \forall x\ge 0,\ y\ge 1.$$

Thế $x^2=y^2-1$ vào $(1)\Leftrightarrow \sqrt[4]{x^2}+3\sqrt{y-1}=2\sqrt{y+1}\Leftrightarrow \sqrt[4]{y^2-1}+3\sqrt{y-1}=2\sqrt{y+1}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{y-1}+\sqrt[4]{(y-1)(y+1)}=2\sqrt{y+1} \xleftrightarrow{\text{Chia: } \sqrt{y+1}>0} 3\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}+\sqrt[4]{\frac{y-1}{y+1}}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{y-1}{y+1}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1}=\frac{16}{81}\Leftrightarrow y=\frac{97}{65}\Rightarrow x=\frac{72}{65}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{72}{65};\dfrac{97}{65}\right)\right\}.$

Ví dụ 427. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x & (1)\\ x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(x-1)}=\dfrac{9}{2} & (2)\end{cases}$

Đề thi thử số 4 – TN.THPT Quốc Gia 2015 – Diễn đàn k2pi.net.vn

Phân tích. *Nhận thấy phương trình (1) luôn đúng khi* $x=y$, *tức luôn có nhân tử* $(x-y)$. *Thật vậy* $(1)\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y}-x\sqrt{x^2+x}=x-y\Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x})=x-y$ *và liên hợp trong dấu ( ) sẽ có nhân tử chung ở 2 vế là* $(x-y)$ *và có lời giải 1. Ngoài ra, ta có thể chia 2 vế (1) cho* x^2 *và sử dụng hàm số với lời giải 2.*

Điều kiện: $x\ge 1,\ y\ge 0.$

Lời giải 1. Sử dụng nhân lượng liên hợp.

$$(1)\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y}+y=x\sqrt{x^2+x}+x\Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x})+(y-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+(y-x)=0\Leftrightarrow (y-x)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=x.\ \text{Do } \frac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1>0,\ \forall x\ge 1,\ y\ge 0.$$

Thế $y = x$ vào (2) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x(x-1)} = \dfrac{9}{2}$ (3)

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} > 0 \Rightarrow t^2 = 2x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)} \Leftrightarrow x + \sqrt{x(x-1)} = \dfrac{t^2+1}{2}\cdot$

$(3) \Leftrightarrow \dfrac{t^2+1}{2} + t = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2t - 8 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$

Suy ra: $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{x} \ge 0 \\ 4\sqrt{x} = 5 \end{cases} \Rightarrow x = y = \dfrac{25}{16}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{25}{16};\dfrac{25}{16}\right)\right\}\cdot$

Lời giải 2. Sử dụng phương pháp hàm số.

$(1) \xleftrightarrow{\text{Chia: } x^2>0} \sqrt{1+\dfrac{y}{x^2}} + \dfrac{y}{x^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{y}{x^2}\right) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{1+t} + t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}} + 1 > 0,\ \forall t > 0.$

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $f\left(\dfrac{y}{x^2}\right) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y = x.$

Thế $y = x$ vào (2) $\Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x(x-1)} - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}.\sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})^2\right] + 2(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) - 80$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) - 8 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 2$

Suy ra: $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow x = y = \dfrac{25}{16}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{25}{16};\dfrac{25}{16}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 428. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y}\cdot\sqrt[3]{x-y} = y & (1) \\ \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = y^2 + 2y & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x^2 - x - y \ge 0,\ x \ge 1.$

Với $x \ge 1,$ thì vế trái của (2) dương và để hệ có nghiệm thì cần điều kiện kéo theo là $VP_{(2)} = y^2 + 2y \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \le -2 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$.

Nếu $\begin{cases} y \le -2 \\ x \ge 1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} VT_{(2)} = \sqrt{x^2 - x - y}.\sqrt[3]{x-y} > 0 \\ VP_{(2)} = y \le -2 < 0 \end{cases}$ thì hệ vô nghiệm khi $y \le -2.$

Do đó điều kiện là: $x^2 - x - y \geq 0,\ x \geq 1,\ y \geq 0.$

- Trường hợp 1. Nếu $x^2 - x - y = 0,$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 < \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$: VNo.
- Trường hợp 2. Nếu $x^2 - x - y > 0$ thì phương trình:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y} = \frac{y}{\sqrt{x^2-x-y}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y} - 1 = \frac{y}{\sqrt{x^2-x-y}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} = \frac{y - \sqrt{x^2-x-y}}{\sqrt{x^2-x-y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x^2 - y^2 - (x+y)}{(y - \sqrt{x^2-x-y})\sqrt{x^2-x-y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{(x-y)(x+y) - (x+y)}{(y - \sqrt{x^2-x-y})\sqrt{x^2-x-y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{(x+y)(x-y-1)}{(y - \sqrt{x^2-x-y})\sqrt{x^2-x-y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}} \right] = 0 \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}} > 0,\ \forall x \geq 1,\ y \geq 0.$

Thế $y = x - 1$ vào $(2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = x^2 - 1$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 6 + \sqrt[3]{x+6} \cdot \left[\sqrt[3]{(x+6)^2} - 4 \right] + 4\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(4x+3) + \frac{(x-2)(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 4\sqrt[3]{x+6} + 16} + \frac{4(x-2)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left[4x + 3 + \frac{(x+14)\sqrt[3]{x+6}}{(\sqrt[3]{x+6}+2)^2 + 12} + \frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} \right]}_{>0,\ \forall x \geq 1} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S = (x;y) = \{(2;1)\} \cdot$

3. Kỹ thuật dùng phương pháp cộng để đưa về tích số

<u>**Nhóm I**</u>**. Hệ phương trình dạng:** $\begin{cases} \mathbf{a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y + f_1 = 0} & (1) \\ \mathbf{a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y + f_2 = 0} & (2) \end{cases}$

⟶ Phân tích và tìm hướng giải cho bài toán:

– Khi $d_1 = e_1 = d_2 = e_2 = 0$ thì hệ có dạng đẳng cấp: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy = -f_1 \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy = -f_2 \end{cases}$.

– Khi $f_1 = f_2 = 0$ thì hệ có dạng bán đẳng cấp, tức:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y = 0 \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy = -(d_1x + e_1y) \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy = -(d_2x + e_2y) \end{cases}$

Lúc đó ta sẽ nhân chéo 2 phương trình với nhau tạo phương trình đẳng cấp.

– Khi $f_1 \neq 0,\ f_2 \neq 0,$ ta có các lối đi như sau:

+ Nếu xem (1) hoặc (2) là phương trình bậc hai với ẩn là x (y là tham số) hoặc ngược lại mà có Δ_x (hay Δ_y) là số chính phương thì ta tìm hai nghiệm và thế vào phương trình còn lại để giải.

+ Nếu Δ_x (hay Δ_y) không là số chính phương thì ta sẽ chọn một hằng số thích hợp nhân vào một phương trình để ép cho Δ_x (hay Δ_y) là số chính phương. Như vậy phải tìm hằng số k sao cho $(1) + k.(2)$ có thể phân tích được thành nhân tử. Lúc này ta có 2 cách tìm k như sau:

• Đặt $\begin{cases} a = a_1 + ka_2\ (a \neq 0),\ b = b_1 + kb_2,\ c = c_1 + kc_2 \\ d = d_1 + kd_2,\ e = e_1 + ke_2,\ f = f_1 + kf_2 \end{cases}$

Khi đó k là nghiệm của: $dec + 4baf = ae^2 + bd^2 + fc^2$. (sử dụng casio).

• Đưa về phương trình bậc hai với ẩn $(d_1 + kd_2)x + (e_1 + ke_2)y$ và đồng nhất hệ số để tìm k.

+ Đặt ẩn phụ dựa trên tịnh tiến nghiệm để đưa về hệ đẳng cấp bậc hai. Tiếp cận phép đặt ẩn phụ này bằng công cụ đạo hàm như sau:
Đạo hàm phương trình (1) với x là biến số (y xem là hằng số) được: $2a_1x + c_1y + d_1 = 0$ (3) và cũng đạo hàm (1) với biến y (x xem là hằng số) được $2b_1y + c_1y + e_1 = 0$, (4). Giải hệ chứa (3), (4) tìm được $x,\ y,$ chẳng hạn: $x = m,\ y = n.$ Khi đó ta sẽ đặt $a = x - m,\ b = y - n.$

Ví dụ 429. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} & (1) \\ 4x^2 + 3x - \dfrac{57}{25} = -y(3x+1) & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Nghệ An năm 2011

Phân tích. *Xét* $\begin{cases} a = 1 + 4k,\ b =,\ c = 3k \\ d = 3k,\ e = k,\ f = \dfrac{1}{5} - \dfrac{57}{25}k \end{cases}$ *và thế vào:* $dec + 4baf = ae^2 + bd^2 + fc^2$, *khai triển và rút gọn thu được:* $638k^3 - 1207k^2 - 148k + 20 = 0$. *Sử dụng casio, tìm*

được $k=2$. Do đó, ta lấy: (1) + 2.(2) sẽ thu được phương trình bậc hai có biệt số Δ là số chính phương và có lời giải 1 chi tiết như sau:

Lời giải 1. Lấy $(1)+2.(2)\Rightarrow y^2+2(3x+1)y+9x^2+6x-\dfrac{119}{25}=0$ có $\Delta'_y=\dfrac{144}{25}\cdot$

Suy ra: $y=-3x+\dfrac{7}{5}$ hoặc $y=-3x-\dfrac{17}{5}\cdot$

Với $y=\dfrac{7}{5}-3x$ thì $(2)\Leftrightarrow 10x^2-\dfrac{42}{5}x+\dfrac{44}{25}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5}\Rightarrow y=\dfrac{1}{5}\\ x=\dfrac{11}{5}\Rightarrow y=\dfrac{2}{25}\end{array}\right.$.

Với $y=-3x-\dfrac{17}{5}$ thì $(2)\Leftrightarrow 10x^2+\dfrac{102}{5}x+\dfrac{284}{25}=0:$ vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right);\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{2}{25}\right)\right\}\cdot$

Phân tích và lời giải 2.

Lấy $(1)+k.(2)$, *được:* $\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{5}\right)+k\left[4x^2+3x-\dfrac{57}{25}+y(3x+1)\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[(1+4k)x^2+3kxy+y^2\right]+k.(3x+y)-\frac{1}{5}-\frac{57k}{25}=0 \qquad (i)$$

Ta muốn (i) *là phương trình bậc hai theo* $(3x+y)$, *vậy* (i) *phải được viết lại thành:*

$$\frac{1+4k}{9}(3x+y)^2+k(3x+y)-\frac{1}{5}-\frac{57}{25}k=0 \qquad (ii)$$

Từ (i), (ii), *đồng nhất hệ số được:* $3k=\dfrac{6(1+4k)}{9}\Leftrightarrow 9k=2+8k\Leftrightarrow k=2.$

Lấy $(1)+2.(2)\Rightarrow 9x^2+6xy+y^2+6x+2y-\dfrac{119}{25}=0$

$$\Leftrightarrow(3x+y)^2+2(3x+y)-\frac{119}{25}=0\Leftrightarrow 3x+y=\frac{7}{5}\text{ hoặc } 3x+y=-\frac{17}{5}\cdot$$

Với $y=\dfrac{7}{5}-3x$ thì $(2)\Leftrightarrow 10x^2-\dfrac{42}{5}x+\dfrac{44}{25}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5}\Rightarrow y=\dfrac{1}{5}\\ x=\dfrac{11}{5}\Rightarrow y=\dfrac{2}{25}\end{array}\right.$.

Với $y=-3x-\dfrac{17}{5}$ thì $(2)\Leftrightarrow 10x^2+\dfrac{102}{5}x+\dfrac{284}{25}=0:$ vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right);\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{2}{25}\right)\right\}\cdot$

Lời giải 3. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5y^2=1 \\ (2x-y)(x+2y)+(x+2y)+(2x-y)=\dfrac{47}{25} \end{cases} \quad (I)$

Đặt $\begin{cases} a=2x-y \\ b=x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4x^2-4xy+y^2 \\ b^2=x^2+4xy+4y^2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=5x^2+5y^2.$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ab+a+b=\dfrac{47}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=1 \\ 2ab+2(a+b)=\dfrac{94}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=(a+b)^2-1 \\ (a+b+1)^2=\dfrac{144}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{7}{5} \\ ab=\dfrac{12}{25} \end{cases} \vee \begin{cases} a+b=-\dfrac{17}{5} \\ ab=\dfrac{132}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{5} \\ b=\dfrac{4}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{4}{5} \\ b=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{1}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{11}{25} \\ y=\dfrac{2}{25} \end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right);\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{2}{25}\right)\right\}$.

Ví dụ 430. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 14x^2-21y^2-6x+45y-14=0 & (1) \\ 35x^2+28y^2+41x-122y+56=0 & (2) \end{cases}$

Xét $a=14+35k;\ b=-21+28k;\ c=0;\ d=-6+41k;\ e=45-122k;\ f=-14+56k$

Số k là nghiệm phương trình: $dec+4baf=ae^2+bd^2+fc^2$, *thế vào và giải ta tìm được*

$k=-\dfrac{15}{49}\cdot$ *Do đó lấy* $(1)-\dfrac{15}{49}\cdot(2)$ *hay* $49.(1)-15.(2)$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Lấy (1) nhân với 49 trừ với 15 nhân với phương trình (2), được:

$$49(14x^2-21y^2-6x+45y-14)-15(35x^2+28y^2+41x-122y+56)=0$$

$$\Leftrightarrow 161x^2-909x-1449y^2+4035y-1526=0 \text{ có: } \Delta_x=(966y-1345)^2.$$

Suy ra: $x=-\dfrac{218}{161}+\dfrac{483}{161}y$ hoặc $x=7-3y$.

Với: $x=7-3y$, thế vào $(2) \Leftrightarrow 7y^2-35y+42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \Rightarrow x=-2 \\ y=2 \Rightarrow x=1 \end{array}\right.$.

Với $x=-\dfrac{218}{161}+\dfrac{483}{161}y$, thế vào $(2) \Rightarrow$ vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(-2;3);(1;2)\}\cdot$

Ví dụ 431. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2-y^2-xy+15x+4y+8=0 \\ x^2+2y^2+xy+x-10y+12=0 \end{cases} \ (I)\ \ (x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Lần lượt đạo hàm 2 vế phương trình thứ nhất theo biến x (xem y là hằng số), theo biến y (xem x là hằng số) thu được hệ:* $\begin{cases}6x-y+15=0\\-2y-x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}.$

Do đó, ta định hướng được phép đặt ẩn phụ: $x=a-2,\ y=b+3.$

Lời giải. Đặt $x=a-2,\ y=b+3\Rightarrow a=x+2,\ b=y-3.$ Khi đó:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}3(a-2)^2-(b+3)^2-(a-2)(b+3)+15(a-2)+4(b+3)+8=0\\(a-2)^2+2(b+3)^2+(a-2)(b+3)+a-2-10(b+3)+12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab+2b^2=4\\3a^2-ab-b^2=1\quad(i)\end{cases},\ \text{suy ra: } a^2+ab+2b^2=4(3a^2-ab-b^2)$$

$$\Leftrightarrow 11a^2-5ab-6b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(11a+6b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\11a=-6b\end{array}\right..$$

Với $a=b,$ thì $(i)\Leftrightarrow a^2=1\Rightarrow\begin{cases}a=\pm1\\b=\pm1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2=\pm1\\y-3=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}.$

Với $11a=-6b,$ thì $(i)\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm\dfrac{6\sqrt{53}}{53}\\b=\mp\dfrac{11\sqrt{53}}{53}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-106+6\sqrt{53}}{53}\\y=\dfrac{159-11\sqrt{53}}{53}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{-106-6\sqrt{53}}{53}\\y=\dfrac{159+11\sqrt{53}}{53}\end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm: $S=(x;y)=\left\{(-1;4);(-3;2);\left(\dfrac{-106\pm6\sqrt{53}}{53};\dfrac{159\mp11\sqrt{53}}{53}\right)\right\}.$

Nhóm II. Đưa về dạng $A^n=B^n$ có các hạng tử x^3,y^3,x^2,y^2,x,y độc lập.

Ví dụ 432. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-y^3=35 & (1)\\2x^2+3y^2=4x-9y & (2)\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R}).$

Học sinh giỏi tỉnh Yên Bái năm 2011

Phân tích. *Đối với những hệ phương trình có chứa các hạng tử:* x^3,y^3,x^2,y^2,x,y *độc lập nhau, ta thường thì lấy* $(1)+k.(2)$ *để đưa về dạng* $(x-a)^3=(y-b)^3$ *bằng hệ số bất định. Cụ thể, lấy* $(1)+k.(2)\Rightarrow x^3-y^3+k.(2x^2+3y^2)=35+k.(4x-9y)$

$\Leftrightarrow x^3-y^3+2kx^2+3ky^2-4kx+9ky-35,\ (i).$ *Mong muốn sẽ biến đổi được về dạng:*

$(x-a)^3=(y-b)^3\Leftrightarrow x^3-y^3-3ax^2+3by^2+3a^2x-3b^2y-a^3+b^3=0,\ (ii)$

Đồng nhất hệ số $(i),\ (ii)$ *được:* $\begin{cases}2k=-3a\\3k=3b\\-4k=3a^2\\9k=-3b^2\\b^3-a^3=-35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-3\\a=2\\b=-3\end{cases}$ *và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Lấy (2) nhân với -3, rồi cộng với phương trình (1) được:

$-6x^2-9y^2+x^3-y^3=-12x+27y+35$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=y^3+9y^2+27y+27 \Leftrightarrow (x-2)^3=(y+3)^3$

$\Leftrightarrow x-2=y+3 \Leftrightarrow x=y+5.$

Thế $x=y+5$ vào (2) $\Leftrightarrow y^2+5y+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \Rightarrow x=3 \\ y=-3 \Rightarrow x=2 \end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(3;-2);(2;-3)\right\}$.

_Ví dụ 433._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3=9 & (1) \\ 2x^2+y^2-4x+y=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Olympic 30/04 năm 2012

Phân tích. *Lấy* $(1)+k.(2)$ *được:* $x^3-y^3+2kx^2+ky^2-4kx+ky-9=0$ *và ta có:*

$(x-a)^3=(y-b)^3 \Leftrightarrow x^3-y^3-3ax^2+3by^2+3a^2x-3b^2y+b^3-a^3=0.$

Đồng nhất hệ số được: $\begin{cases} 2k=-3a \\ k=3b \\ -4k=3a^2 \\ k=-3b^2 \\ b^3-a^3=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-3 \\ a=2 \\ b=-1 \end{cases}$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Lấy phương trình (2) nhân với -3, rồi cộng với (1) được:

$x^3-y^3-6x^2-3y^2+12x-3y=9 \Leftrightarrow (x-2)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow x=y+3.$

Thế $x=y+3$ vào (2) $\Leftrightarrow 3y^2+9y+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(2;-1);(1;-2)\right\}$.

_Ví dụ 434._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 7x^3+6xy(2x+y)+y^3=3x^2+3x+1 & (1) \\ (x+1)(y-2)^4+x^3+x^2-x-3=0 & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Long Xuyên – An Giang

Phân tích. *Tuy hình thức bài toán không có* x, y *độc lập với nhau, nhưng ở vế phải của (1) có thể đưa về dạng* $VP_{(1)}=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$. *Từ đó định hướng biến đổi* $VT_{(1)}=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3=(2x+y)^3$ *nên* $(1)\Leftrightarrow (2x+y)^3=(x+1)^3$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Ta có: $(1)\Leftrightarrow 8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3=x^3+3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow (2x+y)^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow 2x+y=x+1 \Leftrightarrow y=1-x.$

Thế $y=1-x$ vào (2) $\Leftrightarrow (x+1)^5+x^3+x^2-x-3=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^5+(x^3+3x^2+3x+1)-2(x^2+2x+1)-2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^5 + (x+1)^3 - 2(x+1)^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^3\left[(x+1)^2+1\right] - 2\left[(x+1)^2+1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[(x+1)^2+1\right]\cdot\left[(x+1)^3-2\right] = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 = 2 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} - 1 \Rightarrow y = 2 - \sqrt[3]{2}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(\sqrt[3]{2}-1; 2-\sqrt[3]{2})\right\}\cdot$

Nhóm III. Bài toán chứa x, y không độc lập nhau

Ví dụ 435. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0 & (1) \\ x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Nhận thấy (1), (2) là phương trình bậc 2 với ẩn x, nhưng biệt số delta không là số chính phương. Đối với những hệ phương trình đại số có các biến không độc lập với nhau, chẳng hạn* x^2y^3. *Thường thì ta làm theo các bước như sau:*

- *Viết lại hệ hai phương trình bậc hai với ẩn* $x: \begin{cases} (y^3+3)x^2 - 4x + 2 = 0 \\ y^2x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$.
- *Lập tỉ lệ về hệ số:* $\dfrac{y^3+3}{y^2} = \dfrac{-4}{-2} = \dfrac{2}{y^2} \Rightarrow y = -1$ *là một nghiệm của hệ.*
- *Thế* $y = -1$ *vào hệ ban đầu:* $\begin{cases} 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.(x^2 - 2x + 1) = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$
- *Do đó để hai phương trình này luôn đúng (dạng* $0 = 0$*) khi cộng lại thì ta phải nhân* (2) *với* -2. *Lúc đó, lấy* $(1) - 2.(2)$ *sẽ thu được tích:* $(y+1).f(x) = 0.$

Lời giải. Lấy (2) nhân với $-2,$ rồi cộng với phương trình (1) được:

$x^2y^3 + 3x^2 - 2x^2y^2 - 2y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(y^3 - 2y^2 + 3) = 2(y^2 - 1)$

$\Leftrightarrow x^2(y+1)(y^2 - 3y + 3) = 2(y-1)(y+1) \quad (*)$

$\Leftrightarrow (y+1)\left[x^2(y^2 - 3y + 3) - 2(y-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = 1 \\ x^2(y^2 - 3y + 3) - 2(y-1) = 0, \quad (3) \end{array}\right.$

$(3) \Rightarrow x^2 = \dfrac{2(y-1)}{y^2 - 3y + 3} \geq 0 \Rightarrow y \geq 1.$

$(2) \Rightarrow 0 = y^2(x^2+1) - 2x \geq x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0.$

Nếu dấu $"="$ xảy ra, tức $x = y = 1$. Nhưng nghiệm này không thỏa (3).

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(1;-1)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Việc ghép đưa về* $(*)$ *không mấy khó do đã biết trước nhân tử là* $y+1$.

Ví dụ 436. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 6xy - 3x - 49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 10y - 25x - 9 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Viết hệ dạng phương trình bậc 2 ẩn y:* $\begin{cases} 3xy^2 - 6xy + x^3 + 3x + 49 = 0 \\ y^2 - (8x+10)y + x^2 + 25x + 9 = 0 \end{cases}$.

Lập tỉ lệ về hệ số: $\dfrac{3x}{1} = \dfrac{6x}{8x+10} = \dfrac{x^3+3x+49}{x^2+25x+9} \Rightarrow x = -1.$

Thế $x=-1$ *vào hệ được:* $\begin{cases} -3y^2 + 6y + 45 = 0 \\ y^2 - 2y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(y^2 - 2y - 15) = 0 \\ y^2 - 2y - 15 = 0 \end{cases}$.

Do đó, lấy $(1) + 3.(2)$ *sẽ thu được phương trình tích số:* $(x+1).f(x) = 0.$

Lời giải. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3xy^2 - 6xy + 3x + 49 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 8xy - 10y + 25x + 9 = 0 & (2) \end{cases}$

Lấy phương trình (2) nhân với 3, rồi cộng với phương trình (1) được:

$(x^3 + 3xy^2 - 6xy + 3x + 49) + 3(x^2 + y^2 - 8xy - 10y + 25x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2 + 78x + 76) + (3xy^2 + 3y^2) - 30xy - 30y = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 76) + 3y^2(x+1) - 30y(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 76 + 3y^2 - 30y) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2 + 3(y^2-5)^2\right] = 0$

Với $x=-1$, thế vào $(2) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 5$ hoặc $y = -3$.

Với $(x+1)^2 + 3(y^2-5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y = \pm\sqrt{5} \end{cases}$: không thỏa hệ nên loại.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(-1;5);(-1;3)\right\}$.

Ví dụ 437. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 16x^2 + y^4 = 8xy^3 + 1 \\ 1 + 4xy = 8x^2 + y^2 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Bến Tre – Tỉnh Bến Tre

Phân tích. *Hệ* $\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 - 8y^3.x + y^4 - 1 = 0 \\ 8x^2 - 4y.x + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ *và có* $\dfrac{16}{8} = \dfrac{-8y^3}{-4y} = \dfrac{y^4-1}{y^2-1} = y^2 + 1$ *nên sẽ có* $y = \pm 1$. *Khi đó viết lại* $\begin{cases} 16x^2 \pm 8x = 0 \\ 8x^2 \pm 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(8x^2 \pm 4x) = 0 \\ 8x^2 \pm 4x = 0 \end{cases}$ *nên ta sẽ lấy phương trình* $(1) - 2.(2)$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 - 8y^3.x + y^4 - 1 = 0 & (1) \\ 8x^2 - 4y.x + y^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Lấy $(1) - 2.(2) \Rightarrow y^4 - 8xy^3 + 16x^2 - 1 - 2(8x^2 + y^2 - 4xy - 1) = 0$

$\Leftrightarrow y^4 - 8xy^3 + 16x^2 - 1 - 16x^2 - 2y^2 + 8xy + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y^4 - 2y^2 + 1) - 8xy^3 + 8xy = 0 \Leftrightarrow (y^2-1)^2 - 8xy(y^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow (y^2-1)(y^2 - 1 - 8xy) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$ hoặc $8xy = y^2 - 1$.

- Với $y=1,$ thế vào (1) $\Leftrightarrow 16x^2-8x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{1}{2}\cdot$
- Với $y=-1,$ thế vào (1) $\Leftrightarrow 16x^2+8x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-\dfrac{1}{2}\cdot$
- Với $8xy=y^2-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-1}{8y}$ (do $y=0$ không là nghiệm hệ) và thế vào:

$$(1) \Leftrightarrow 16\left(\frac{y^2-1}{8y}\right)^2+y^4-8\left(\frac{y^2-1}{8y}\right)\cdot y^3-1=0 \Leftrightarrow 5y^4-6y^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow y^2=1 \text{ hoặc } y^2=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\pm 1 \Rightarrow x=0 \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.\cdot$$

Kết luận: Thử lại, tập nghiệm hệ $S=(x;y)=\left\{\left(\pm\dfrac{1}{2};\pm 1\right);(0;\pm 1);\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{10};\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 438. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y)(25-xy)=4x^2+17y^2+105 \\ x^2+y^2+2x-2y=7 \end{cases}$ (*)

Phân tích. *Nếu viết hệ theo phương trình bậc hai ẩn x thì sẽ không tìm được hệ số tỉ lệ, nhưng viết theo y:* $\begin{cases} (-17-2x)y^2+(50-2x^2)y-4x^2+50x-105=0 \\ y^2-2y+x^2+2x-7=0 \end{cases}$ *và có tỉ lệ:*

$\dfrac{-17-2x}{1}=\dfrac{50-2x^2}{-2}=\dfrac{-4x^2+50x-105}{x^2+2x-7} \Rightarrow x=2.$ *Thế* $x=2$ *vào hệ ta được:*

$\begin{cases} -21(y^2-2y+1)=0 \\ y^2-2y+1=0 \end{cases}\cdot$ *Do đó cần lấy* $(1)+21.(2)$ *để được:* $(x-2).f(x)=0.$

Lời giải. Hệ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2-17y^2-2x^2y-2xy^2+50x+50y-105=0 & (1) \\ x^2+y^2+2x-2y-7=0 & (2) \end{cases}$

Lấy phương trình (2) nhân với $21,$ rồi cộng với phương trình (1) được:

$$17x^2+4y^2-2x^2y-2xy^2+92x+8y-252=0$$
$$\Leftrightarrow (17x^2+92x-252)+(4y^2-2xy^2)+(8y-2x^2y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(17x+126)+2y^2(2-x)+2y(4-x^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left[17x+126-2y^2-2y(2+x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=1 \\ -2y^2-2(2+x)y+17x+126=0 \end{array}\right.$$

Với $-2y^2-2(2+x)y+17x+126=0$ và kết hợp với (2) được hệ:

$$\begin{cases} 2y^2+2(2+x)y-17x-126=0 & (3) \\ x^2+y^2+2x-2y-7=0 & (4) \end{cases}$$

Lấy $3.(4)-(3)\Rightarrow 3x^2+y^2-2xy+23x-10y+105=0$

$\Leftrightarrow (x-y+5)^2+2x^2+x+80=0$: vô nghiệm do $2x^2+x+80>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(2;1)\}$.

Ví dụ 439. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}6x^2y+2y^3+35=0 & (1)\\ 5x^2+5y^2+2xy+5x+13y=0 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên

Phân tích. *Hệ* $\Leftrightarrow\begin{cases}6yx^2+2y^3+35=0\\ 5x^2+(2y+5)x+5y^2+13y=0\end{cases}$ *và nếu* $y=-\dfrac{5}{2}$ *thì được:*

$\begin{cases}-15x^2+\dfrac{15}{4}=0\\ 5x^2-\dfrac{5}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\left(5x^2-\dfrac{5}{4}\right)=0\\ 5x^2-\dfrac{5}{4}=0\end{cases}$, *do đó lấy* $(1)+3.(2)$ *sẽ được phương trình tích số dạng* $(2y+5).f(x)=0$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Lấy phương trình (2) nhân với 3, rồi cộng với phương trình (1) được: $15x^2+15y^2+6xy+15x+39y+6x^2y+2y^3+35=0$

$\Leftrightarrow y(2y^2+7y+5)+3x^2(5+2y)+3x(5+2y)+(8y^2+34y+35)=0$

$\Leftrightarrow y(y+1)(2y+5)+3x^2(2y+5)+3x(2y+5)+(2y+5)(4y+7)=0$

$\Leftrightarrow (2y+5)(y^2+5y+3x^2+3x+7)=0\Leftrightarrow (2y+5)\left[\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2+3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{5}{2}$ và thế vào $(1)\Leftrightarrow -15x^2+\dfrac{15}{4}=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\pm\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 440. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+3xy^2=-49 & (1)\\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi Quốc Gia năm 2004 – Bảng B

Phân tích. $\begin{cases}3xy^2+x^3+49=0\\ y^2-8(x+1)y+x^2+17x=0\end{cases}$. *Nếu* $x=-1$ *thì hệ* $\Leftrightarrow\begin{cases}-3(y^2-16)=0\\ y^2-16=0\end{cases}$.

Khi đó, ta nhân 3 vào phương trình (2) rồi cộng với phương trình (1) và có lời giải.

Lời giải. Lấy phương trình (2) nhân với 3, rồi cộng với phương trình (1) được: $(x^3+3x^2+51x+49)+(3xy^2+3y^2)-24xy-24y=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+49)+3y^2(x+1)-24y(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+49+3y^2-24y)=0\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$. Thế $x=-1$ vào $(1) \Leftrightarrow -3y^2=-48 \Leftrightarrow y=\pm 4.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(-1;\pm 4)\}$.

Ví dụ 441. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2y+y^3+14=0 & (1) \\ 2x^2+2y^2+2xy+4x+5y=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Bạc Liêu – Tỉnh Bạc Liêu

Phân tích. *Viết hệ* $\Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2+y^3+14=0 \\ 2x^2+(2y+4)x+2y^2+5y=0 \end{cases}$ *và nếu* $y=-2$ *thì hệ:*

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x^2+6=0 \\ 2x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(2x^2-2)=0 \\ 2x^2-2=0 \end{cases}$ *nên sẽ lấy phương trình:* $(1)+3.(2)$.

Lời giải. Lấy phương trình (2) nhân với 3, rồi cộng với phương trình (1) được: $(3yx^2+y^3+14)+3\left[2x^2+(2y+4)x+2y^2+5y\right]=0$

$\Leftrightarrow 3yx^2+y^3+14+6x^2+6xy+12x+6y^2+15y=0$

$\Leftrightarrow (3yx^2+6x^2)+(6xy+12x)+(y^3+6y^2+15y+14)=0$

$\Leftrightarrow 3x^2(y+2)+6x(y+2)+(y+2)(y^2+4y+7)=0$

$\Leftrightarrow (y+2)(3x^2+6x+y^2+4y+7)=0 \Leftrightarrow (y+2)\left[3(x+1)^2+(y+2)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow y=-2$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$.

Với $y=-2$ thế vào $(1) \Leftrightarrow -6x^2+6=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(\pm 1;-2)\}$.

Nhóm IV. Tìm mối liên hệ tuyến tính giữa x và y (nhân thêm biến số)

Các thí dụ trên tôi đã tìm ra được hệ số tỉ lệ, từ đó lựa chọn hệ số nhân vào phương trình thích hợp, rồi cộng lại. Đối với bài toán không tìm được hệ số tỉ lệ thì ta sẽ làm như thế nào ? Câu trả lời được trình bày qua các bước giải như sau:

- *Bước 1.* *Tìm hai cặp nghiệm của hệ phương trình, chẳng hạn:* $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$.
- *Bước 2.* *Tìm quan hệ tuyến tính giữa hai nghiệm này (thực chất là viết phương trình đường thẳng qua hai điểm* $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ *trong mp Oxy).*
- *Bước 3.* *Thế quan hệ tuyến tính sao cho có lợi nhất vào hệ và phân tích thành nhân tử. Từ đó xác định được biểu thức nhân vào phương trình.*

Tuy nhiên, cách này sẽ không giải quyết được nếu ta không nhẩm được hai cặp nghiệm hoặc nghiệm quá lẻ không dò được bằng máy tính bỏ túi.

Ví dụ 442. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2+3x+3y-3=0 & (1) \\ x^2y-4xy-3y^2+2y-x+1=0 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy hệ có nghiệm:* $(x;y)=(0;1);(1;0)$. *Quan hệ tuyến tính giữa hai nghiệm là:* $x+y=1$ *hay* $y=1-x$. *Thay vào hệ ta được:* $\begin{cases} x^2(1-x)^2=0 \\ -x(1-x)^2=0 \end{cases}$ *nên sẽ lấy* $(1)+x.(2)$ *và phân tích sẽ được nhân tử dạng* $(x+y-1).f(x)=0$.

Lời giải. Lấy phương trình (2) nhân với x rồi cộng với phương trình (1) được: $x^3y-4x^2y-3xy^2+2xy-x^2+x+x^2y^2+3x+3y-3=0$

$$\Leftrightarrow (x^3y+x^2y^2-x^2y)-(x^2+xy-x)-(3x^2y+3xy^2-3xy)+\left(3x+3y-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2y(x+y-1)-x(x+y-1)-3xy(x+y-1)+3(x+y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x^2y-x-3xy+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1-x \\ x^2y-3xy-x+3=0 \end{array}\right.$$

- Với $y=1-x$, thế vào (1) $\Leftrightarrow x(1-x)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$.
- Với $x^2y-3xy-x+3=0 \Leftrightarrow yx^2-(3y+1)x+3=0$ có $\Delta_x=(3y-1)^2$.

  Suy ra: $x=3$ hoặc $x=\dfrac{1}{y}$.

  Khi $x=3$, thế vào (1) $\Leftrightarrow 9y^2+3y+6=0$: vô nghiệm.

  Khi $x=\dfrac{1}{y}$, thế vào (1) $\Leftrightarrow 3y^2-2y+1=0$: vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(0;1);(1;0)\right\}$.

Ví dụ 443. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+xy-9x-y^2-9y=0 & (1) \\ 2x^3-20x-x^2y-20y=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Nhận thấy* $(x;y)=(0;0),(2;-1)$ *là hai cặp nghiệm của hệ. Do đó phương trình đường thẳng đi qua hai điểm* $(0;0)$ *và* $(2;-1)$ *là:* $x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$. *Thế vào hệ, ta được:* $\begin{cases} 9y(y+1)=0 \\ -20y(y+1)(y-1)=0 \end{cases}$ *nên lấy* $20(y-1).(1)+9.(2)$ *sẽ thu được phương trình tích số dạng:* $(x+2y).f(x)=0$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Lấy $20(y-1)$ nhân với phương trình (1) rồi cộng 9 nhân với (2) được: $20(y-1)(3x^2+xy-9x-y^2-9y)+9(2x^3-20x-x^2y-20y)=0$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(18x^2+15xy-60x-10y^2-80y)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2y \text{ hoặc } 18x^2+15xy-60x-10y^2-80y=0.$$

- Với $x=-2y$, thế vào (1) $\Leftrightarrow 9y^2+9y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$.
- Với $18x^2+15xy-60x-10y^2-80y=0$, kết hợp với (1) được:

$\begin{cases} 18x^2-10y^2+15xy-60x-80y=0 \\ 3x^2-y^2+xy-9x-9y=0 \end{cases}$. Đây là hệ chứa hai tam thức, giải ra ta tìm được các nghiệm: $(x;y)=(10;15);\left(\dfrac{15\pm\sqrt{145}}{2};11\pm\sqrt{145}\right)$.

Kết luận: Tập nghiệm $S=(x;y)=\left\{(0;0);(-1;2);(10;15);\left(\dfrac{15\pm\sqrt{145}}{2};11\pm\sqrt{145}\right)\right\}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 531. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2+xy-x^2=0 \\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 532. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy+x-y=0 \\ x^2-3y+4y^2-1=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 533. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3+2x^2y-xy=y^2-x-y \\ 2x^3-xy+x^2=4 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 534. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-2y^2+xy+x-y=0 \\ x^3-y^3+2x^2y+y^2=-1 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 535. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+4xy+y^2+2x+y=2 \\ 8\sqrt{1-2x}+y^2-9=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 536. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2y-4x^2+4y^3+16xy=16y^2 \\ \sqrt{x-2y}+\sqrt{x+y}=2\sqrt{3} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 537. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2-8xy^2-xy+4y^3=0 \\ 16x^3+2x-8y^2+5=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 538. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=5x-y-2 \\ x^2+y^2+x+y=4 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 539. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2+x+3y=xy+3 \\ 2y^2-3xy-9x^2+3x=y \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 540. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+5x-xy=3y-6 \\ 4x^2y-3xy+2y^2=9 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 541. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2y^2+y=x^2y+2xy+x \\ 5\sqrt{x^2-2y-2}+\sqrt[3]{y^2-2x-4}=4 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 542. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}+x+y=5 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 543. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2y^2=x^2y+2xy \\ 2\sqrt{x^2-2y-1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 544. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (y-1)\sqrt{x+y}+(x+y-1)\sqrt{y}+x=0 \\ 8x^3-4y+\sqrt{3(x-y)+4}=1 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 545. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y(x-1)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (\sqrt{x+2}+\sqrt{2y-x+6})(\sqrt{2y-1}-3)=4 \end{cases}$

BT 546. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{xy}=3y \\ \sqrt{y-1}+\sqrt{x-1}+x+y=6 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 547. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}=x+1 \\ 4\sqrt{2x+1}+x-2y+2=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 548. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+\sqrt{x+y-1}=y^3+\sqrt{2y-1} \\ x^3-y^3+5=xy+\sqrt{x-1} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 549. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{y^4+1}=y \\ x^2+2x(y+1)+y^2-2y+1=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 550. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1)=8x^2y^3 \\ x^2y-x+2=0 \end{cases}$

BT 551. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y)+\sqrt{x+y}=\sqrt{2y}(\sqrt{2y^3}+1) \\ x^2y-5x^2+7(x+y)-4=6\sqrt[3]{xy-x+1} \end{cases}$

BT 552. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}=3x+\sqrt{7x^2+7}+2 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}$

BT 553. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y+2)\sqrt{x+1}=\sqrt{y} \\ (4-\sqrt{1-x})\sqrt{x+1}=3y-2+2\sqrt{1-x} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 554. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x+y}+x+3y=6+(x+y-4)\sqrt{y} \\ \sqrt{x-2y}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{x-y-7} \end{cases}$

BT 555. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}.\sqrt{x+xy+1}=y^2 \\ (x-1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x-y}+\sqrt{y-2}+4x-3y \end{cases}$

BT 556. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5}-y \\ \sqrt{x^2+16(y-x)}+y=2\sqrt{xy} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 557. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+3xy+2x+y=0 \\ x^2+2xy+2y^2+3x=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 558. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^4+y^2-3x^2+2y+xy+4=0 \\ x^2(3+2y^2)+(x-y)^2=9y^2+4y+6 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 559. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 560. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x^2y+3x=y^2(5y-7x) \\ (x+y)^3+x^2y=2y^3+x(y^2-6) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 561. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=91 \\ 4x^2+3y^2=16x+9y \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 562. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-y^4=1215 \\ 2x^3-4y^3=9(x^2-4y^2)-18(x-8y) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 563. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3+3x^2y=-28 \\ x^2-6xy+y^2=6x-10y \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 564. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+5xy^2-8=0 \\ 2x^2-5xy-5y^2+x+10y=10 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 565. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^2=(x-y)(xy-1) \\ x^3-x^2+y+1=xy(x-y+1) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 566. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+xy^2+x-5y=0 \\ 2xy+y^2-5y+1=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 567. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2y^2-6xy-3y^2=-9 \\ 6x^2y-y^2-9x=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 568. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 9x^4+24y^3-xy^2+7y^2=16-x+24y \\ 8y^3+9y^2+20y-\sqrt[3]{6y+1}+15=x \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Quảng Bình năm 2014

BT 569. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2 \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 \end{cases}$

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Lương Tài 2 – Bắc Ninh

BT 570. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3y^2+1+2y(x+1)=4y\sqrt{x^2+2y+1} \\ y(y-x)=3-3y \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Thái Hòa – Nghệ An

BT 571. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + xy^2 = x^3y + x^2y + y^3 \\ \sqrt{x^2 + y + 1} + y = 7 \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – THPT Hậu Nghĩa – Long An

BT 572. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2 + (y^2 - y - 1)\sqrt{x^2 + 2} - y^3 + y = 0 \\ 2x + xy + 2 + (x + 2)\sqrt{y^2 + 4x + 4} = 0 \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. Hồ Chí Minh

BT 573. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + (4 - x)y^2 + 4y - x^2 - 2x = 0 \\ 3.(\sqrt{x - 1} + \sqrt[3]{4(x - y + 1)}) = (x + 1)^2 - 8(y - 1) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên

BT 574. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2x + 2y \\ (2x - y).y = 1 + 2y \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – THPT KRông Nô – Đắk Nông

BT 575. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x(x - 2y + 2) = -1 \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Bến Tre năm 2011

BT 576. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Lâm Đồng năm 2011

BT 577. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Học sinh giỏi Quốc Gia năm 2010

BT 578. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 15 + x^4 = y^4 \\ -16x + 12x^2 - 4x^3 = 2y + 3y^2 + 2y^3 \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Bến Tre – Tỉnh Bến Tre

BT 579. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = x - 4y \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Olympic khu vực Duyên Hải & Đồng Bằng Bắc Bộ 2011

BT 580. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x + y + 2xy + 1} = 1 \\ \sqrt[3]{3y + 1} = 8x^3 - 2y - 1 \end{cases}$ $(x \geq 0)$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Phan Ngọc Hiển – Cà Mau

BT 581. Giải hệ: $\begin{cases} 6x^3 - y^3 + x^2y + 2xy^2 = 0 \\ (x^2 + y - 3)\sqrt{x^2 + y - 8} + (x^2 - y - 5)\sqrt{y - x^2} = 4 - x^2 \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Hùng Vương – Gia Lai

§3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ



Các phép đặt ẩn phụ rất đa dạng và phong phú. Tùy vào mỗi hệ phương trình mà ta cần phải khai thác các đặc điểm riêng và cấu trúc của từng hệ để tìm ra phép đặt ẩn phụ nhằm đưa về những hệ cơ bản (đối xứng loại I, II, đẳng cấp, các hệ giải được bằng phép thế, phép cộng, hàm số,…).

1. Dạng 1. Đặt 1 ẩn phụ đưa về phương trình bậc 2, bậc 3,…

Ví dụ 442. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{3}-\dfrac{y}{3x}}+\sqrt{\dfrac{3x}{2x-y}}=\dfrac{5}{2} & (1) \\ x^3+y^3-2xy^2+21=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Nhận thấy (1) có hai hạng tử:* $\sqrt{\dfrac{2}{3}-\dfrac{y}{3x}}=\sqrt{\dfrac{2x-y}{3x}}$ *và* $\sqrt{\dfrac{3x}{2x-y}}$ *là dạng nghịch đảo của nhau. Nếu đặt t là một hạng tử thì hạng tử còn lại là* $\dfrac{1}{t}$ *và khi đó sẽ đưa được về phương trình bậc 2 theo t, suy ra mối quan hệ giữa x, y, rồi thế vào phương trình còn lại. Từ đó, ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện $\dfrac{2x-y}{3x}>0.$ Ta có: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{2x-y}{3x}}+\sqrt{\dfrac{3x}{2x-y}}=\dfrac{5}{2}$ $\quad(i)$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2x-y}{3x}}>0$ thì $(i)\Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow t=2$ hoặc $t=\dfrac{1}{2}\cdot$

- Với $t=2\Rightarrow\sqrt{\dfrac{2x-y}{3x}}=2\Leftrightarrow y=-10x.$ Thế vào $(2)\Leftrightarrow -1199x^3+11=0$

  $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{109}}\Rightarrow y=-\dfrac{10}{\sqrt[3]{109}}\cdot$

- Với $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{2x-y}{3x}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y=\dfrac{5}{4}x.$ Thế vào $(2)\Leftrightarrow x^3=64\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=5.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(4;5);\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{109}};-\dfrac{10}{\sqrt[3]{109}}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 443. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y}=3-2x-y & (1) \\ x^2-2xy-y^2=2 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Cao đẳng năm 2010

Phân tích. *Nhận thấy* $(1)\Leftrightarrow 2x+y+2\sqrt{2x+y}-3=0$ *và nếu đặt* $t=\sqrt{2x+y}\geq 0,$ *thì sẽ trở thành phương trình bậc 2 ẩn t. Từ đó giải tìm t và suy ra mối liên hệ giữa x và y, rồi thế vào phương trình còn lại. Ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $2x+y\ge 0$. Ta có: $(1)\Leftrightarrow 2x+y+2\sqrt{2x+y}-3=0 \quad (i)$

Đặt $t=\sqrt{2x+y}\ge 0\Rightarrow t^2=2x+y$.

$(i)\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=1$ (nhận) hoặc $t=-3<0$ (loại).

Với $t=1\Rightarrow 2x+y=1\Leftrightarrow y=1-2x$.

Thế $y=1-2x$, vào $(2)\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=-1\\ x=-3\Rightarrow y=7\end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(1;-1);(-3;7)\}$.

Ví dụ 444. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+8\sqrt{1-2x}-9=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2x+y=2(1-2xy) & (2)\end{cases}$ $(x;y\in \mathbb{R})$.

Phân tích. *(2) có dạng hằng đẳng thức:* $(2)\Leftrightarrow (4x^2+4xy+y^2)+(2x+y)-2=0$

$\Leftrightarrow (2x+y)^2+(2x+y)-2=0$. *Đây là phương trình bậc 2 với ẩn* $t=2x+y$, *tìm t sẽ tìm được mối liên hệ giữa x và y, từ đó thế vào (1) có x, y và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $1-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le \frac{1}{2}$.

$(2)\Leftrightarrow (4x^2+4xy+y^2)+(2x+y)-2=0\Leftrightarrow (2x+y)^2+(2x+y)-2=0 \quad (i)$

Đặt $t=2x+y$, thì $(i)\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-2$.

- Với $t=1$, suy ra: $y=1-2x$, thế vào $(1)\Leftrightarrow (1-2x)^2-8\sqrt{1-2x}-9=0 \quad (3)$
  Đặt $u=\sqrt{1-2x}\ge 0$ thì $(3)\Leftrightarrow u^4+8u-9=0\Leftrightarrow (u-1)(u^3+u^2+u+9)=0$
  $\Leftrightarrow u=1$, $(\text{do}: u^3+u^2+u+9>0, \forall u\ge 0)\Rightarrow x=0\Rightarrow y=1$.
- Với $t=-2$, suy ra: $y=-2-2x$, thế vào $(1)\Leftrightarrow (2+2x)^2+8\sqrt{1-2x}-9=0 \quad (4)$
  Đặt $v=\sqrt{1-2x}\ge 0\Rightarrow 2x=1-v^2$ thì $(4)\Leftrightarrow (3-v^2)^2+8v-9=0$
  $\Leftrightarrow v^4-6v^2+8v=0\Leftrightarrow v(v^3-6v+8)=0\Leftrightarrow v\left[v(v-1)^2+2\left(v-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\right]=0$
  $\Leftrightarrow v=0$, suy ra: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-3$. Do $v(v-1)^2+2\left(v-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0,\ \forall v\ge 0$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(0;1);\left(\frac{1}{2};-3\right)\right\}$.

Ví dụ 445. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^4-2xy^2+7y^2=-x^2+7x+8 & (1)\\ \sqrt{3y^2+13}-\sqrt{15-2x}=\sqrt{x+1} & (2)\end{cases}$ $(x;y\in \mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Trần Phú – Hà Tĩnh

Phân tích. *(1) có dạng hằng đẳng thức, tức* $(1)\Leftrightarrow (y^4-2y^2x+x^2)+7(y^2-x)-8=0$

$\Leftrightarrow (y^2-x)^2+7(y^2-x)-8=0$ và đặt $t=y^2-x$ thì (1) có thể viết lại dạng phương trình bậc 2. Từ đó suy ra t và tìm được mối liên hệ giữa x và y.

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le \dfrac{15}{2}$.

(1) $\Leftrightarrow (y^4-2y^2x+x^2)+7(y^2-x)-8=0 \Leftrightarrow (y^2-x)^2+7(y^2-x)-8=0 \qquad (i)$

Đặt $t=y^2-x$, suy ra $(i) \Leftrightarrow t^2+7t-8=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-8$.

- Với $t=1$, suy ra $y^2=x+1$, thế vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+16}-\sqrt{15-2x}=\sqrt{x+1}$

  $\Leftrightarrow \sqrt{3x+16}=\sqrt{15-2x}+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x=\sqrt{(x+1)(15-2x)}$

  $\Leftrightarrow 6x^2-13x-15=0,\ (x\ge 0) \Leftrightarrow x=3$, suy ra: $y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm 2$.

- Với $y^2=x-8 \le \dfrac{15}{2}-8=-\dfrac{1}{2}<0,\ \forall x \le \dfrac{15}{2}$: nên loại $y^2=x-8$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(3;2);(3;-2)\}$.

Ví dụ 446. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3-3=(x-y)(3xy-2) & (1) \\ \dfrac{\sqrt{y+2}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\dfrac{1}{y+3} & (2) \end{cases}$ $(x;y\in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Nhận thấy (1) có dạng hằng đẳng thức $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$ khi viết $(1) \Leftrightarrow \left[x^3-y^3-3xy(x-y)\right]+2(x-y)-3=0 \Leftrightarrow (x-y)^3+2(x-y)-3=0$. Lúc này nếu đặt $t=x-y$, thu được phương trình bậc 3 theo t, từ đó suy ra mối liên hệ giữa x, y, rồi thế vào phương trình còn lại sẽ tìm được x, y và có lời giải như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $y\ge -2,\ x\ne 13$.

(1) $\Leftrightarrow \left[x^3-y^3-3xy(x-y)\right]+2(x-y)-3=0 \Leftrightarrow (x-y)^3+2(x-y)-3=0 \qquad (i)$

Đặt $t=x-y$, thì $(i) \Leftrightarrow t^3+2t-3=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+3)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$, suy ra $y=x-1$ và thế vào (2) $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\dfrac{1}{x+2}$, $\left(\text{ĐK}: \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ne 13 \end{cases}\right)$

$\Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{x+1}-2)=\sqrt[3]{2x+1}-3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}+2x+1=(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^3=\sqrt{x+1}+(\sqrt{x+1})^3 \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{2x+1})=f(\sqrt{x+1})$.

Xét hàm số $f(t)=t+t^3$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=1+3t^2>0,\ \forall t\in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt[3]{2x+1})=f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^2=(x+1)^3\ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^3-x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=-1$ hoặc $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(0;-1);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 447. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+3=2\sqrt{(y+1)(3y-x)} & (1) \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy biểu thức trong căn của phương trình* (1) *có dạng tích số nên ta sẽ phân tích biểu thức ngoài căn thành dạng tổng của 2 biểu thức tích này. Thật vậy, ta có:* $x+3=a.(y+1)+b.(3y-x)=-b.x+(a+3b).y+3$ *và đồng nhất hệ số được hệ* $\begin{cases} -b=1 \\ a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=3 \end{cases}$ *hay viết:* $(1) \Leftrightarrow 3(y+1)-(3y-x)=2\sqrt{(y+1)(3y-x)}$. *Từ* (2) *có điều kiện* $y \ge \dfrac{2}{3}$ *nên chia cho lượng dương* $y+1$ *ở 2 vế của phương trình ta được:* $3-\dfrac{3y-x}{y+1}=2\sqrt{\dfrac{3y-x}{y+1}}$, *đây là phương trình bậc 2 với ẩn* $t=\sqrt{\dfrac{3y-x}{y+1}} \ge 0.$

Lời giải. Điều kiện: $y \ge \dfrac{2}{3};\ x \ge -5;\ 3y \ge x.$

$$(1) \Leftrightarrow 3(y+1)-(3y-x)=2\sqrt{(y+1)(3y-x)} \Leftrightarrow 3-\frac{3y-x}{y+1}=2\sqrt{\frac{3y-x}{y+1}} \qquad (i)$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{3y-x}{y+1}} \ge 0,$ thì $(i) \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-3$ (loại).

Với $t=1,$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{3y-x}{y+1}}=1 \Leftrightarrow 3y-x=y+1 \Leftrightarrow x=2y-1.$

Thế $x=2y-1$ vào $(2) \Leftrightarrow \sqrt{3y-2}-\sqrt{y+2}=2y^2-3y-2$

$$\Leftrightarrow \frac{2(y-2)}{\sqrt{3y+2}+\sqrt{y+2}}=(2y+1)(y-2) \Leftrightarrow (y-1)\left(\frac{2}{\sqrt{3y+2}+\sqrt{y+2}}-2y-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=3 \text{ hoặc } (2y+1)(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2})=2 \qquad (ii)$$

Với $y \ge \dfrac{2}{3}$ thì $VT_{(ii)}=(2y+1)(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}) \ge \dfrac{14\sqrt{6}}{9}>2$ nên (ii) vô nghiệm.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(3;2)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Bản chất của việc chia ở phương trình (1) là dựa vào tính đẳng cấp của phương trình này. Hiển nhiên, ta có thể giải được bằng cách đặt 2 ẩn phụ như sau:*

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 3(y+1)-(3y-x)=2\sqrt{(y+1)(3y-x)}.$

Đặt $a=\sqrt{y+1}>0,\ b=\sqrt{3y-x} \ge 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow 3a^2-b^2=2ab$ có dạng đẳng cấp với 2 biến a và $b.$ Ta có thể chia cho $a>0$ hoặc sử dụng casio để phân tích thành tích số: $(a-b)(3a+b)=0 \Leftrightarrow a=b \Rightarrow x=2y-1$ sẽ ngắn gọn hơn.

Ví dụ 448. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-12y+1}=\dfrac{1}{12}(x^2+17) & (1) \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y}{2}} & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Thực Hành Cao Nguyên – Đắk Lắk

Phân tích. *Nếu viết* $(1)\Leftrightarrow(x^2-12y+1)-8\sqrt{x^2-12y+1}+16=0$ *thì đây là phương trình bậc 2 với ẩn* $t=\sqrt{x^2-12y+1}\ge 0$. *Từ đó sẽ tìm được mối liên hệ giữa x và y và thế vào phương trình còn lại để tìm nghiệm và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x^2-12y+1\ge 0,\ \dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}\ge 0,\ y\ne 0.$

$(1)\Leftrightarrow(x^2-12y+1)-8\sqrt{x^2-12y+1}+16=0$ (3) và đặt $t=\sqrt{x^2-12y+1}\ge 0$ thì:

$(3)\Leftrightarrow t^2-8t+16=0\Leftrightarrow t=4,$ suy ra: $t=\sqrt{x^2-12y+1}=4\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2-15}{12}\cdot$

Thế $y=\dfrac{x^2-15}{12}$ vào $(2)\Leftrightarrow\dfrac{36x^2}{x^2-15}-12\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-15}(x^2+16x-15)}+x^2+16x-15=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+16x-15\ge 0 \\ \left(6\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-15}}-\sqrt{x^2+16x-15}\right)^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+16x-15\ge 0 \\ 6\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-15}}=\sqrt{x^2+16x-15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+16x-15\ge 0 \\ 36x^2=(x^2-15)(x^2+16x-15)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+16x-15\ge 0 \\ (x^2+2x-15)(x^2+18x-15)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\text{ hoặc } x=-9-4\sqrt{6}\Rightarrow y=\frac{81+36\sqrt{6}}{6}\cdot$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(3;-\dfrac{1}{2}\right);\left(-9-4\sqrt{6};\dfrac{81+36\sqrt{6}}{6}\right)\right\}.$

Lưu ý. *Ta có thể xuất phát từ phương trình (2) khi xem nó có dạng đẳng cấp bậc 2:*

$$(2)\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}\cdot\frac{4x}{6}+\frac{x^2}{8y}\cdot\frac{3y}{6}}=\frac{x^2}{8y}+\frac{4x}{6}+\frac{3y}{6}\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}\left(\frac{4x}{6}+\frac{3y}{6}\right)}=\frac{x^2}{8y}+\left(\frac{4x}{6}+\frac{3y}{6}\right)$$

Đặt $a=\dfrac{x^2}{8y}\ge 0;\ b=\dfrac{4x}{6}+\dfrac{3y}{6}\ge 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow a+b=2\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=4ab\Leftrightarrow(a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow\frac{x^2}{8y}=\frac{4x}{6}+\frac{3y}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-16xy-12y^2=0\Leftrightarrow(x-6y)(3x+2y)=0\Leftrightarrow x=6y\text{ hoặc } x=-\frac{2}{3}y.$$

2. Dạng 2. Đặt ẩn phụ dựa vào tính đẳng cấp của 1 phương trình

Ví dụ 449. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 & (1) \\ \dfrac{\sqrt[3]{x+6}}{4y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=4y+1 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Nhận thấy phương trình (1) của hệ là phương trình đẳng cấp với ẩn x, y. Khi đó ta có 2 hướng xử lý, một là chia trực tiếp cho lượng dương $x>0$. Hai là biến đổi và đưa về tích số, từ đó tìm được mối liên hệ giữa x, y và thế vào phương trình còn lại. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $xy\ge 0,\ x>1,\ y\ne\frac{1}{4}$, suy ra: $x>1,\ y\ge 0,\ y\ne\frac{1}{4}\cdot$

$$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}.\sqrt{y}-2(\sqrt{y})^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-2\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}-2\sqrt{y}=0,\ (\text{do}:\sqrt{x}+\sqrt{y}>0,\ \forall x>1,\ y\ge 0)\Leftrightarrow x=4y.$$

Thế $x=4y$ vào $(2)\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt[3]{x+6}}{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=x+1\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất $x=2$ nên sẽ ghép hằng số để liên hợp.

$$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+6}-2)+(\sqrt{x-1}-1)=x^2-4$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-(x-2)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-(x+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=\frac{1}{2}\ \text{hoặc}\ \frac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=x+2\qquad(3)$$

Với $x>1$ thì $\begin{cases} VT_{(3)}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1}=\dfrac{4}{3} \\ VP_{(3)}=x+2>1+2=3 \end{cases}$ nên (3) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(2;\frac{1}{2}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 450. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{y} & (1) \\ (1-\sqrt{x})(5y-4\sqrt{5y}+8)=4x^2 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Nhận thấy phương trình (1) có tính đẳng cấp nên có thể lũy thừa để khử dấu căn hoặc chia trực tiếp cho lượng $\sqrt{x}>0$ sau khi kiểm tra $x=0$ không là nghiệm.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x-y\ge 0.$

$(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{(x+y)(x-y)} = 2y \Leftrightarrow x - 2y + \sqrt{(x+y)(x-y)} = 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(x+y) + \dfrac{3}{2}(x-y) + \sqrt{(x+y)(x-y)} = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-y) - (x+y) + 2\sqrt{(x-y)(x+y)} = 0$ (3)

Đặt $a = \sqrt{x-y} \geq 0,\ b = \sqrt{x+y} \geq 0$ thì $(3) \Leftrightarrow 3a^2 + 2ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow (3a-b)(a+b) = 0$

- Với $b = 3a \Rightarrow \sqrt{x-y} = 3\sqrt{x+y} \Leftrightarrow x - y = 9x + 9y \Leftrightarrow 5y = 4x$ và thế vào (2) thì:

$(2) \Leftrightarrow (1-\sqrt{x})\cdot(x - 2\sqrt{x} + 2) = x^2 \Leftrightarrow (1-\sqrt{x})\cdot\left[x + 2(1-\sqrt{x})\right] = x^2$ (4)

Do $x = 1$ không là nghiệm nên chia hai vế cho $(1-\sqrt{x})^2$ ta được:

$(4) \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-\sqrt{x}} + 2 = \dfrac{x^2}{(1-\sqrt{x})^2}$ và đặt $t = \dfrac{x}{1-\sqrt{x}} \geq 0$ thì được $t^2 - t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2,$ suy ra: $\dfrac{x}{1-\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{x} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \dfrac{16 - 8\sqrt{3}}{5}\cdot$

- Với $a + b = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$: không thỏa mãn (2).

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(4 - 2\sqrt{3}; \dfrac{16-8\sqrt{3}}{5}\right)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Trong cách biến đổi sang (3), tôi đã sử dụng đồng nhất thức để biểu diễn $x - 2y$ theo 2 hạng tử $(x-y),\ (x+y)$ bằng cách viết $x - 2y = m(x-y) + n(x+y),$ rồi đồng nhất hệ số được $m = \dfrac{3}{2},\ n = -\dfrac{1}{2}$ như trên.*

Ví dụ 451. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2 = 4y\sqrt{y+1} & (1) \\ 22(y-1)^2 = (x^2+9)(x^2+9y) & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Nếu viết $(2) \Leftrightarrow 22(y-1)^2 = (x^2+9)\left[(x^2+9) + 9(y-1)\right]$ thì phương trình (2) có tính đẳng cấp bậc 2 với 2 ẩn $y - 1$ và $x^2 + 9$. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $y \geq -1$.

$(2) \Leftrightarrow 22(y-1)^2 = (x^2+9)\left[(x^2+9) + 9(y-1)\right]$ (3)

Đặt $a = y - 1,\ b = x^2 + 9 \geq 9$ thì $(3) \Leftrightarrow 22a^2 = b(b+9a) \Leftrightarrow 22a^2 - 9ab - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2a-b)(11a+b) = 0 \Leftrightarrow b = 2a$ hoặc $b = -11a.$

- Với $b = 2a,$ suy ra $x^2 = 2y - 11$ và thế vào $(1) \Leftrightarrow 4y\sqrt{y+1} = 2y - 13$ (4)

Đặt $t = \sqrt{y+1} \geq 0$ thì $(1) \Leftrightarrow 4t^3 - 2t^2 - 4t + 15 = 0$ (5)

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - 2t^2 - 4t + 15$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t) = 12t^2 - 4t - 4.$

Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6} \Rightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ do $t\geq 0.$ Từ đó có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0		$\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$		$+\infty$
$f'(t)$	(gạch chéo)		$-$	0	$+$	
$f(t)$	(gạch chéo)	15	$\searrow$	$\dfrac{386-13\sqrt{13}}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $f(t)=4t^3-2t^2-4t+15>\dfrac{386-13\sqrt{13}}{27}>0.$

Do đó phương trình (5) vô nghiệm khi $b=2a.$

- Với $b=-11a,$ suy ra: $x^2=2-11y$ và thế vào phương trình (2) được:

$(2)\Leftrightarrow -11y=4y\sqrt{y+1}\Leftrightarrow y(\sqrt{y+1}+11)=0\Leftrightarrow y=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(-\sqrt{2};0);(\sqrt{2};0)\right\}\cdot$

Ví dụ 452. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+2y^2+1}-y^2+y+1=0 & (1)\\ (x+y)(x+4y^2+y)+3y^4=0 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R}).$

Phân tích. *Nếu biến đổi* $(2)\Leftrightarrow(x+y)^2+4(x+y)y^2+3y^4=0$ *thì có dạng đẳng cấp bậc 2 với 2 biến* $a=x+y,\ b=y^2$*. Từ đó tìm được mối liên hệ x, y và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x+2y^2+1\geq 0.$ Đặt $a=x+y,\ b=y^2\geq 0.$

$(2)\Leftrightarrow a^2+4ab+3b^2=0\Leftrightarrow(a+b)(a+3b)=0\Leftrightarrow a=-b$ hoặc $a=-3b.$

- Với $a=-b,$ suy ra $x+y=-y^2\Leftrightarrow x=-y^2-y$ và thế vào phương trình (1):

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{y^2-y+1}-y^2+y+1=0\Leftrightarrow(y^2-y+1)-\sqrt{y^2-y+1}-2=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{y^2-y+1}=-1$ (loại) hoặc $\sqrt{y^2-y+1}=2\Leftrightarrow y^2-y-3=0$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x=-4-\sqrt{13}$ hoặc $y=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x=-4+\sqrt{13}.$

- Với $a=-3b,$ suy ra $x+y=-3y^2\Leftrightarrow x=-3y^2-y$ và thế vào phương trình (1):

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{-y^2-y+1}-y^2+y+1=0\Leftrightarrow y=-1\Rightarrow x=-2.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm $S=(x;y)=\left\{(-2;-1);\left(-4\pm\sqrt{13};\dfrac{1\mp\sqrt{13}}{2}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 453. Giải hệ: $\begin{cases}(x+6y+3)\sqrt{xy+3y}=y(8y+3x+9) & (1)\\ \sqrt{-x^2+8x-24y+417}=(y+3)\sqrt{y-1}+3y+17 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nếu viết* $(1) \Leftrightarrow \left[(x+3)+6y\right]\cdot\sqrt{y\cdot(x+3)} = y\cdot\left[8y+3(x+3)\right]$ *thì đây là phương trình đẳng cấp bậc 4 với 2 biến* $a=\sqrt{x+3},\ b=\sqrt{y}$ *và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} y\ge 1,\ x\ge -3 \\ -x^2+8x-24y+417\ge 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+3}\ge 0 \\ b=\sqrt{y}>1 \end{cases}$.

$$(1)\Leftrightarrow\left[(x+3)+6y\right]\sqrt{y(x+3)}=y\left[8y+3(x+3)\right]\Rightarrow(a^2+6b^2)ab=b^2(8b^2+3a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^3+6ab^2=8b^3+3a^2b,\ (do: b>1)\Leftrightarrow a^3-3a^2b+6ab^2-8b^3=0$$

$$\Leftrightarrow(a-2b)(a^2-ab+4b^2)=0\Leftrightarrow(a-2b)\left[\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{15b^2}{4}\right]=0\Leftrightarrow a=2b.$$

Với $a=2b,$ suy ra $\sqrt{x+3}=2\sqrt{y}\Leftrightarrow x=4y-3$ và thế vào phương trình (2) thì:

$$(2)\Leftrightarrow 4\sqrt{(y+4)(6-y)}=(y+3)\sqrt{y-1}+3y+17 \qquad (3)$$

Ta có: $\forall y\ge 1: \begin{cases} 4\sqrt{(y+4).(6-y)} \overset{\text{Cauchy}}{\le} 2.(y+4+6-y)=20 & (4) \\ (y+3)\sqrt{y-1}+3y+17\ge 3+17=20 & (5) \end{cases}$

Nghiệm của (3) là các giá trị làm cho dấu " = " ở (4), (5) xảy ra $\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=1.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(1;1)\right\}$.

Ví dụ 454. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 & (1) \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2} & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $y\ne 0,\ x+y\ne 0,\ \dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}\ge 0.$

$$(2)\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}\cdot\frac{4x}{6}+\frac{x^2}{8y}\cdot\frac{3y}{6}}=\frac{x^2}{8y}+\frac{4x}{6}+\frac{3y}{6}\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}\left(\frac{4x}{6}+\frac{3y}{6}\right)}=\frac{x^2}{8y}+\left(\frac{4x}{6}+\frac{3y}{6}\right)$$

Đặt $a=\dfrac{x^2}{8y}\ge 0;\ b=\dfrac{4x}{6}+\dfrac{3y}{6}\ge 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow a+b=2\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=4ab\Leftrightarrow(a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow 3x^2-16xy-12y^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x-6y)(3x+2y)=0\Leftrightarrow x=6y \text{ hoặc } 3x=-2y.$$

- Với $x=6y,$ thế vào $(1)\Leftrightarrow 37y^2+\dfrac{48}{7}y=16\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{7}\Rightarrow x=\dfrac{24}{7}$.
- Với $3x=-2y,$ thế vào $(1)\Leftrightarrow 13y^2-144y-144=0\Leftrightarrow y=12\Rightarrow x=-8.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(-8;12);\left(\dfrac{24}{7};\dfrac{4}{7}\right)\right\}$.

Ví dụ 455. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y(x^2+3)+4} - x\sqrt{y+1} = 1 & (1) \\ x^3 + x - 4 = 3\sqrt{y+1} & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Ta sẽ không làm gì được ở phương trình* (2), *khi đó ta sẽ xuất phát từ* $(1) \Leftrightarrow \left[\sqrt{y(x^2+3)+4}\right]^2 = \left(1 + x\sqrt{y+1}\right)^2 \Leftrightarrow y.(x^2+3)+4 = 1 + 2x\sqrt{y+1} + x^2(y+1)$

$\Leftrightarrow 3y + 3 = 2x\sqrt{y+1} + x^2 \Leftrightarrow 3(y+1) - 2x\sqrt{y+1} - x^2 = 0.$ *Đây là phương trình đẳng cấp bậc 2 với 2 ẩn* $a = \sqrt{y+1},\ b = x.$ *Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $y(x^2+3)+4 \ge 0,\ y \ge -1.$

Từ (2) có $\sqrt{y+1} \ge 0$ nên $x^3 + x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow x(x^2+1) \ge 4 \Rightarrow x > 0.$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{y(x^2+3)+4} = 1 + x\sqrt{y+1} \Leftrightarrow \left[\sqrt{y(x^2+3)+4}\right]^2 = \left(1 + x\sqrt{y+1}\right)^2$

$\Leftrightarrow y.(x^2+3)+4 = 1 + 2x\sqrt{y+1} + x^2(y+1) \Leftrightarrow 3y + 3 = 2x\sqrt{y+1} + x^2$

$\Leftrightarrow 3(y+1) - 2x\sqrt{y+1} - x^2 = 0 \qquad (3)$

Đặt $a = \sqrt{y+1} \ge 0,\ b = x > 0$ thì $(3) \Leftrightarrow 3a^2 - 2ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(3a+b) = 0$

$\Leftrightarrow a = b,\ (\text{do}: 3a + b > 0,\ \forall a \ge 0,\ b > 0).$

Với $a = b,$ suy ra: $\sqrt{y+1} = x$ và thế vào $(2) \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x; y) = \{(2; 3)\}$.

Ví dụ 456. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + (2-y)x + 4 = 0 & (1) \\ x\sqrt{2-y} + \sqrt{(x^2-1)(5-y)+4} = 1 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Phương trình* (1) *có dạng bậc 2 với ẩn x, nhưng khi kiểm tra biệt số delta không là số chính phương nên sẽ khó phân tích thành tích số. Lúc đó sẽ quan tâm đến phương trình* $(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x^2-1)(5-y)+4} = 1 - x\sqrt{2-y}$ *và lũy thừa lên. Nhưng khi lũy thừa sẽ phát sinh điều kiện, gây phức tạp và để khắc phục điều này ta sẽ tìm điều kiện cho x. Với* $2 - y \ge 0$ *thì* $(1) \Leftrightarrow x^2 + 4 = -x(2-y) \Rightarrow x < 0$ *và 2 vế đều dương nên sẽ lũy thừa lên, tức phương trình* $\Leftrightarrow (x^2-1)(5-y)+4 = 1 - 2x\sqrt{2-y} + x^2(2-y)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x\sqrt{2-y} - (2-y) = 0.$ *Đây là phương trình đẳng cấp bậc 2 với 2 ẩn* $a = x,$ $b = \sqrt{2-y}$ *và sẽ tìm được mối liên hệ giữa x, y, rồi thế vào* (1) *thì bài toán được giải.*

Lời giải. Điều kiện: $y \le 2,\ (x^2-1)(5-y)+4 \ge 0.$

Với $2 - y \ge 0$ thì $(1) \Leftrightarrow x^2 + 4 = -x(2-y) \Rightarrow x < 0.$ Khi đó:

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x^2-1)(5-y)+4} = 1 - x\sqrt{2-y} \Leftrightarrow \left[\sqrt{(x^2-1)(5-y)+4}\right]^2 = \left(1 - x\sqrt{2-y}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(5-y)+3=-2x\sqrt{2-y}+x^2(2-y)\Leftrightarrow 3x^2+2x\sqrt{2-y}-(2-y)=0$ (3)

Đặt $a=x<0,\ b=\sqrt{2-y}\ge 0$ thì (3) $\Leftrightarrow 3a^2+2ab-1=0\Leftrightarrow (a+b)(3a-b)=0$

$\Leftrightarrow a=-b$ hoặc $3a=b$: loại do $a<0,\ b\ge 0.$

Với $a=-b,$ suy ra: $\sqrt{2-y}=-x\Leftrightarrow 2-y=x^2$ và thế vào phương trình (1) thì:

(1) $\Leftrightarrow x^3+x^2+4=0\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x+2)=0\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow y=-2.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(-2;-2)\}$.

Ví dụ 457. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y & (1)\\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3 & (2)\end{cases}$

Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 407

Phân tích. *Nhận thấy phương trình (1) có tính đẳng cấp. Ngoài ra (1) còn mang tính chất đối xứng với 2 biến x, y nên ta có thể dự đoán được $x=y$. Hiển nhiên cũng giải được bằng phương pháp đánh giá bởi bất đẳng thức với điểm rơi $x=y$. Còn nếu sử dụng tính chất đẳng cấp cũng được giá trị $x=y$ và có các lời giải sau:*

Điều kiện: $\begin{cases}2xy+5x+3\ge 0\\ x+y\ge 0\end{cases}$. Do $x=y=0$ không là nghiệm của hệ nên ta chỉ xét trong điều kiện: $2xy+5x+3\ge 0,\ x+y>0.$

Lời giải 1. Sử dụng tính đẳng cấp của phương trình (1).

Chia 2 vế của phương trình (1) cho lượng $x+y>0,$ ta được:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}+\sqrt{\frac{(x^2+y^2)+(x+y)^2}{6(x+y)^2}}=1\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{6(x+y)^2}+\frac{1}{6}}=1$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}>0$ thì phương trình $\Leftrightarrow t+\sqrt{\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{1}{6}}=1\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{1}{6}}=1-t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t\le 1\\ 4t^2-12t+5=0\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Với $t=\dfrac{1}{2},$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)=(x+y)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2=x^2+2xy+y^2\Leftrightarrow (x-y)^2=0\Leftrightarrow x=y>0.$

Thế $x=y$ vào (2) $\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3$

$\Leftrightarrow 2x^2+5x+3+x\sqrt{2x^2+5x+3}-6x^2=0$ và đặt $a=\sqrt{2x^2+5x+3},\ b=x$ thì:

$\Leftrightarrow a^2+ab-6b^2=0\Leftrightarrow (a-2b)(a+3b)=0\Leftrightarrow a=2b$ hoặc $a=-3b.$

Với $a=2b,$ suy ra: $\sqrt{2x^2+5x+3}=2x\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=3.$

Với $a=-3b,$ suy ra: $\sqrt{2x^2+5x+3}=-3x$: vô nghiệm do $x>0.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Lời giải 2. Sử dụng bất đẳng thức với điểm rơi $x=y.$

Ta có: $$\begin{cases} \bullet\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}}\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\ge}\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{4}}=\dfrac{1}{2}(x+y) \\ \bullet\ \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=\sqrt{\dfrac{(x+y)^2-x.y}{3}}\overset{\text{Cauchy}}{\ge}\sqrt{\dfrac{(x+y)^2-\dfrac{(x+y)^2}{4}}{3}}=\dfrac{1}{2}(x+y) \end{cases}.$$

Suy ra: $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}\ge x+y$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y>0.$

Thế $x=y$ vào $(2)\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3$ (3)

Ngoài cách xử lý phương trình (3) bằng cách đưa về dạng đẳng cấp như lời giải 1, ta có thể sử dụng phương pháp liên hợp hoặc bình phương trực tiếp được phương trình bậc 4 khi biết trước được 1 nghiệm $x=3$.

Hướng 1. Ghép hằng số để liên hợp.

$$(3)\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3\Leftrightarrow x.(\sqrt{2x^2+5x+3}-6)=4x^2-11x-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(2x^2+5x-33)}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6}=4x^2-11x-3\Leftrightarrow\frac{x(x-3)(2x+11)}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6}=(x-3)(4x+1)$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\cdot\left[\frac{2x^2+11x}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6}-(4x+1)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3\Rightarrow y=6 \\ \dfrac{2x^2+11x}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6}=4x+1 \quad (4)\end{array}\right.$$

Do với điều kiện: $\begin{cases} 4x^2-5x-3\ge0 \\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{5+\sqrt{73}}{8}>1,$ thì:

$$(4)\Leftrightarrow2x^2+11x=(4x+1)(\sqrt{2x^2+5x+3}+6)=(4x+1)\left[\sqrt{2(x+1)^2+x+1}+6\right]$$

$$>(4x+1)\left[(x+1)+6\right]=(4x+1)(x+7)=4x^2+29x+7>2x^2+11x.$$

Suy ra phương trình (4) vô nghiệm.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Hướng 2. Lũy thừa trực tiếp.

$$(3)\Leftrightarrow\begin{cases} 4x^2-5x-3\ge0;\ x>0 \\ x^2(2x^2+5x+3)=(4x-5x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge\dfrac{5+\sqrt{73}}{8} \\ 14x^4-45x^3-2x^2+30x+9=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge\dfrac{5+\sqrt{73}}{8} \\ (x-3)(14x^3-3x^2-11x+3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=3 \\ y=6\end{cases}\cdot\ \text{Do } 14x^3-3x^2-11x+3>0.$$

3. <u>Dạng 3</u>. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình cơ bản

Trong phần này, ta sẽ tiếp cận một số kỹ thuật thường gặp sau:

★ Biến đổi 1 phương trình để phát hiện ra ẩn phụ dự kiến và dựa vào ẩn phụ dự kiến này để biến đổi phương trình còn lại.

★ Dựa vào định lý Viét để tìm ra phép đặt ẩn phụ.

★ Chia để xác định lượng ẩn phụ.

★ Liên hợp để phát hiện lượng ẩn phụ.

★ Dựa vào 1 số phép biến đổi đẳng thức cơ bản để xác định lượng ẩn phụ.

★ Đặt ẩn phụ dạng tổng – hiệu: $a = x + y,\ b = x - y$.

a) Biến đổi 1 phương trình để phát hiện ra ẩn phụ và dựa vào ẩn phụ này để biến đổi phương trình còn lại.

<u>Ví dụ 458.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 & (1) \\ 2x + y + \dfrac{1}{y} = 8 & (2) \end{cases}$ $(I)\quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Hải Phòng năm 2011

***<u>Phân tích</u>**. Nếu biến đổi* $(2) \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{y}\right) + (x + y - 3) = 5$ *thì giữa 2 phương trình có những hạng tử giống nhau và đặt* $a = \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} \ge 0,\ b = \sqrt{x + y - 3} \ge 0$ *sẽ đưa được về hệ đối xứng loại I và có lời giải chi tiết như sau:*

<u>*Lời giải*</u>. Điều kiện: $x + \dfrac{1}{y} \ge 0,\ x + y - 3 \ge 0,\ y \ne 0.$

Đặt $a = \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} \ge 0;\ b = \sqrt{x + y - 3} \ge 0$ thì hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ (a+b)^2 - 2ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} = 1 \\ \sqrt{x + y - 3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ -x^2 + 8x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 + \sqrt{10} \\ y = 3 - \sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 - \sqrt{10} \\ y = 3 + \sqrt{10} \end{cases} \end{array}\right.$.

- Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} = 2 \\ \sqrt{x + y - 3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm $S = (x; y) = \left\{(5; -1); (3; 1); (4 \pm \sqrt{10}; 3 \mp \sqrt{10})\right\}$.

Ví dụ 459. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)(y-1)(x+y-2)=6\\ x^2+y^2-2x-2y-3=0\end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Biến đổi hệ* $\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\cdot(y-1)\cdot[(x-1)+(y-1)]=6\\ (x-1)^2+(y-1)^2=5\end{cases}$ *và đặt* $\begin{cases}a=x-1\\ b=y-1\end{cases}$ *thì sẽ đưa được về hệ đối xứng loại I và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Đặt $a=x-1,\ b=y-1$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}ab(a+b)=6\\ a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab(a+b)=6\\ (a+b)^2-2ab=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2ab(a+b)=12\\ 2ab=(a+b)^2-5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2ab=(a+b)^2-5\\ (a+b)\left[(a+b)^2-5\right]=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2ab=(a+b)^2-5\\ (a+b)^3-5(a+b)-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ ab=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=1\\ y-1=2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x-1=2\\ y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(2;3);(3;2)\}$.

Ví dụ 460. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^4-4x^2+2y^2-6\sqrt{2}y=-9 & (1)\\ \sqrt{2}x^2y+x^2+2\sqrt{2}y=22 & (2)\end{cases}$ (I)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Mạc Đĩnh Chi – Tp. Hồ Chí Minh

Phân tích. *Nhận thấy* (1) *có thể viết được dưới dạng hằng đẳng thức theo x, y, tức:*

$$(1)\Leftrightarrow\left[(x^2)^2-4x^2+4)\right]+\left[(\sqrt{2}y)^2-2\sqrt{2}y.3+9\right]=4\Leftrightarrow(x^2-2)^2+(y\sqrt{2}-3)^2=4.$$

Từ đó, ta sẽ định hướng viết (2) *theo* $a=y\sqrt{2}-3,\ b=x^2-2$ *và có lời giải như sau:*

Lời giải. Hệ $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\left[(x^2)^2-4x^2+4)\right]+\left[(\sqrt{2}y)^2-2\sqrt{2}y.3+9\right]=4\\ y\sqrt{2}(x^2+2)+x^2=22\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-2)^2+(y\sqrt{2}-3)^2=4\\ \left[(y\sqrt{2}-3)+3\right]\cdot\left[(x^2-2)+4\right]+(x^2-2)=20\end{cases}\quad(II)$$

Đặt $\begin{cases}a=y\sqrt{2}-3\\ b=x^2-2\end{cases}$ thì hệ $(II)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\ (a+3)(b+4)+b=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=4\\ ab+4(a+b)=8\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ ab=0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a+b=-10\\ ab=48\end{cases}\text{ (loại do: }S^2\ge 4P)\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}.$$

- Với $\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$, suy ra: $\begin{cases}y\sqrt{2}-3=2\\ x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{2}\\ y=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} y\sqrt{2}-3=0 \\ x^2-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=\left(-2;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right), \left(2;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\pm\sqrt{2};\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right);\left(\pm 2;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 461. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x^3y-xy^2+xy-y=1 & (1) \\ x^4+y^2-xy(2x-1)=1 & (2) \end{cases} \quad (I) \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Nhận thấy (2) có dạng hằng đẳng thức:* $(2)\Leftrightarrow(x^4-2x^2y+y^2)+xy=1$ $\Leftrightarrow(x^2-y)^2+xy=1,$ *nên sẽ định hướng biến đổi phương trình (1) về 2 hạng tử này. Thật vậy:* $(1)\Leftrightarrow(x^2-y)+xy(x^2-y)+xy=1,$ *nên sẽ đặt* $a=x^2-y,\ b=xy.$

Lời giải. Hệ $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-y)+xy+xy.(x^2-y)=1 \\ (x^2-y)^2+xy=1\end{cases} \quad (II)$

Đặt $\begin{cases} a=x^2-y \\ b=xy \end{cases}$ thì $(II)\Leftrightarrow\begin{cases} a+b+ab=1 \\ a^2+b=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=1-a^2 \\ a+1-a^2+a(1-a^2)=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} b=1-a^2 \\ a^3+a^2-2a=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x^2-y=0 \\ xy=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x^2 \\ x^3=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.
- Với $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} y=x^2-1 \\ x(x^2-1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}\vee\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}\vee\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.
- Với $\begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x^2-y=-2 \\ xy=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x^2+2 \\ x(x^2+2)=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(0;-1);(\pm1;0);(1;1);(-1;3)\}$.

Ví dụ 462. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} & (1) \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} & (2) \end{cases} \quad (I)$

Đại học khối A năm 2008

Phân tích. *Nhận thấy (2) có dạng hằng đẳng thức, tức* $(2)\Leftrightarrow(x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4},$ *nên ta sẽ biến đổi phương trình (1) sao cho có chứa 2 hạng tử* $(x^2+y),\ xy.$ *Thật vậy*

$(1)\Leftrightarrow(x^2+y)+xy(x^2+y)+xy=-\dfrac{5}{4}$ *và đặt* $\begin{cases} a=x^2+y \\ b=xy \end{cases}$ *sẽ đưa về hệ cơ bản.*

Lời giải. Hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y)+xy+xy(x^2+y)=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \quad (II)$

Đặt $\begin{cases} a=x^2+y \\ b=xy \end{cases}$ thì hệ $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 4(a+b+ab)=-5 \\ a^2+b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{5}{4}-a^2 \\ 4(a^3+a^2+a)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \Rightarrow y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \\ x=1 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{\left(1;-\dfrac{3}{2}\right);\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right)\right\}$.

Ví dụ 463. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+3x^2+3y^2+3(x-y)=5 & (1) \\ (x+1)(y-1)(x-y+2)=2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Nhận thấy* (1) *có dạng hằng đẳng thức* $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$, *nên sẽ viết* $(1) \Leftrightarrow (x^3+3x^2+3x+1)-(y^3-3y^2+3y-1)=7 \Leftrightarrow (x+1)^3-(y-1)^3=7$. *Dựa vào 2 hạng tử này để biến đổi* $(2) \Leftrightarrow (x+1)\cdot(y-1)\cdot\left[(x+1)-(y-1)\right]=2$ *và đặt 2 ẩn phụ* $a=x+1,\ b=y-1$ *sẽ đưa được về hệ cơ bản và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Ta có hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3-(y-1)^3=7 \\ (x+1)\cdot(y-1)\cdot\left[(x+1)-(y-1)\right]=2 \end{cases} \quad (II)$

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=y-1 \end{cases}$ thì hệ $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-b^3=7 \\ ab(a-b)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+t^3=7 \\ at(a+t)=-2 \end{cases}$ với $b=-t$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+t)^3-3at(a+t)=7 \\ at(a+t)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+t)^3=1 \\ at(a+t)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+t=1 \\ at=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ t=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ t=2 \end{cases}.$$

Do đó: $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(1;2);(-2;-1)\}$.

Ví dụ 464. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+xy+2x-12y-24=0 & (1) \\ x^3-y^3=2(x^2+y^2+xy)+3(x-y-2) & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Đồng Nai năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy* (2) *có dạng hằng đẳng thức:* $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$, *nếu đặt* $a = x^2 + xy + y^2$, $b = x - y$ *thì* $a.b = a^3 - b^3$ *và* $(2) \Leftrightarrow ab = 2a + 3(b-2)$, $(*)$. *Từ đó sẽ định hướng biến đổi* (1) *về 2 hạng tử* a, b *nhưng sẽ không biểu diễn được. Nếu quan sát kỹ thì phương trình* $(*)$ *luôn đúng khi* $b = 2$ *nên có rất nhiều khả năng đưa được phương trình này về dạng tích số. Thật vậy, có:* $(*) \Leftrightarrow ab - 2a - 3(b-2) = 0$ $\Leftrightarrow a(b-2) - 3(b-2) = 0 \Leftrightarrow (b-2)(a-3) = 0 \Leftrightarrow a = 3$ *hoặc* $b = 2$.

Lời giải. Đặt $a = x^2 + xy + y^2 \ge 0$, $b = x - y$ thì $(2) \Leftrightarrow ab = 2a + 3(b-2)$
$\Leftrightarrow a(b-2) - 3(b-2) = 0 \Leftrightarrow (b-2)(a-3) = 0 \Leftrightarrow a = 3$ hoặc $b = 2$.

- Với $b = 2$, suy ra: $y = x - 2$ và thế vào $(1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}.$$

- Với $a = 3$ và kết hợp với (1) được hệ: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2y + xy + 2x - 12y - 24 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y\cdot x + (y^2 - 3) = 0 & (3) \\ y\cdot x^2 + (y+2)\cdot x - (12y + 24) = 0 & (4) \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm thì biệt số delta theo ẩn x ở (3), (4) phải không âm.

Nghĩa là: $\begin{cases} \Delta_{x(3)} = y^2 - 4y^2 + 12 = 12 - 3y^2 \ge 0 \Rightarrow y \in [-2;2] \\ \Delta_{x(4)} = 49y^2 + 100y + 4 \ge 0 \Rightarrow y \in (-\infty;-2] \cup \left[-\dfrac{2}{49};+\infty\right) \end{cases}$.

Khi đó để hệ có nghiệm thì 2 miền giá trị của y ở trên phải giao thoa nhau.

Tức: $y = -2$ hoặc $y \in \left[-\dfrac{2}{49};2\right]$.

Với $y = -2$ thì $(3) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$: không thỏa hệ nên loại $y = -2$.

Với $y \in \left[-\dfrac{2}{29};2\right]$ và $(1) \Rightarrow y = \dfrac{-2x + 24}{x^2 + x - 12} \in \left[-\dfrac{2}{49};2\right] \Leftrightarrow -\dfrac{2}{49} \le \dfrac{-2x + 24}{x^2 + x - 12} \le 2$

Suy ra: $x \in (-\infty;-6] \cup (4;+\infty)$ (5)

Mặt khác: $x^2 + xy + y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 + x\cdot y + x^2 - 3 = 0$ có biệt số delta:

$\Delta_y = x^2 - 4x^2 + 12 = 12 - 3x^2 \ge 0 \Rightarrow x \in [-2;2]$ (6)

Từ $(5),(6) \Rightarrow$ hai miền giá trị của $x \in \varnothing$ nên hệ vô nghiệm khi $y \in \left[-\dfrac{2}{29};2\right]$.

Do đó hệ vô nghiệm khi $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Kết luận: Tập nghiệm hệ phương trình là $S = (x;y) = \{(-3;-5);(0;-2);(4;2)\}$.

Ví dụ 465. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x-1)\sqrt{x+y}=(6-x-y)\sqrt{2-x} & (1)\\ 2\sqrt[3]{12x^2+3xy-18x}=x^3-6x-y+5 & (2)\end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Bắc Ninh năm 2014

Phân tích*. Giữa các biến và cụm biến giữa 2 phương trình không có mối liên hệ gì với nhau nên sẽ nghĩ đến việc biến đổi 1 phương trình. Nhận thấy phương trình* (1) *có chứa 2 căn thức nên sẽ đặt* $\begin{cases}a=\sqrt{x+y}\\ b=\sqrt{2-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=x+y\\ b^2=2-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6-x-y=6-a^2\\ 2x-1=3-2b^2\end{cases}$ *và* (1) *sẽ được viết lại là* $(3-2b^2).a=(6-a^2).b,\ (*)$. *Nhận thấy phương trình* $(*)$ *luôn đúng khi* $a=2b$ *nên sẽ định hướng biến đổi về tích số và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x\le 2\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+y}\ge 0\\ b=\sqrt{2-x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6-x-y=6-a^2\\ 2x-1=3-2b^2\end{cases}$.

$$(1)\Leftrightarrow(3-2b^2).a=(6-a^2).b\Leftrightarrow(3a-6b)+(a^2b-2ab^2)=0$$
$$\Leftrightarrow 3(a-2b)+ab(a-2b)=0\Leftrightarrow(a-2b)(3+ab)=0\Leftrightarrow a=2b,\ (\text{do}: 3+ab>0).$$

Với $a=2b$, suy ra $\sqrt{x+y}=2\sqrt{2-x}\Leftrightarrow y=8-5x$ và thế vào (2) thì:

$$(2)\Leftrightarrow 2.\sqrt[3]{6x-3x^2}=x^3-x-3\Leftrightarrow 6x-3x^2+2.\sqrt[3]{6x-3x^2}=x^3-3x^2+5x-3$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{6x-3x^2})^3+2.\sqrt[3]{6x-3x^2}=(x-1)^3+2.(x-1)\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{6x-3x^2})=f(x-1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt[3]{6x-3x^2})=f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{6x-3x^2}=x-1\Leftrightarrow x^3-3x=1$ (3)

Xét $-2\le x\le 2$ và đặt $x=2\cos t$ thì $t\in[0;\pi]$. Khi đó:

$$(3)\Leftrightarrow 8\cos^3 t-6\cos t=1\Leftrightarrow 4\cos^3 t-3\cos t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 3t=\cos\frac{\pi}{3}$$

$\Leftrightarrow t=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}$ và do $t\in[0;\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$ nên $t\in\left\{\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}$. Suy ra:

$$(x;y)=\left(2\cos\frac{\pi}{9};8-10\cos\frac{\pi}{9}\right),\left(2\cos\frac{5\pi}{9};8-10\cos\frac{5\pi}{9}\right),\left(2\cos\frac{7\pi}{9};8-10\cos\frac{7\pi}{9}\right).$$

Ví dụ 466. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)^2=1-x^2y^2 & (1)\\ x(xy+y+1)=y(xy+1)+1 & (2)\end{cases}\quad(I)$

Phân tích*. Nhận thấy* (1) *có chứa 2 hạng tử* $(x-y)$ *và* xy *nên sẽ định hướng biến đổi phương trình* (2) *về 2 hạng tử này, tức có:* $(2)\Leftrightarrow x\left[(xy+1)+y\right]-y(xy+1)=1$ $\Leftrightarrow\left[x(xy+1)-y(xy+1)\right]+xy=1\Leftrightarrow(xy+1)(x-y)+xy=1$ *và đặt* $a=x-y,\ b=xy$ *sẽ đưa về hệ đơn giản hơn và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1 - x^2y^2 \\ x\left[(xy+1)+y\right] - y(xy+1) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1 - x^2y^2 \\ \left[x(xy+1) - y(xy+1)\right] + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + x^2y^2 = 1 \\ (xy+1)(x-y) + xy = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Đặt $\begin{cases} a = x - y \\ b = xy \end{cases}$ thì $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (b+1)a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 1 \\ ab + a + b = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 - (a+b) \\ (a+b)^2 + 2(a+b) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a+b = -3 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} x-y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(0;-1);(1;0);(1;1);(-1;-1)\right\}\cdot$

Ví dụ 467. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5 & (1) \\ (xy-1)^2 = x^2 - y^2 + 2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Học sinh giỏi tỉnh Nghệ An năm 2013

Phân tích. *Từ* (1) *có các biến đổi :* $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 & (i) \\ y^2 + \dfrac{1}{y^2} = \left(y + \dfrac{1}{y}\right)^2 - 2 = \left(y - \dfrac{1}{y}\right)^2 + 2 & (ii) \end{cases}$ *và* *vấn đề ở đây ta cần chọn biểu thức nào cho phù hợp để đặt ẩn phụ. Khi đó quan tâm đến phương trình* (2) *để chọn ẩn phụ phù hợp, hiển nhiên có sự biến đổi và cần có phép chia. Nghĩa là:* $(2) \Leftrightarrow x^2y^2 - 2xy + 1 = x^2 - y^2 + 2 \Leftrightarrow (x^2y^2 + y^2) - (x^2+1) = 2xy$ $\Leftrightarrow y^2(x^2+1) - (x^2+1) = 2xy \Leftrightarrow (x^2+1)(y^2-1) = 2xy$ *và thực hiện phép chia 2 vế cho lượng* $xy \neq 0$, *thì* $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(y - \dfrac{1}{y}\right) = 2$ *nên sẽ chọn phép biến đổi ở* (i), (ii) *hợp lý.*

Lời giải. Hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{y}\right)^2 = 5 \\ (x^2+1)(y^2-1) = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{y}\right)^2 = 5 \\ \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(y - \dfrac{1}{y}\right) = 2 \end{cases} \quad (II)$

Đặt $a = x + \dfrac{1}{x}; b = y - \dfrac{1}{y}$, $\left(|a| \geq 2\right)$ thì hệ $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 5 \\ ab = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 9 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a+b=-3 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y-\dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$

- Với $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=-2 \\ y-\dfrac{1}{y}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(1;\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right);\left(-1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$

Ví dụ 468. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{4x+y}+\sqrt{2x+y}=2 \\ \sqrt{2x+y}+x+y=1 \end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Nam Định năm 2012

Phân tích. *Bản chất bài toán chỉ chứa 2 căn* $\sqrt{4x+y},\sqrt{2x+y}$. *Nếu đặt* $a=\sqrt{4x+y}$, $b=\sqrt{2x+y}$ *và biểu thức chứa biến còn lại* $x+y$ *biểu diễn được theo a, b thì bài toán được giải quyết. Thật vậy:* $x+y=m.(4x+y)+n.(2x+y)=(4m+2n).x+(\alpha+\beta).y$ *và đồng nhất hệ số được hệ* $\begin{cases} 4m+2n=1 \\ m+n=1 \end{cases} \Rightarrow m=-\dfrac{1}{2};\ n=\dfrac{3}{2}$, *tức* $x+y=-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}b^2$.

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{4x+y}\ge 0,\ b=\sqrt{2x+y}\ge 0$ thì:

$$(I)\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-a \\ a^2-5a+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\ b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Suy ra: $\begin{cases} 2\sqrt{4x+y}=5-\sqrt{5} \\ 2\sqrt{2x+y}=\sqrt{5}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x+4y=30-10\sqrt{5} \\ 8x+4y=6-2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-\sqrt{5} \\ y=\dfrac{3\sqrt{5}-9}{2} \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(3-\sqrt{5};\dfrac{3\sqrt{5}-9}{2}\right)\right\}.$

Ví dụ 469. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{5x+y}+\sqrt{2x+y}=3 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=1 \end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Nghệ An năm 2014

Phân tích. *Tương tự như ví dụ trên, ta cần phân tích* $x-y=m.(5x+y)+n.(2x+y)$ $=(5m+2n).x+(m+n).y$ *và đồng nhất hệ số được hệ* $\begin{cases}5m+2n=1\\ m+n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\ n=-2\end{cases}$. *Do đó sẽ viết* $x-y=a^2-2b^2$ *nếu đặt* $a=\sqrt{5x+y}$, $b=\sqrt{2x+y}$ *và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{5x+y}\ge 0,\ b=\sqrt{2x+y}\ge 0.$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ b+a^2-2b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-a\\ a^2-11a+16=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{11-\sqrt{57}}{2}>0,\ b=\frac{\sqrt{57}-5}{2}>0.$$

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{5x+y}=\dfrac{11-\sqrt{57}}{2}\\ \sqrt{2x+y}=\dfrac{\sqrt{57}-5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+y=\dfrac{89-11\sqrt{57}}{2}\\ 2x+y=\dfrac{41-5\sqrt{57}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8-\sqrt{57}\\ y=\dfrac{9-\sqrt{57}}{2}\end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(8-\sqrt{57};\dfrac{9-\sqrt{57}}{2}\right)\right\}.$

Ví dụ 470. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{7x+y}-\sqrt{2x+y}=4\\ 2\sqrt{2x+y}-\sqrt{5x+8}=2\end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Thái Nguyên năm 2014

Phân tích. *Về hình thức thì bài này cũng giống như các bài trên nhưng đơn giản hơn do dễ dàng nhìn thấy* $(7x+y)-(2x+y)=a^2-b^2=5x$ *và có cách giải 1. Vì có mối quan hệ này nên ta có thể đặt 3 ẩn và có lời giải 2.*

Lời giải 1. Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{7x+y}\ge 0\\ b=\sqrt{2x+y}\ge 0\end{cases}$ thì $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=4\\ 2b-\sqrt{a^2-b^2+8}=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+4\\ \sqrt{2b+6}=b-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge 1,\ a=b+4\\ b^2-4b-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\ a=9\end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{7x+y}=9\\ \sqrt{2x+y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+y=81\\ 2x+y=25\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)=\left(\dfrac{56}{5};\dfrac{13}{5}\right).$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{56}{5};\dfrac{13}{5}\right)\right\}.$

Lời giải 2. Đặt: $a=\sqrt{7x+y}\ge 0;\ b=\sqrt{2x+y}\ge 0;\ c=\sqrt{5x+8}\ge 0.$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=4\\ 2b-c=2\\ a^2-b^2+8=c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\ b=5\\ c=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{7x+y}=3\\ \sqrt{2x+y}=5\\ \sqrt{5x+8}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{56}{5}\\ y=\dfrac{13}{5}\end{cases}.$$

Kết luận: Nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\frac{56}{5};\frac{13}{5}\right)$.

Ví dụ 471. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{3x-2y}=2\\ 2\sqrt[3]{3x-2y}+5x+y=8\end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Xét* $5x+y=m.(2x-y)+n.(3x-2y)=(2m+3n).x+(-m-2n).y$ *và đồng nhất hệ số được hệ phương trình:* $\begin{cases}2m+3n=5\\ -m-2n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=13\\ n=-7\end{cases}$. *Khi đó sẽ viết biểu thức:*

$5x+y=13(2x-y)-7(3x-2y)=13a^3-7b^3$ *nếu đặt* $a=\sqrt[3]{2x-y}$, $b=\sqrt[3]{3x-2y}$. *Từ đó ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Đặt: $a=\sqrt[3]{2x-y}$, $b=\sqrt[3]{3x-2y}$. Khi đó: $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ 2b+13a^3-7b^3=8\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\ 10a^3-21a^2+41a-30=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\ (a-1)(10a^2-11a+30)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt[3]{2x-y}=1\\ \sqrt[3]{3x-2y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=1\\ 3x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(1;1)\}$.

Ví dụ 472. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(\frac{2x}{y^2}-1\right)\left(\frac{y}{x^2}-9\right)=18 & (1)\\ \sqrt{9x+\frac{y}{x}}+2\sqrt{y+\frac{2x}{y}}=4 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Bài toán có chứa 2 căn thức nên ta sẽ đặt a, b là hai căn thức. Vấn đề đặt ra là phải phân tích biểu thức ở phương trình một theo biểu thức trong hai căn thức. Với ý tưởng đó, ta sẽ tiến hành vào lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x\neq 0,\ y\neq 0\\ 9x+\frac{y}{x}\geq 0,\ y+\frac{2x}{y}\geq 0\end{cases}$.

$$(1)\Leftrightarrow(2x-y^2)(y-9x^2)=18x^2y^2\Leftrightarrow 2xy-18x^3-y^3=9x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow 2xy=9x^2y^2+18x^3+y^3\Leftrightarrow 9xy+\frac{18x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+2=4$$

$$\Leftrightarrow 9x\left(y+\frac{2x}{y}\right)+\frac{y}{x}\left(y+\frac{2x}{y}\right)=4\Leftrightarrow\left(y+\frac{2x}{y}\right)\left(9x+\frac{y}{x}\right)=4 \quad (3)$$

Đặt $a=\sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}>0,\ b=\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}>0$ thì từ $(2),(3)$ được hệ $\begin{cases}a+2b=4\\a^2b^2=4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b=4\\ab=2,\ \text{do}: ab>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\cdot \text{ Suy ra: }\begin{cases}\sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}=2\\\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x^2+y=4x\\y^2+2x=y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=4x-9x^2\\(4x-9x^2)^2+2x=4x-9x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4x-9x^2\\81x^3-72x^2+25x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{9}\Rightarrow y=\frac{1}{3}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm của hệ là $\mathrm{S}=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3}\right)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Qua các ví dụ trên, ta nhận ra rằng đối với hệ phương trình mà chỉ có chứa 2 căn thức, thường sẽ đặt a, b là 2 căn đó và biểu diễn lượng biến còn lại theo 2 căn.*

Ví dụ 473. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x-y+2)(2x+y)+6x-3y+6=0\\\sqrt{2x+1}+\sqrt{y-1}=4\end{cases}\qquad (I)$

Phân tích. *Hệ có hai căn thức* $\sqrt{2x+1},\ \sqrt{y-1}$, *nếu đặt a, b lần lượt là hai căn thì các biến còn lại đều biểu diễn được hết theo 2 đại lượng* a^2, b^2.

Thật vậy: $\begin{cases}a=\sqrt{2x+1}\\b=\sqrt{y-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=2x+1\\b^2=y-1\end{cases}\xrightarrow[-]{+}\begin{cases}a^2+b^2=2x+y\\a^2-b^2=2x-y+2\end{cases}$ *và nếu biến đổi cụm* $6x-3y=3(2x-y+2)=3(a^2-b^2)$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{2},\ y\ge1$. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{2x+1}\ge0\\b=\sqrt{y-1}\ge0\end{cases}$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(a^2-b^2)(a^2+b^2)+3(a^2-b^2)=0\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a^2-b^2)(a^2+b^2+3)=0\\a+b=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)(a+b)=0\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=0\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{2x+1}=2\\\sqrt{y-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1=4\\y-1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=5\end{cases}$: thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{3}{2};5\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 474. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3y+xy=5+x & (1)\\x^2(x^4y^2-y^2+2y)=5+x^2 & (2)\end{cases}\qquad (I)$

Phân tích. *Nếu biến đổi* $(1) \Leftrightarrow x^3y + xy - x = 5$ *có xuất hiện 2 hạng tử* x^3y, $(xy - x)$ *nên sẽ định hướng biến đổi* (2) *theo 2 hạng tử này và kết thúc bằng việc đặt ẩn phụ. Thật vậy:* $(2) \Leftrightarrow x^6y^2 - x^2y^2 + 2xy.x - x^2 = 5 \Leftrightarrow (x^3y)^2 - (xy - x)^2 = 5.$ *Từ các phân tích này ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3y + (xy - x) = 5 \\ (x^3y)^2 - (xy - x)^2 = 5 \end{cases}$ (II). Đặt $\begin{cases} a = x^3y \\ b = xy - x \end{cases}$ thì:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 - b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ (a - b)(a + b) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} x^3y = 3 \\ xy - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{x^3},\ (x \neq 0) \\ x^3 + 2x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S = (x; y) = \{(1; 3)\}$.

Ví dụ 475. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2 + x)(y^2 + y) = 1 & (1) \\ x^2(y^2 + 1) + 2y(x^2 + x + 1) = 3 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Xuất phát từ (1) có 2 hạng tử ở dạng tích số, nhưng 2 hạng tử tích này độc lập x và y với nhau, còn ở (2) thì chứa dạng tổng mà có dạng* x^ny^m *nên sẽ biến đổi* $(1) \Leftrightarrow x(x + 1)y(y + 1) = 1 \Leftrightarrow y(x + 1).x(y + 1) = 1 \Leftrightarrow (xy + y).(xy + x) = 1,$ *có hạng tử dạng* x^ny^m. *Viết (2) dạng hằng đẳng thức:* $(2) \Leftrightarrow (x^2y^2 + 2x^2y + x^2) + 2xy + 2y = 3$ $\Leftrightarrow (xy + x)^2 + 2(xy + y) = 3.$ *Đã có những hạng tử giống nhau ở 2 phương trình.*

Lời giải. Hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + 1)(y + 1) = 1 \\ (x^2y^2 + x^2 + 2x^2y) + 2xy + 2y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy + y)(xy + x) = 1 \\ (xy + x)^2 + 2(xy + y) = 3 \end{cases}$ (II). Đặt $\begin{cases} a = xy + y \\ b = xy + x \end{cases}$ thì hệ $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ b^2 + 2a = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{a},\ (a \neq 0) \\ 2a^3 - 3a^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} xy + y = -\dfrac{1}{2} \\ xy + x = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} xy + y = 1 \\ xy + x = 1 \end{cases}$ và giải các hệ tìm được: $\begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x; y) = \left\{\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$

Ví dụ 476. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{y-1}=6 & (1) \\ \sqrt{x^2+2x+y}+2(x+1)\sqrt{y-1}=29 & (2) \end{cases} \quad (I)$

***Phân tích**. Nếu rút x theo y từ (1) và thế vào (2) thì sẽ được phương trình khá phức tạp. Nếu biến đổi $(2)\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+y-1}+2(x+1)\sqrt{y-1}=29$ sẽ xuất hiện 2 cụm ẩn $a=x+1,\ b=\sqrt{y-1}.$ Từ đó định hướng biến đổi $(1)\Leftrightarrow(x+1)+\sqrt{y-1}=7$ và đặt ẩn phụ sẽ đưa về hệ cơ bản. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $y\ge 1,\ x^2+2x+y\ge 0,\ x\le 6.$ Khi đó:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} x+1+\sqrt{y-1}=7 \\ \sqrt{(x+1)^2+y-1}+2(x+1)\sqrt{y-1}=29 \end{cases}\ (II).\ \text{Đặt } \begin{cases} a=x+1 \\ b=\sqrt{y-1}\ge 0 \end{cases} \text{ thì:}$$

$$(II)\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=7 \\ \sqrt{a^2+b^2}+2ab=29 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=7 \\ \sqrt{(a+b)^2-2ab}=29-2ab \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=7 \\ \sqrt{49-2ab}=29-2ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=7,\ \ 2ab\le 29 \\ 4(ab)^2-114(ab)+841=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} x+1=3 \\ \sqrt{y-1}=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+1=4 \\ \sqrt{y-1}=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=17 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=10 \end{cases}.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(2;17);(3;10)\right\}\cdot$

Ví dụ 477. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=2 \\ 4\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=7y \end{cases} \quad (I)$

***Phân tích**. Bài toán có dạng tổng quát là* $\begin{cases} a_1x+b_1\sqrt{a^2x^2+b}+c_1y+d_1\sqrt{c^2y^2+d}=e \\ a_2x+b_2\sqrt{a^2x^2+b}+c_2y+d_2\sqrt{c^2y^2+d}=f \end{cases}.$

Phương pháp giải là đặt $\begin{cases} u=ax+\sqrt{a^2x^2+b} \\ v=cy+\sqrt{c^2y^2+d} \end{cases}$*, suy ra x, y và các căn thức theo u, v.*

Lời giải. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\le-\sqrt{7} \\ x\ge\sqrt{7} \end{array}\right.\cdot$ Đặt $\begin{cases} u=x+\sqrt{x^2-7} \\ v=y+\sqrt{y^2+24} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u-x=\sqrt{x^2-7} \\ v-y=\sqrt{y^2+24} \end{cases}.$

$$\Rightarrow\begin{cases} u^2-2ux+x^2=x^2-7 \\ v^2-2vy+y^2=y^2+24 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u^2-2ux=-7 \\ v^2-2vy=24 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{u^2+7}{2u},\ y=\frac{v^2-24}{2v}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2-7}=u-x=u-\frac{u^2+7}{2u}=\frac{u^2-7}{2u} \text{ và } \sqrt{y^2+24}=v-y=v-\frac{v^2-24}{2v}=\frac{v^2+24}{2v}\cdot$$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}u-\dfrac{v^2+24}{2v}=2\\4\cdot\dfrac{u^2-7}{2u}-\dfrac{v^2+24}{2v}=7\cdot\dfrac{v^2-24}{2v}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{v^2+4v+24}{2v}\\2\cdot\dfrac{u^2-7}{u}=\dfrac{4v^2-72}{v}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{v^2+4v+24}{2v}\\(v-6)(3v^3+26v^2+144v+384)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=7\\v=6\end{cases}\text{ (do } v=y+\sqrt{y^2+24}>0).$$

Suy ra: $x=\dfrac{u^2+7}{2u}=4,\ y=\dfrac{v^2-24}{2v}=1$: thỏa điều kiện. Vậy $S=(x;y)=\{(4;1)\}\cdot$

b) Dựa vào định lý Viét để tìm ra phép đặt ẩn phụ

*Ý tưởng bài toán dựa vào nội dung của định lý Viét như sau: "Nếu tồn tại 2 số a, b thỏa: $a+b=S,\ ab=P$ thì $a,\ b$ là nghiệm của phương trình: $X^2-SX+P=0$". Khi đó, đề bài thường cho $a,\ b$ bằng một biểu thức theo hai biến $x,\ y$ và đôi khi cả $S,\ P$ cũng là biểu thức chứa $x,\ y$. Từ đó dễ thấy dấu hiệu nhận dạng bài toán là: **một phương trình có dạng tổng, một phương trình có dạng tích hoặc dạng tổng mà phân tích được thành tích số**. Công việc lúc này là ta cần biến đổi để chọn biểu thức nào là a, biểu thức nào là b nhằm chọn ẩn phụ phù hợp.*

Ví dụ 478. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+xy+y=8 & (1)\\xy(y^2+xy+x+y)=12 & (2)\end{cases}\quad(I)$

Học sinh giỏi tỉnh Long An năm 2013

***Phân tích**. Nhận thấy 2 phương trình đều có dạng bậc 2 với ẩn x nhưng biệt số delta không là số chính phương nên sẽ không phân tích được thành tích số. Quan sát kỹ hơn, ta thấy các biến trong hệ liên hệ với nhau khá chặt chẽ và hằng số có vẻ như đứng ngoài cuộc. Vì vậy sẽ tập trung vào phân tích ở vế trái của 2 phương trình nhằm đưa 2 vế này về dạng tổng và tích của hai biểu thức x, y và vận dụng nội dung của định lý Viét. Thật vậy, vế trái (1) có thể viết về tổng: $VT_{(1)}=x(x+y)+y(y+1).$ Khi đó cần dựa vào 2 hạng tử tổng này để viết: $VT_{(2)}=xy.\left[y(x+y)+(x+y)\right]=x(x+y).y(y+1).$ Từ đó đã tìm ra phép đặt ẩn phụ: $a=x(x+y),\ b=y(y+1)$ và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Có $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+xy)+(y^2+y)=8\\xy.\left[y(x+y)+(x+y)\right]=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+y)+y(y+1)=8\\x(x+y).y(y+1)=12\end{cases}\ (II)$

Đặt $\begin{cases}a=x(x+y)\\b=y(y+1)\end{cases}$ thì $(II)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=8\\ab=12\end{cases}$ và theo Viét thì $a,\ b$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2-8X+12=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=6\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}\cdot$

- Với $\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x(x+y)=6 \\ y(y+1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1\pm\sqrt{7} \\ y=-2 \end{cases}$.
- Với $\begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x(x+y)=2 \\ y(y+1)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1\pm\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=-3 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases}$.

Kết luận: $S=(x;y)=\left\{(2;1);(-3;1);(1\pm\sqrt{17};-2);(-1\pm\sqrt{3};2);\left(\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2};-3\right)\right\}$.

Nhận xét. *Bản chất của việc làm này là phân tích 1 phương trình nhưng vẫn liên hệ với phương trình còn lại để tìm ra phép đặt ẩn phụ dựa vào nội dung định lý Viét.*

Ví dụ 479. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+xy+y=5 & (1) \\ x^4+x^3y+x^2(y+1)+xy+y=9 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Nhận thấy (1) là tam thức bậc hai, nhưng delta không là số chính phương nên sẽ không phân tích được thành tích số. Nếu vận dụng nội dung của định lý Viét để tìm ra phép đặt ẩn phụ, các bạn hãy ngẫm lại rằng: bậc của tích ab thường sẽ lớn hơn bậc của tổng* $a+b$*. Do 2 phương trình trong hệ đều có dạng tổng và bậc của (2) lớn hơn bậc của (1) nên dựa vào ý tưởng trên, ta sẽ phân tích vế trái (2) thành tích số và vế trái của (1) thành tổng. Thật vậy:* $VT_{(2)}=x^4+x^3y+x^2(y+1)+xy+y$

$=(x^4+x^3y)+(x^2y+y)+(x^2+xy)=x^3(x+y)+x(x+y)+y(x^2+1)$

$=x(x+y)(x^2+1)+y(x^2+1)=(x^2+1)\left[x(x+y)+y\right]=(x^2+1)(x^2+xy+y).$ *Khi đó ta cần viết* (1) *sao cho có tổng của 2 hạng tử này, tức:* $(1)\Leftrightarrow(x^2+1)+(x^2+xy+y)=6.$

Lời giải. Ta có: $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+1)+(x^2+xy+y)=6 \\ (x^2+1).(x^2+xy+y)=9\end{cases}$ theo định lý Viét thì:

(x^2+1), (x^2+xy+y) là hai nghiệm của phương trình $X^2-6X+9=0$

$\Leftrightarrow (X-3)^2=0 \Leftrightarrow X=3 \Rightarrow \begin{cases} x^2+1=3 \\ x^2+xy+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2}-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-1-\sqrt{2} \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(\sqrt{2};\sqrt{2}-1);(-\sqrt{2};-1-\sqrt{2})\right\}$.

Ví dụ 480. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2+x+\dfrac{y^3}{x+1}=2 & (1) \\ 2x+y+\dfrac{y^2}{x+1}=2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Chọn HSG cấp trường năm 2014 – 2015, THPT Gia Định – Tp. HCM

Phân tích. *Tương tự, nhận thấy bậc của (1) lớn hơn bậc của (2), nên sẽ phân tích vế trái của (2) thành tích của 2 hạng tử. Dựa vào 2 hạng tử tích này, ta phân tích phương trình (2) có chứa tổng của nó. Từ ý tưởng này, ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$.

$$(I)\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+xy+x)+y^2\left(1+\dfrac{y}{x+1}\right)=2\\ 2x+y+\dfrac{y^2}{x+1}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x+y+1)+\dfrac{y^2(x+y+1)}{x+1}=2\\ 2x+y+\dfrac{y^2}{x+1}=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y+1)\left(x+\dfrac{y^2}{x+1}\right)=2\\ 2x+y+\dfrac{y^2}{x+1}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y+1)\left(x+\dfrac{y^2}{x+1}\right)=2\\ (x+y+1)+x+\dfrac{y^2}{x+1}=3\end{cases}$$

Theo Viét thì $x+y+1$ và $x+\dfrac{y^2}{x+1}$ là 2 nghiệm phương trình: $X^2-3X+2=0$.

Suy ra: $\begin{cases}x+y+1=2\\ \dfrac{y^2}{x+1}+x=1\end{cases} \vee \begin{cases}x+y+1=1\\ \dfrac{y^2}{x+1}+x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1-x\\ \dfrac{(1-x)^2}{x+1}+x=1\end{cases} \vee \begin{cases}y=-x\\ \dfrac{x^2}{x+1}+x=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=1-x\\ 2x^2-2x=0\end{cases} \vee \begin{cases}y=-x\\ 2x^2-x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}\\ y=\dfrac{-1\mp\sqrt{17}}{4}\end{cases}.$$

Kết luận: So điều kiện, suy ra $S=(x;y)=\left\{(0;1);(1;0);\left(\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4};\dfrac{-1\mp\sqrt{17}}{4}\right)\right\}$.

Ví dụ 481. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2+x+xy-6y+1=0 & (1)\\ y^3x-8y^2+x^2y+x=0 & (2)\end{cases}$ (I)

Phân tích. *Nhận thấy (1), (2) đều có dạng phương trình bậc 2 với ẩn x nhưng biệt số delta không là số chính phương nên sẽ không chọn phương án hằng số biến thiên. Khác với các ví dụ trước, hằng số không tách sẵn ra ở vế phải, nếu sử dụng ý tưởng của nội dung Viét thì khả năng rất cao là* ***tổng và tích có chứa biến x, y****. Hơn nữa, khi giải phương trình $X^2-SX+P=0$ nếu S, P có chứa x, y thì sẽ phức tạp nên người ra đề thường cho dạng đặc biệt mà trong đó trường hợp thường gặp nhất là có thể biến đổi phương trình $X^2-SX+P=(X-\sqrt{P})^2=0$. Nghĩa là* ***P thường là những số chính phương*** *theo x hoặc y hoặc theo $x^m y^n$ và dựa vào đó sẽ phân tích biểu thức tích trước, kéo theo việc phân tích tổng. Quan sát thấy bậc của (2) lớn hơn (1) nên sẽ phân tích (2) thành tích số và có* $(2)\Leftrightarrow (y^3x+y^2)+(x^2y+x)=9y^2 \Leftrightarrow y^2(xy+1)+x(xy+1)=9y^2$

$\Leftrightarrow (xy+1)(y^2+x)=9y^2$. *Dựa vào 2 hạng tử tích* $(xy+1)$, (y^2+x) *này, viết phương trình* $(1) \Leftrightarrow (xy+1)+(y^2+x)=6y$ *và theo Viét thì* $xy+1$ *và* y^2+x *là 2 nghiệm của phương trình* $X^2-6yX+9y^2=0 \Leftrightarrow (X-3y)^2=0 \Leftrightarrow X=3y$. *Ngoài ra, nếu biến đổi phương trình và chia hợp lý ta cũng tìm ra được phép đặt ẩn phụ và có lời giải 2.*

Lời giải 1. Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases}(xy+1)+(y^2+x)=6y\\(xy+1)(y^2+x)=9y^2\end{cases}$

Theo định lý Viét thì $xy+1$ và y^2+x là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$X^2-6y.X+9y^2=0 \Leftrightarrow (X-3y)^2=0 \Leftrightarrow X=3y,$ suy ra: $\begin{cases}y^2+x=3y\\xy+1=3y\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3y-y^2\\(3y-y^2)y-3y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3y-y^2\\y^3-3y^2+3y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3y-y^2\\(y-1)^3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(2;1)\right\}\cdot$

Lời giải 2. Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases}(xy+1)+(y^2+x)=6y & (3)\\(xy+1)(y^2+x)=9y^2 & (4)\end{cases}$ và do $y=0$ không là nghiệm của hệ nên chia (3) cho $y \neq 0,$ (4) cho $y^2 \neq 0,$ ta được:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{xy+1}{y}+\dfrac{y^2+x}{y}=6\\\dfrac{xy+1}{y}\cdot\dfrac{y^2+x}{y}=9\end{cases}$ và đặt $\begin{cases}a=\dfrac{xy+1}{y}\\b=\dfrac{y^2+x}{y}\end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=6\\ab=9\end{cases} \Leftrightarrow a=b=3.$

Suy ra: $\begin{cases}\dfrac{xy+1}{y}=3\\\dfrac{y^2+x}{y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy+1=3y\\y^2+x=3y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3y-y^2\\(y-1)^3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(2;1)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Để có lời giải 1 ngắn gọn và đẹp như trên, tôi đã khai thác nội dung của định lý Viét với tổng, tích là một biến số theo x hoặc y hoặc chứa* $x^m y^n$. *Vấn đề đặt ra là đứng trước một hệ phương trình hữu tỷ (không căn thức), có quá nhiều phương pháp để giải, ta cần ưu tiên suy nghĩ theo phương pháp nào trước, phương pháp nào sau ?!! Đây là một vấn đề mà tôi thường thắc mắc khi còn ngồi ở ghế nhà trường và làm thế nào để dễ nhận dạng chúng một cách dễ dàng ?!. Có lẽ đây là một câu hỏi mà bạn hỏi với 10 người có thể sẽ nhận được 10 câu trả lời khác nhau, bởi lẽ toán học có vô vàn đường đi và trên mỗi đường đi đều có phong cảnh đẹp khác nhau tùy vào sự nhận xét và "cảm" của mọi người đều không giống nhau. Nhưng chung quy lại bạn cần có những phương tiện, những công cụ để đi đến cuối đoạn đường cho phù hợp. Điều đó*

cũng có nghĩa là bạn cần nắm vững các phương pháp giải của hệ hữu tỷ và theo bản thân tôi thường suy nghĩ theo các lối sau khi giải chúng:

① *Xét xem trong hệ có phương trình nào là tam thức bậc hai hay không ?! và nếu có thì kiểm tra biệt số delta phải là số chính phương hay không ? Nếu không là bậc hai theo biến x hoặc theo biến y thì ta sẽ sử dụng casio để kiểm chứng chúng có phân tích được thành tích số không ?!. Hiển nhiên chúng không có dấu hiệu đặc trưng của những hệ cơ bản (đối xứng loại I, đối xứng loại II, đẳng cấp,…) hoặc đặt ẩn phụ cơ bản (đặt ẩn phụ tổng – hiệu, lượng giác, số phức,…).*

② *Sử dụng các phương pháp giải đặc biệt, chẳng hạn nháp về định lý Viét để tìm ra phép đặt ẩn phụ, nháp về hệ số tỉ lệ của tam thức bậc hai để sử dụng phương pháp cộng đưa về phương trình tích số,…*

③ *Sử dụng phương pháp thế nếu tạo phương trình bậc cao hoặc tạo đồng bậc.*

④ *Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ khi các biểu thức trong hệ có mối liên hệ nhau.*

⑤ *Sử dụng phương pháp đánh giá bằng hàm số, bất đẳng thức,…*

Ví dụ 482. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 12x^4 - 4xy(7x^2+4y^2) = 4 + 12xy - 23x^2y^2 \quad (1) \\ 7x^2 - 8xy + 4y^2 = 6xy + 4 \quad (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy (2) có 2 hạng tử xy nằm ở 2 vế khác nhau, có lẻ đây là sự cố ý của người ra đề để hướng cho ta hãy phân tích $2.(3xy+2) = S$. Hiển nhiên lượng P ở phương trình (2) sẽ là $(3xy+2)^2 = P$ để có thể được 2 cụm nào đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 2(3xy+2).X + (3xy+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[X - (3xy+2)\right]^2 = 0.$*

Thật vậy, ta luôn có phương trình: $(1) \Leftrightarrow (3xy+2)^2 = 12x^4 - 28x^3y - 16xy^3 + 32x^2y^2$ $\Leftrightarrow (3xy+2)^2 = 4x(3x^3 - 7x^2y + 8xy^2 - 4y^3)$ và biểu thức trong dấu ( ) ở vế phải của (2) có dạng đẳng cấp bậc 3 nên $\Leftrightarrow (3xy+2)^2 = 4x(x-y)(3x^2 - 4xy + 4y^2)$ và do có 2 hạng tử tích trong P nên viết $(1) \Leftrightarrow (3xy+2)^2 = (4x^2 - 4xy)\cdot(3x^2 - 4xy + 4y^2)$. Khi đó cần viết $(2) \Leftrightarrow (4x^2 - 4xy) + (3x^2 - 4xy + 4y^2) = 2.(3xy+2)$ và kiểm tra lại thấy giống phương trình (2) nên đã đi đúng hướng. Từ đó có lời giải 1 chi tiết như sau:

Lời giải 1. Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (4x^2 - 4xy)\cdot(3x^2 - 4xy + 4y^2) = (3xy+2)^2 \\ (4x^2 - 4xy) + (3x^2 - 4xy + 4y^2) = 2.(3xy+2) \end{cases}$

Nên theo Viét thì $4x^2 - 4xy$ và $3x^2 - 4xy + 4y^2$ là 2 nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 2(3xy+2).X + (3xy+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[X - (3xy+2)\right]^2 = 0 \Leftrightarrow X = 3xy + 2.$$

Suy ra: $\begin{cases} 4x^2 - 4xy = 3xy + 2 \\ 3x^2 - 4xy + 4y^2 = 3xy + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 7xy = 2 \\ 3x^2 - 7xy + 4y^2 = 2 \end{cases} \quad (3)$

$$\Rightarrow 4x^2 - 7xy = 3x^2 - 7xy + 4y^2 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y \text{ hoặc } x = -2y.$$

Với $x = 2y$, thế vào phương trình $(3) \Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{array}\right.$.

Với $x=-2y,$ thế vào phương trình $(3)\Leftrightarrow 30y^2=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{15}}{15}\Rightarrow x=-\dfrac{2\sqrt{15}}{15} \\ y=-\dfrac{\sqrt{15}}{15}\Rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}\end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(2;1);(-2;-2);\left(\dfrac{\pm 2\sqrt{15}}{15};\dfrac{\mp 2\sqrt{15}}{15}\right)\right\}$.

Lời giải 2. Ta có: $(I)\Leftrightarrow \begin{cases}(4x^2-4xy)\cdot(3x^2-4xy+4y^2)=(3xy+2)^2 & (3)\\ (4x^2-4xy)+(3x^2-4xy+4y^2)=2.(3xy+2) & (4)\end{cases}$

Giả sử $3xy+2\neq 0$ và chia (3) cho $(3xy+2)^2,$ chia (4) cho $(3xy+2),$ và

Đặt $a=\dfrac{4x^2-4xy}{3xy+2},\ b=\dfrac{3x^2-4xy+4y^2}{3xy+2}$ thì hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4x^2-4xy}{3xy+2}\cdot\dfrac{3x^2-4xy+4y^2}{3xy+2}=1\\ \dfrac{4x^2-4xy}{3xy+2}+\dfrac{3x^2-4xy+4y^2}{3xy+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=1\\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases}4x^2-4xy=3xy+2\\ 3x^2-4xy+4y^2=3xy+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-7xy=2\\ 3x^2-7xy+4y^2=2\end{cases}$ và giải tương tự trên.

Ví dụ 483. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2+(9x-10)y+3(x+3)=0 & (1)\\ 9xy^3-24y^2+(27x^2+40)y+3x-16=0 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Do bậc của (2) lớn hơn bậc của (1) nên sẽ định hướng biến đổi (1) về dạng tổng $=S$ và (2) viết dạng tích $=P$ với P là số chính phương. Nhận thấy (2) có chứa $24y^2$ gần số chính phương $(5y)^2=25y^2$. Nếu lấy đó là P thì còn lại biểu thức không đồng bậc nên sẽ khó phân tích thành tích số nên sẽ viết dạng $(5y+a)^2$. Khi đó quan sát $(1)\Leftrightarrow(y^2+3x)+(9xy+1)=10x-8=2(5x-4),$ hiển nhiên đây là phép thử cho a. Lúc này nếu $(2)\Leftrightarrow(5y-4)^2=(y^2+3x)\cdot(9xy+1)$ thì phép thử chọn a đã thành công. Thật vậy, khai triển (2) và so sánh thì giống với đề bài nên chọn $a=-4$ là đúng.*

Lời giải. Ta có hệ $\begin{cases}(y^2+3x)+(9xy+1)=2.(5y-4)\\ (y^2+3x)\cdot(9xy+1)=(5y-4)^2\end{cases}$ nên theo định lý Viét thì

y^2+3x và $9xy+1$ là nghiệm của phương trình: $X^2-2(5y-4).X+(5y-4)^2=0$

$\Leftrightarrow(X-5y+4)^2=0\Leftrightarrow X=5y-4,$ suy ra: $\begin{cases}y^2+3x=5y-4\\ 9xy+1=5y-4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-y^2+5y-4\\ 3y(-y^2+5y-4)-5y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-y^2+5y-4\\ 3y^3-15y^2+17y-5=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-y^2+5y-4}{3} \\ (y-1)(3y^2-12y+5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=0 \\ y=\dfrac{6\pm\sqrt{21}}{3} \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{9} \end{array}\right.\cdot$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm hệ là $S=(x;y)=\left\{(0;1);\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{9};\dfrac{6\pm\sqrt{21}}{3}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 484. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3y-1 & (1) \\ x^3+x^2y=x^2-x+1 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Nếu phân tích (1) thành tổng và với ý tưởng đưa X^2-SX+P về dạng hằng đẳng thức $X^2-2f(x,y)X+f^2(x,y)$ thì viết $(1)\Leftrightarrow(x^2+1)+(y^2+xy-y)=2y.$ Từ đó định hướng nhân 2 vế của (2) với $y\neq 0$ và cộng 2 vế với y^2 và có lời giải sau:*

Lời giải. Do $y=0$ không là nghiệm của hệ nên xét $y\neq 0$ thì hệ:

$$(I)\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1)+(xy+y^2-y)=2y \\ x^3y+x^2y^2-x^2y+xy=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1)+(xy+y^2-y)=2y \\ x^3y+x^2y^2-x^2y+(xy+y^2-y)=y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1)+(xy+y^2-y)=2y \\ x^2(xy+y^2-y)+(xy+y^2-y)=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1)+(xy+y^2-y)=2y \\ (x^2+1)(xy+y^2-y)=y^2 \end{cases}$$

Theo Viét thì (x^2+1) và $(xy+y^2-y)$ là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$X^2-2yX+y^2=0\Leftrightarrow(X-y)^2=0\Leftrightarrow X=y,$ suy ra: $\begin{cases} x^2+1=y \\ xy+y^2-y=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ x+y=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2+1 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\frac{5\mp\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{5\mp\sqrt{5}}{2}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 485. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+xy=1 & (1) \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2} & (2) \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Nếu quan sát kỹ, viết* $(2)\Leftrightarrow 2\cdot\left[\dfrac{3x}{2(1-x)^2}\right]^2+y\cdot\left[-\dfrac{3x}{2(1-x)^2}\right]=1,$ *kết hợp với (1) và đặt* $t=-\dfrac{3x}{2(1-x)^2}$ *thì hệ (I) trở thành* $\begin{cases} 2x^2+y.x-1=0 \\ 2t^2+y.t-1=0 \end{cases}\cdot$ *Khi đó thấy x và t là 2 nghiệm của:* $2X^2+yX-1=0$ *và theo Viét thì tích* $P=x.t=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{1}{2}\cdot$ *Từ đó thế t vào sẽ tìm được x, rồi suy ra y và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 1$.

Đặt: $t = -\dfrac{3x}{2(1-x)^2}$ thì hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + yx - 1 = 0 \\ 2t^2 + yt - 1 = 0 \end{cases}$.

Nhận thấy rằng x và t là hai nghiệm phân biệt của: $2X^2 + yX - 1 = 0$. Theo Viét ta có $P = x.t = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \cdot \dfrac{-3x}{2(1-x)^2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Khi đó: $S = x + t = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{y}{2} \Rightarrow y = -2(x+t) = -2\left(x - \dfrac{3x}{2(1-x)^2}\right) = 2.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}; 2\right)\right\}$.

c) Chia để định hướng lượng đặt ẩn phụ

Có rất nhiều bài toán mà cần phải chia hai vế với một ẩn hoặc một nhóm ẩn thì mới dễ dàng nhận ra phép biến đổi và lượng đặt ẩn phụ. Thông thường đề bài có các dấu hiệu nhận dạng thường gặp sau:

- *Biến cần chia độc lập ra hai vế, chẳng hạn:* $\begin{cases} x^2y^2 + y^4 + 1 = 3y^2 & (1) \\ xy^2 + x = 2y & (2) \end{cases}$

  Khi đó chia (1) *cho* $y^2 \neq 0$ *và* (2) *cho* $y \neq 0$ *thì sẽ tìm được phép đặt ẩn phụ.*
- *Các biến cần chia chưa độc lập. Ta thường làm theo các bước sau: biến đổi, rút gọn, rồi lần lượt độc lập biến ra hai vế và tìm phép chia để xuất hiện những hạng tử liên quan nhau (ước của nhau) ở 2 phương trình.*

Ví dụ 486. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y & (1) \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Đại học khối B năm 2009

Phân tích. *Với* $y \neq 0$, *chia* (1) *cho y và chia* (2) *cho* y^2 *hệ* $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$

thì hệ xuất hiện các hạng tử gần giống nhau, ở (1) *có* $\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{x}{y}$ *và ở* (2) *có các hạng tử* $\dfrac{x}{y}$, $\left(x^2 + \dfrac{1}{y^2}\right)$ *mà* $\left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 = \left(x^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) + 2 \cdot \dfrac{x}{y}$ *nên sẽ đặt* $a = x + \dfrac{1}{y}$; $b = \dfrac{x}{y}$.

<u>Lời giải</u>. Do $y=0$ không là nghiệm, nên hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=7 \\ x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y}=13 \end{cases}$ (II)

Đặt: $\begin{cases} a=x+\dfrac{1}{y} \Rightarrow a^2=x^2+\dfrac{1}{y^2}+2\cdot\dfrac{x}{y} \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{y^2}=a^2-2b \\ b=\dfrac{x}{y} \end{cases}$ thì hệ phương trình

$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2-b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7-a \\ a^2+a-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-5 \\ b=12 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ 3y^2-4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=\dfrac{1}{3} \\ x=1 \end{cases}$.
- Với $\begin{cases} a=-5 \\ b=12 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-5 \\ \dfrac{x}{y}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12y \\ 12y^2+5y+1=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(3;1);\left(1;\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

<u>Ví dụ 487.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3x-2 & (1) \\ (x^2+xy)^4+(y^2+2)^4=17x^4 & (2) \end{cases}$ (I)

***<u>Phân tích</u>**. Nếu chia (2) cho $x^4\neq 0$ thì $(2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2+xy}{x}\right)^4+\left(\dfrac{y^2+2}{x}\right)^4=17$ và biến đổi $(1) \Leftrightarrow (x^2+xy)+(y^2+2)=3x$ và cho $x\neq 0$ thì được: $\dfrac{x^2+xy}{x}+\dfrac{y^2+2}{x}=3,$ đã xuất hiện những hạng tử giống nhau ở 2 phương trình và có lời giải chi tiết như sau:*

<u>Lời giải</u>. Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+xy)+(y^2+2)=3x & (3) \\ (x^2+xy)^4+(y^2+2)^4=17x^4 & (4) \end{cases}$ (II)

Do $x=0$ không là nghiệm của hệ (II) nên với $x\neq 0,$ chia 2 vế của phương trình (3) cho $x,$ của phương trình (4) cho $x^4,$ ta được hệ phương trình:

$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{x} + \dfrac{y^2+2}{x} = 3 \\ \left(\dfrac{x^2+xy}{x}\right)^4 + \left(\dfrac{y^2+2}{x}\right)^4 = 17 \end{cases}$ (III). Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{x^2+xy}{x} \\ b = \dfrac{y^2+2}{x} \end{cases}$ thì hệ phương trình:

$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ (a^2+b^2)^2 - 2(ab)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ \left[(a+b)^2 - 2ab\right]^2 - 2(ab)^2 = 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ (9-2ab)^2 - 2(ab)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ (ab)^2 - 18ab + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=16 \\ a+b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$. (loại cụm: $\begin{cases} ab=16=P \\ a+b=3=S \end{cases}$ do không thỏa $S^2 \ge 4P$).

- Với $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x^2+xy=x \\ y^2+2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y^2+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$.
- Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x^2+xy=2x \\ y^2+2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ y^2+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(1;0);(3;-2);(2;0);(3;-1)\right\}$.

Ví dụ 488. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1+x^3y^3 = 19x^3 & (1) \\ y+xy^2 = -6x^2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Học sinh giỏi lớp 10 huyện Hóc Môn – Tp.HCM năm 2013

Phân tích. Hệ $(I) \xleftrightarrow[(2)\text{ chia cho } x^2 \neq 0]{(1)\text{ chia cho } x^3 \neq 0} \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} + y^3 = 19 \\ \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}+y\right)^3 - 3\cdot\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right) = 19 \\ \dfrac{y}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+y\right) = -6 \end{cases}$

(áp dụng hằng đẳng thức: $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$). Khi đó ở 2 phương trình đã xuất hiện nhân tử giống nhau nên có phép đặt ẩn phụ và lời giải chi tiết như sau:

Lời giải. Do $x=0$ thì hệ vô nghiệm nên với $x \neq 0$, chia phương trình (1) cho lượng x^3, chia phương trình (2) cho lượng x^2, ta được hệ:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} + y^3 = 19 \\ \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}+y\right)^3 - 3\cdot\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right) = 19 \\ \dfrac{y}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+y\right) = -6 \end{cases} \quad (II)$$

Đặt $a = \dfrac{1}{x} + y$, $b = \dfrac{y}{x}$ thì hệ $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab = 19 \\ ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 1 \\ ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 1 \\ y = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + xy = x \\ y = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 6x^2 = x \\ y = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{ \left(\dfrac{1}{3}; -2 \right); \left(-\dfrac{1}{2}; 3 \right) \right\}$.

Ví dụ 489. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) + 125 = 0 & (1) \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Tương tự ví dụ trên, ta sẽ chia (1) cho* $y^3 \neq 0$, *chia (2) cho* $y^2 \neq 0$, *sẽ và đặt ẩn phụ sẽ đưa được về hệ phương trình đối xứng loại I, từ đó có lời giải sau:*

Lời giải. Do $y = 0$ thì hệ vô nghiệm nên xét: $y \neq 0$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9 \\ \dfrac{45x^2}{y} + \dfrac{75x}{y^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x)^3 + \left(\dfrac{5}{y}\right)^3 = 9 \\ \dfrac{15x}{y}\left(3x + \dfrac{5}{y}\right) = 6 \end{cases} (II).$$

Đặt $\begin{cases} a = 3x \\ b = \dfrac{5}{y} \end{cases}$, suy ra: $ab = \dfrac{15x}{y}$.

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ ab(a+b) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 9 \\ ab(a+b) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 = 27 \\ ab(a+b) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} 3x = 2 \\ \dfrac{5}{y} = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 3x = 1 \\ \dfrac{5}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{ \left(\dfrac{2}{3}; 5 \right); \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{2} \right) \right\}$.

Ví dụ 490. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y^3 + x^2y^2 + xy - 4y^3 + 1 = 0 & (1) \\ x(x+1) + \dfrac{1}{y} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{y}\right) = 4 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy phương trình (2) có dạng phân số, hiển nhiên để đặt ẩn phụ thì phương trình (1) cần chia phù hợp. Nếu viết* $(1) \Leftrightarrow x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1 = 4y^3$ *thì sẽ xác định lượng chia dự kiến là* $y^3 \neq 0$, *tức* $(1) \Leftrightarrow x^3 + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{y^3} = 4$. *Khi đó ở 2 phương trình có những lượng có liên quan nhau, tức:* $\begin{cases} \left(x^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) + \left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \\ \left(x^3 + \dfrac{1}{y^3}\right) + \dfrac{x}{y} \cdot \left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \end{cases}$.

Thật vậy, nếu đặt: $\begin{cases} a = x + \dfrac{1}{y} \\ b = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 + \dfrac{1}{y^2} + 2\cdot\dfrac{x}{y} \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{y^2} = a^2 - 2b \\ u^3 = x^3 + \dfrac{1}{y^3} + 3\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\left(x + \dfrac{1}{y}\right) \Rightarrow x^3 + \dfrac{1}{y^3} = a^3 - 3ab \end{cases}$.

Tất cả đều biểu diễn hết theo a, b nên có lời giải chi tiết như sau:

Lời giải. Điều kiện: $y \neq 0$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) + \left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \\ \left(x^3 + \dfrac{1}{y^3}\right) + \dfrac{x}{y}\left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \end{cases} (II).\text{ Đặt } \begin{cases} a = x + \dfrac{1}{y} \\ b = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} = a^2 - 2b \\ x^3 + \dfrac{1}{y^3} = a^3 - 3ab \end{cases}.$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2b + a = 4 \\ a^3 - 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a^2 + a - 4 \\ a^3 - a(a^2 + a - 4) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a^2 + a - 4 \\ (a-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2y + 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S = (x;y) = \{(1;1)\}$.

> ***Ví dụ 491.*** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y & (1) \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 & (2) \end{cases} \quad (I)$
>
> ***Học sinh giỏi Tp. Hồ Chí Minh năm 2014***

Phân tích. *Từ* (1) $\xleftrightarrow{\text{chia}: y \neq 0} \dfrac{x^2}{y} + y + x + \dfrac{1}{y} = 4 \Leftrightarrow (x+y) + \dfrac{x^2+1}{y} = 4$ *có* $(x+y)$, $\dfrac{x^2+1}{y}$ *nên viết* (2) $\Leftrightarrow y(x+y)^2 = 2(x^2+1) + 7y \xleftrightarrow{\text{chia cho}: y \neq 0} (x+y)^2 = 2\dfrac{x^2+1}{y} + 7$

nên đã tìm ra được phép ẩn phụ và có lời giải chi tiết như sau:

Lời giải. Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1) + y(y+x) = 4y \\ y(x+y)^2 = 2(x^2+1) + 7y \end{cases} \quad (II)$

Do $y = 0$ thì hệ vô nghiệm nên với $y \neq 0$, chia 2 vế của (1), (2) cho y, được:

$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + (y+x) = 4 \\ (x+y)^2 = 2\cdot\dfrac{x^2+1}{y} + 7 \end{cases}$ và đặt $a = \dfrac{x^2+1}{y}$; $b = x + y$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ b^2 = 2a + 7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 - b \\ b^2 + 2b - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -5 \\ a = 9 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+1=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$.
- Với $\begin{cases} b=-5 \\ a=9 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+1=9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5-x \\ x^2+9x+46=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(1;2);(-2;5)\}$.

Ví dụ 492. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+3x^2y=\dfrac{8}{x} \\ y^3-1=\dfrac{6}{x} \end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Phan Ngọc Hiển – Cà Mau

Phân tích. *Hệ* $(I) \xleftrightarrow{\text{chia (1) cho: } x^2} \begin{cases} 1+3y=\dfrac{8}{x^3} \\ 1+\dfrac{6}{x}=y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3y=\left(\dfrac{2}{x}\right)^3 \\ 1+3\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)=y^3 \end{cases}$ *và đặt* $\begin{cases} a=y \\ b=\dfrac{2}{x} \end{cases}$ *sẽ thu được hệ đối xứng loại II và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho x^2, ta được:

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3y=\left(\dfrac{2}{x}\right)^3 \\ 1+3\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)=y^3 \end{cases}$ và đặt $\begin{cases} a=y \\ b=\dfrac{2}{x} \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+3a=b^3 \quad (1) \\ 1+3b=a^3 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow 3(a-b)=b^3-a^3 \Leftrightarrow (a-b)(3+a^2+b^2+ab)=0 \Leftrightarrow a=b \Rightarrow \dfrac{2}{x}=y.$

Thế $\dfrac{2}{x}=y$ vào phương trình thứ hai của hệ ban đầu được: $y^3-3y=1$ (3)

Đặt $y=2\cos t,\ t\in[0;\pi]$ thì $(3) \Leftrightarrow 8\cos^3 t-6\cos t=1 \Leftrightarrow 4\cos 3t-3\cos t=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos 3t=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3} \text{ và với } \begin{cases} t\in[0;\pi] \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow t\in\left\{\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}.$$

Suy ra: $(x;y)=\left\{\left(\cos^{-1}\dfrac{\pi}{9};2\cos\dfrac{\pi}{9}\right);\left(\cos^{-1}\dfrac{5\pi}{9};2\cos\dfrac{5\pi}{9}\right);\left(\cos^{-1}\dfrac{7\pi}{9};2\cos\dfrac{7\pi}{9}\right)\right\}$.

Ví dụ 493. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3x^2-13x-15=\dfrac{8}{y^3}-\dfrac{8}{y} & (1) \\ y^2+4=5y^2(x^2+2x+2) & (2) \end{cases} \quad (I)$

Học sinh giỏi tỉnh Quảng Nam năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy phương trình (1) có biến x, y phân ly ra mỗi vế nên thường sẽ nghĩ đến việc sử dụng hàm số, tức* $(1)\Leftrightarrow(x+1)^3-16(x+1)=\left(\dfrac{2}{y}\right)^3-4\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)$, *nhưng không tìm được hàm đặc trưng. Khi đó sẽ nghĩ đến việc chia ở phương trình (2) hợp lý để có 2 hạng tử* $(x+1),\ \dfrac{2}{y}\cdot$ *Thật vậy, chia* y^2, *thì* $(2)\Leftrightarrow 1+\left(\dfrac{2}{y}\right)^2=5\cdot\left[(x+1)^2+1\right]\cdot$

Rõ ràng đã xuất hiện 2 hạng tử giống nhau ở 2 phương trình và có lời giải chi tiết sau:

Lời giải. Điều kiện: $y\neq 0$. Chia 2 vế của (2) cho y^2, ta được:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^3-16\cdot(x+1)=\left(\dfrac{2}{y}\right)^3-4\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)\\ 1+\left(\dfrac{2}{y}\right)^2=5\cdot\left[(x+1)^2+1\right] \quad (*)\end{cases} \quad (II).\ \text{Đặt}\ \begin{cases}a=x+1\\ b=\dfrac{2}{y}\neq 0\end{cases}\cdot$$

$$(II)\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-16a=b^3-4b\\ 1+b^2=5(a^2+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-b^3=4.(4a-b)\\ \quad\uparrow \\ b^2-5a^2=4\end{cases}\Rightarrow a^3-b^3=(4a-b)(b^2-5a^2)$$

(sử dụng phép thế $4=b^2-5a^2$ lên để tạo phương trình đẳng cấp bậc 3)

$\Leftrightarrow 21a^3-5a^2b-4ab^2=0\Leftrightarrow a.(21a^2-5ab-4b^2)=0\Leftrightarrow a.(7a-4b).(3a+b)=0$

$\Leftrightarrow a=0$ hoặc $7a=4b$ hoặc $b=-3a.$

- Với $a=0,$ suy ra: $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và thế vào $(*)\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm1.$
- Với $7a=4b,$ suy ra $x+1=\dfrac{7}{8y}$ và thế vào $(*)\Leftrightarrow\dfrac{124}{49y^2}+4=0$: vô nghiệm.
- Với $b=-3a,$ suy ra $x+1=\dfrac{-2}{3y}$ và thế vào $(*)\Leftrightarrow y^2=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}\\ x=-2\end{cases}\vee\begin{cases}y=\dfrac{-2}{3}\\ x=0\end{cases}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(-1;\pm1);\left(-2;\dfrac{2}{3}\right);\left(0;-\dfrac{2}{3}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 494. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{xy+x+2}+\sqrt{x^2+x}-4\sqrt{x}=0 & (1)\\ xy+x^2+2=x.(\sqrt{xy+2}+3) & (2)\end{cases} \quad (I)$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – THPT Kom Tum – Tỉnh Kom Tum

Phân tích. $(I)\xleftrightarrow[\text{chia (2): } x\neq 0]{\text{chia (1): } \sqrt{x}\neq 0}\begin{cases}\sqrt{y+1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{x+1}=4\\ y+x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{xy+2}+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y+\dfrac{2}{x}+1}+\sqrt{x+1}=4\\ y+\dfrac{2}{x}+x=\sqrt{x\left(y+\dfrac{2}{x}\right)}+3\end{cases}$

và đặt $a=y+\dfrac{2}{x},\ b=x$ *thì hệ* $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=4\\ a+b=\sqrt{ab}+3\end{cases}$ *: đây là hệ đối xứng loại I.*

Lời giải. Điều kiện: $xy+x+2\ge 0,\ x\ge 0,\ xy+2\ge 0.$

Do $x=0$ không là nghiệm hệ nên với $x\neq 0,$ chia (1) cho $\sqrt{x},$ chia (2) cho $x:$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y+\dfrac{2}{x}+1}+\sqrt{x+1}=4\\ y+\dfrac{2}{x}+x=\sqrt{x\left(y+\dfrac{2}{x}\right)}+3\end{cases}\text{ và đặt }\begin{cases}a=y+\dfrac{2}{x}\\ b=x\end{cases}\text{ thì hệ}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=4\\ a+b=\sqrt{ab}+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+2+2\sqrt{(a+1)(b+1)}=16\\ a+b=\sqrt{ab}+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+2\sqrt{ab+a+b+1}=14\\ a+b=\sqrt{ab}+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{ab}+3\\ \sqrt{ab}+2\sqrt{ab+\sqrt{ab}+4}=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{ab}+3\\ 2\sqrt{ab+\sqrt{ab}+4}=11-\sqrt{ab}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{ab}+3\\ 0\le\sqrt{ab}\le 11\\ 4(ab+\sqrt{ab}+4)=(11-\sqrt{ab})^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{ab}+3\\ 0\le\sqrt{ab}\le 11\\ 3(\sqrt{ab})^2+26\sqrt{ab}-105=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{ab}=3\\ a+b=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab=9\\ a+b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases},\text{ suy ra: }\begin{cases}y+\dfrac{2}{x}=3\\ x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=\dfrac{7}{3}\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(3;\dfrac{7}{3}\right).$

Ví dụ 495. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x+y-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{xy}+\sqrt{x})=8\sqrt{x}\\ (\sqrt{x+3}+\sqrt{xy})^2+xy=2x(6-x)\end{cases}\quad(I)$

Phân tích. *Nếu chia 2 vế của phương trình đầu tiên cho* $\sqrt{x}$, *và chia phương trình thứ hai cho x thì sẽ thu được những hạng tử giống nhau ở 2 phương trình.*

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y\ge 0.$ Do $x=0$ không là nghiệm hệ nên:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y-1)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}+1\right)=8 \\ \left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}\right)^2+y=2(6-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y-1)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}+1\right)=8 \\ \left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}\right)^2+2x+y=12 \end{cases}$$

Đặt $a=2x+y,\ b=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}>0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)(b+1)=8\\ b^2+a=12\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=12-b^2,\ b>0 \\ b^3+b^2-11b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12-b^2,\ b>0 \\ (a-3)(a^2+4a+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}.$$

Với $\begin{cases}a=3\\b=3\end{cases}$, suy ra: $\begin{cases}2x+y=3\\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-2x\\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{3-2x}-3=0\end{cases}$ (3)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{3-2x}-3$ trên $\left(0;\dfrac{3}{2}\right]$ có:

$f'(x)=-\dfrac{3}{2x^2}\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}<0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{3}{2}\right]$.

Mặt khác ta có: $f(1)=0$ nên $x=1\Rightarrow y=1.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(1;1)\}$.

Ví dụ 496. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-y\sqrt{x+y}=y-1\\ x^2(x+y-2)+x=5y+2\end{cases}$ (I)

Lời giải. Điều kiện: $x+y\ge 0$ thì $(I)\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+1-y\sqrt{x+y}=y\\ x^2(x+y)-2(x^2+1)+(x+y)=6y\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+1)-y\sqrt{x+y}=y\\ (x+y)(x^2+1)-2(x^2+1)=6y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+1)-y\sqrt{x+y}=y\\ (x^2+1)(x+y-2)=6y\end{cases} \quad (II)$$

Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên chia mỗi vế của (II) cho $y\ne 0$ được:

$(II)\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}-\sqrt{x+y}=1\\ \dfrac{x^2+1}{y}\cdot(x+y-2)=6\end{cases}$ (III). Đặt $a=\dfrac{x^2+1}{y};\ b=\sqrt{x+y}\ge 0$ thì:

$$(III)\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=1\\ a(b^2-2)=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b+1\\ b^3+b^2-2b-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}.$$

Với $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$, suy ra: $\begin{cases}x+y=4\\ x^2+3x=11\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{53}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{11\mp\sqrt{53}}{2}$.

Kết luận: So điều kiện $\Rightarrow (x;y)=\left\{\left(\frac{-3-\sqrt{53}}{2};\frac{11+\sqrt{53}}{2}\right);\left(\frac{-3+\sqrt{53}}{2};\frac{11-\sqrt{53}}{2}\right)\right\}$

Ví dụ 497. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2+2y^2+16=11xy \\ x^2+2y^2+12y=3xy^2 \end{cases} \quad (I)$

Lời giải. Do $y=0$ không là nghiệm của hệ, chia hai vế của hệ cho $y^2\neq 0$:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+\frac{16}{y^2}+2=\frac{11x}{y} \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2+2+\frac{12}{y}=3x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left(x-\frac{4}{y}\right)^2-\frac{3x}{y}+2=0 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(x-\frac{4}{y}\right)+2=0 \end{cases} \quad (II)$$

Đặt $a=x-\frac{4}{y},\ b=\frac{x}{y}$ thì $(II)\Leftrightarrow\begin{cases} a^2-3b+2=0 & (1) \\ b^2-3a+2=0 & (2) \end{cases}\xrightarrow{(1)-(2)}a^2-b^2+3(a-b)=0$

$\Leftrightarrow(a-b)(a+b+3)=0\Leftrightarrow a=b$ hoặc $b=-3-a.$

Với $a=b,$ thế vào $(1)\Leftrightarrow a^2-3a+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=2 \end{array}\right.$.

Với $b=-3-a,$ thế vào $(1)\Leftrightarrow a^2+3a+11=0:$ vô nghiệm.

Trường hợp 1. Nếu $a=b=1,$ suy ra: $\begin{cases} x=y \\ x^2-x-4=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Trường hợp 2. Nếu $a=b=2,$ suy ra: $\begin{cases} x=2y \\ 2y^2-2y-4=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(4;2);(-2;-1);\left(\frac{1\pm\sqrt{17}}{2};\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 498. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2-1)^2+3=\frac{6x^5y}{x^2+2} \\ 3y-x=\sqrt{\frac{4x-3x^2y-9xy^2}{x+3y}} \end{cases} \quad (I)$

Lời giải. Điều kiện: $x+3y\neq 0;\ \frac{4x-3x^2y-9xy^2}{x+3y}\geq 0;\ 3y-x\geq 0;\ x^5y>0.$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} (x^2+2)(x^4-2x^2+4)=6x^5y \\ (3y-x)^2=\frac{4x-3x^2y-9xy^2}{x+3y} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^6+8=6x^5y \\ x^3+27y^3=4x \quad (i) \end{cases} \quad (II)$$

Do $x=0$ không là nghiệm của hệ nên chia 2 vế phương trình (1) cho $x^6\neq 0$ và phương trình (2) cho $x^3\neq 0,$ thì hệ phương trình:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{8}{x^6}=\dfrac{6y}{x} \\ 1+\dfrac{27y^3}{x^3}=\dfrac{4}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3=2\left(\dfrac{3y}{x}\right) \\ 1+\left(\dfrac{3y}{x}\right)^3=2\left(\dfrac{2}{x^2}\right) \end{cases} (III). \text{ Đặt } \begin{cases} a=\dfrac{2}{x^2}>0 \\ b=\dfrac{3y}{x} \end{cases} \text{ thì:}$$

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^3=2b \ \ (1) \\ 1+b^3=2a \ \ (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} a^3-b^3=2(b-a) \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\cdot\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+2\right]=0 \Leftrightarrow a=b, \text{ suy ra: } y=\frac{2}{3x}\cdot$$

Thế $y=\dfrac{2}{3x}$ vào $(i) \Leftrightarrow x^6-4x^4+8=0 \Leftrightarrow (x^2)^3-4(x^2)^2+8=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)(x^4-2x^2-4)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2} \text{ hoặc } x^2=1+\sqrt{5}.$$

Suy ra: $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{1+\sqrt{5}} \\ y=\dfrac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{5}}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{1-\sqrt{5}} \\ y=-\dfrac{2}{3\sqrt{1-\sqrt{5}}} \end{cases}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left(-\sqrt{1-\sqrt{5}};-\dfrac{2}{3\sqrt{1-\sqrt{5}}}\right)\cdot$

Ví dụ 499. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}}=2x^2+y^2-4x & (1) \\ (x-2)\cdot\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}}=2x-y & (2) \end{cases} \quad (I)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Lê Quí Đôn – Khánh Hòa

Phân tích*. Nếu chia (1) cho* y^2*, chia (2) cho y ta sẽ có những hạng tử giống nhau ở 2 vế và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} y\neq 0 \\ 1+\dfrac{3x}{y}\geq 0 \end{cases}$ thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3\cdot\dfrac{x}{y}}=2\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1-4\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y} \\ \left(\dfrac{x}{y}-2\cdot\dfrac{1}{y}\right)\sqrt{1+3\cdot\dfrac{x}{y}}=2\cdot\dfrac{x}{y}-1 \end{cases}$

Đặt $a=\dfrac{x}{y}$, $b=\dfrac{1}{y}\cdot$ Khi đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3a}=2a^2-4ab+1 & (3) \\ (a-2b)\sqrt{1+3a}=2a-1 & (4) \end{cases}$

Nhận thấy nếu cộng 2 phương trình cho nhau thì sẽ đưa được về phương trình tích số.

$$(3)+(4) \Rightarrow (a-2b+1)\sqrt{3a+1}=2a.(a-2b+1) \Leftrightarrow (a-2b+1)\cdot(\sqrt{3a+1}-2)=0$$

- Với $\sqrt{3a+1}=2 \Leftrightarrow a=1,$ suy ra: $x=y$ và thế vào $(2) \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=4.$

- Với $a+1=2b,$ suy ra: $x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x$ và thế vào phương trình:

$$(2) \Leftrightarrow -y\sqrt{1+\frac{3(2-y)}{y}}=2(2-y)-y \Leftrightarrow \sqrt{\frac{6-2y}{y}}=\frac{2y-4}{y} \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=0.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(0;2);(4;4)\right\}\cdot$

Ví dụ 500. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x\sqrt{y+1}+8x=(4x^2-4x-3)\sqrt{x+1} & (1) \\ \dfrac{x}{x+1}+x^2=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nếu chia (2) cho* $\sqrt{x+1}$ *ta sẽ phân ly được x và y ở mỗi vế. Khi đó khả năng đưa về phương trình đối xứng 2 biến hoặc xử dụng hàm số là rất cao. Thật vậy:*

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}=\left[(y+1)+1\right]\sqrt{y+1} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\frac{x}{\sqrt{x+1}}=(\sqrt{y+1})^3+\sqrt{y+1}$$

Nếu đặt $a=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, $b=\sqrt{y+1}$ *thì sẽ đưa về phương trình đối xứng* $a^3+a=b^3+b$ *hoặc giải bằng phương pháp hàm số để tìm mối liên hệ x, y và thế vào (1) tìm ra x, y.*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -1 \\ y \ge -1 \end{cases}$ thì $(2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=(\sqrt{y+1})^3+\sqrt{y+1}$

Đặt $a=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, $b=\sqrt{y+1}$ thì phương trình $\Leftrightarrow a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow a=b.$

Do đó: $\sqrt{y+1}=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow x \ge 0$ và thế vào $(1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}+2\right)^2=(2x-1)^2.$

Suy ra: $x=3 \Rightarrow y=\dfrac{5}{4}:$ thỏa điều kiện.

Kết luận: Nghiệm hệ là $(x;y)=\left(3;\dfrac{5}{4}\right)\cdot$

d) Liên hợp để phát hiện lượng ẩn phụ

Thông thường ta ghép các căn thức với nhau hoặc ghép căn thức với biểu thức trong cùng một phương trình hoặc cộng – trừ các phương trình với nhau để nhân liên hợp nhằm xuất hiện những nhân tử giống nhau hoặc gần giống nhau của hai phương trình, từ đó tìm ra phép đặt ẩn phụ. Ta cùng tìm hiểu một số ví dụ sau:

Ví dụ 501. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}+x+y=5 \\ \sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}-x-y=2 \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Xuất phát từ phương trình thứ hai, nếu ghép* $\sqrt{x^2+2}-x$, $\sqrt{y^2+3}-y$ *thì sau khi nhân lượng liên hợp sẽ xuất hiện hạng tử cộng giống với phương trình một. Từ đó ta tìm được phép đặt ẩn phụ và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Do $\sqrt{x^2+2}+x=0;\ \sqrt{y^2+3}+y=0$ vô nghiệm nên:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+x+\sqrt{y^2+3}+y=5\\ \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}+\dfrac{3}{\sqrt{y^2+3}+y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=2\end{cases}\text{ với }\begin{cases}a=\sqrt{x^2+2}+x>0\\ b=\sqrt{y^2+3}+y>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ 2b+3a=2ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5-a\\ 2a^2-9a+10=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{5}{2}\text{ hoặc }\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}.$$

- Với $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$, suy ra: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+x=2\\ \sqrt{y^2+3}+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2;\ y\le 3\\ x^2-4x+4=x^2+2\\ y^2-6y+9=y^2+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}.$

- Với $\begin{cases}a=\dfrac{5}{2}\\ b=\dfrac{5}{2}\end{cases}$, suy ra: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+x=\dfrac{5}{2}\\ \sqrt{y^2+3}+y=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,\ y\le\dfrac{5}{2}\\ x=\dfrac{17}{20},\ y=\dfrac{13}{20}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{17}{20}\\ y=\dfrac{13}{20}\end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};1\right);\left(\dfrac{17}{20};\dfrac{13}{20}\right)\right\}$.

Ví dụ 502. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x}+\sqrt{2y}=4 & (1)\\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{2y+5}=6 & (2)\end{cases}\quad (I)$

Học sinh giỏi tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2011

Phân tích. *Nếu cộng 2 phương trình với nhau thì có* $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x},\ \sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}$ *và nếu trừ 2 phương trình cho nhau thì có* $\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x},\ \sqrt{2y+5}-\sqrt{2y}$ *và tương tự ví dụ trên ta sẽ nhân liên hiệp cụm trừ thì sẽ xuất hiện cụm giống khi cộng.*

Lời giải. Điều kiện: $x;\ y\ge 0$.

$$(I)\xleftrightarrow[(2)-(1)]{(2)+(1)}\begin{cases}(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x})+(\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y})=10\\ (\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x})+(\sqrt{2y+5}-\sqrt{2y})=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x})+(\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y})=10\\ \dfrac{5}{(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x})}+\dfrac{5}{(\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y})}=2\end{cases}\quad (II)$$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}>0\\ b=\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}>0\end{cases}$ thì $(II)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=10\\ \dfrac{5}{a}+\dfrac{5}{b}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=10\\ 5(a+b)=2ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=10\\ ab=25\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\ b=5\end{cases},\text{ suy ra: }\begin{cases}\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}=5\\ \sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x+5}=5-\sqrt{2x}\\ \sqrt{2y+5}=5-\sqrt{2y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(2;2)\}$.

Ví dụ 503. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y^2+6}+y\sqrt{x^2+3}=7xy & (1) \\ x\sqrt{x^2+3}+y\sqrt{y^2+6}=x^2+y^2+2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Từ* (1) *ta có thể tạo ra lượng cộng bằng cách cộng thêm 2 vế* $2xy$, *tức:*

$(1)\Leftrightarrow x\sqrt{y^2+6}+xy+y\sqrt{x^2+3}+xy=9xy\Leftrightarrow x(\sqrt{y^2+6}+y)+y(\sqrt{x^2+3}+x)=9xy.$

$(2)\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+3}-x^2+y\sqrt{y^2+6}-y^2=2\Leftrightarrow x.(\sqrt{x^2+3}-x)+y.(\sqrt{y^2+6}-y)=2$

Nếu liên hợp lượng trừ ta được: $\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}+\dfrac{6y}{\sqrt{y^2+6}+y}=2$ *và khi đó ta thấy ở* (1) *cần chia cho lượng* xy *sẽ xuất hiện dạng nghịch đảo của nhau và có lời giải sau:*

Lời giải. Ta có: $(I)\Leftrightarrow\begin{cases} x(\sqrt{y^2+6}+y)+y(\sqrt{x^2+3}+x)=9xy \\ x(\sqrt{x^2+3}-x)+y(\sqrt{y^2+6}-y)=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{\sqrt{y^2+6}+y}{y}+\dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{x}=9 \\ \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}+\dfrac{6y}{\sqrt{y^2+6}+y}=2 \end{cases}$ (II). Đặt $a=\dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{x}$, $b=\dfrac{\sqrt{y^2+6}+y}{y}$.

$$(II)\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=9 \\ \dfrac{3}{a}+\dfrac{6}{b}=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=9-a \\ 6a+3b=2ab \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=9-a \\ 2a^2-15a+27=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{9}{2} \\ b=\dfrac{9}{2} \end{cases}\vee\begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt{x^2+3}=2x \\ \sqrt{y^2+6}=5y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2=3 \\ 24y^2=6;\ x,\ y>0 \end{cases}\Leftrightarrow(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.
- Với $\begin{cases} a=\dfrac{9}{2} \\ b=\dfrac{9}{2} \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+3}=7x \\ 2\sqrt{y^2+6}=7y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x,\ y>0 \\ 45x^2=12 \\ 45x^2=24 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{15}}{15} \\ y=\dfrac{2\sqrt{30}}{15} \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(1;\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{2\sqrt{15}}{15};\dfrac{2\sqrt{30}}{15}\right)\right\}$.

Ví dụ 504. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3 & (1) \\ x+\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}+x}+y^2=0 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Phân tích. *Thấy* (2) *đã có lượng cộng nên* $(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y^2} + y^2 + 2x + 2.(\sqrt{x^2+1} - x) = 3$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y} + y\right)^2 + 2(\sqrt{x^2+1} - x) = 3$ *và* $(2) \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} + y + (\sqrt{1+x} - x) = 0$ *đã có lượng giống nhau ở 2 vế nên sẽ đặt* $a = \sqrt{1+x} - x,\ b = \dfrac{x}{y} + y$. *Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $y \neq 0$. Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x^2}{y^2} + y^2 + 2x\right) + 2\sqrt{x^2+1} - 2x = 3 \\ x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1} + x} + y^2 = 0 \end{cases}$

Liên hợp ở phương trình thứ hai thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y} + y\right)^2 + 2.(\sqrt{x^2+1} - x) = 3 \\ x + y(\sqrt{x^2+1} - x) + y^2 = 0 \end{cases}$

Chia 2 vế cho y ở phương trình thứ 2 thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y} + y\right)^2 + 2(\sqrt{x^2+1} - x) = 3 \\ \left(\dfrac{x}{y} + y\right) + (\sqrt{x^2+1} - x) = 0 \end{cases}$

Đặt $a = \dfrac{x}{y} + y;\ b = \sqrt{x^2+1} - x > 0$ thì $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b = 3 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a;\ b > 0 \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x + y^2 + y = 0 \\ x^2 + 1 = (x+1)^2,\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \{(0;-1)\}$.

e) Dựa vào một số biến đổi đẳng thức cơ bản để tìm ra phép đặt ẩn phụ

Có một số hệ phương trình với bề ngoài nhìn phức tạp, nhưng nếu chúng ta nắm vững những phép biến đổi đẳng thức cơ bản thì sẽ tìm được mối liên hệ giữa hai phương trình cũng như các biến. Từ đó định hướng phép đặt ẩn phù hợp. Trong mục nhỏ này tôi xin được giới thiệu một số phép biến đổi đẳng thức đơn giản sau:

① $\boxed{xy + x + y = \beta \Leftrightarrow (x+1)\cdot(y+1) = \beta + 1}$

Chứng minh: Ta có $xy + x + y = \beta \Leftrightarrow xy + x + y + 1 = \beta + 1$

$\Leftrightarrow x\cdot(y+1) + y + 1 = \beta + 1 \Leftrightarrow (y+1)\cdot(x+1) = \beta + 1$ *(đpcm).*

② $\boxed{x^2 - xy + y^2 = \beta^2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y+\beta} + \dfrac{y}{x+\beta} = 1}$

Chứng minh: Ta có $\frac{x}{y+\beta}+\frac{y}{x+\beta}=1 \Leftrightarrow \frac{x\cdot(x+\beta)+y\cdot(y+\beta)}{(y+\beta)\cdot(x+\beta)}=1$

$\Leftrightarrow x^2+\beta x+y^2+\beta y=xy+\beta y+\beta x+\beta^2 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2=\beta^2$ *(đpcm).*

③ $\boxed{xy=\beta \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{\beta}{y+\beta}=1}$

Chứng minh: Ta có: $\frac{1}{x+1}+\frac{\beta}{y+\beta}=1 \Leftrightarrow \frac{y+\beta+\beta\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(y+\beta)}=1$

$\Leftrightarrow \beta x+y+2\beta=xy+\beta x+y+\beta \Leftrightarrow xy=\beta$ *(đpcm).*

Sau đây ta sẽ tìm hiểu một số ví dụ vận dụng những biến đổi cơ bản này.

Ví dụ 505. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+x+y=3 & (1) \\ \frac{1}{x^2+2x}+\frac{1}{y^2+2y}=\frac{2}{3} & (2) \end{cases}$ (I)

Phân tích. *Đây là hệ đối xứng loại I, nhưng nếu biến đổi về tổng* $S=x+y$ *và* $P=xy$ *thì thu được hệ mới khá phức tạp, gây khó khăn trong việc giải. Nhưng nếu áp dụng biến đổi đẳng thức ① với* $\beta=3$ *thì* $(1)\Leftrightarrow(x+1)\cdot(y+1)=4.$ *Khi đó các mẫu số của (2) viết dưới dạng hằng đẳng thức:* $x^2+2x=(x+1)^2-1$ *và* $y^2+2y=(y+1)^2-1$ *thì sẽ xác định được phép đặt ẩn phụ và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x,\ y\neq 0 \\ x,\ y\neq -2 \end{cases}\cdot$ Khi đó: $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\cdot(y+1)=4 \\ \frac{1}{(x+1)^2-1}+\frac{1}{(y+1)^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=y+1 \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ \frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ 5a^2+5b^2=2a^2b^2+8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ a+b=4 \end{cases} \vee \begin{cases} ab=4 \\ a+b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}.$

Suy ra: $\begin{cases} x+1=2 \\ y+1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1=-2 \\ y+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(1;1);(-3;-3)\}\cdot$

Ví dụ 506. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\frac{x}{y+1}\right)^2+\left(\frac{y}{x+1}\right)^2=1 & (1) \\ 1+xy=x^2+y^2 & (2) \end{cases}$ (I)

Phân tích. *Áp dụng đẳng thức ② với* $\beta = 1$ *thì* $(2) \Leftrightarrow \dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} = 1$ *thì ở cả hai phương trình có những hạng tử giống nhau và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$. Đặt $a = \dfrac{x}{y+1};\ b = \dfrac{y}{x+1}$ thì

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} x = y + 1 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \{(1;0);(0;1)\}$.

Ví dụ 507. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 & (1) \\ \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy} & (2) \end{cases}$ (I)

Đề nghị Olympic 30/04/2012 – Sở GD & ĐT tỉnh Bạc Liêu

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0,\ y \neq 0,\ y \neq -1,\ x \neq -1.$

$$(1) \Leftrightarrow x^3y + y^3x - xy = x^2 + y^2 - x^2y^2 \Leftrightarrow xy.(x^2 + y^2 - 1) = x^2 + y^2 - x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow xy.(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2) + x^2y^2 - xy = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(xy - 1) + xy(xy - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - 1)(x^2 + y^2 + xy) = 0 \Leftrightarrow (xy - 1)\cdot\left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] = 0 \quad (3)$$

Do $\left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} > 0,\ \forall x, y \neq 0$ nên $(3) \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} = 1$ (4)

Ta lại có: $(2) \Leftrightarrow \dfrac{x+1-1}{x+1} + \dfrac{y+1-1}{y+1} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 1 \Leftrightarrow 3 - \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1}\right) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ (5)

Từ (4), (5) suy ra: $(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$ và thế vào $xy = 1$ thì được $x = y = \pm 1$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S = (x;y) = \{(1;1)\}$.

f) Đặt ẩn phụ dạng tổng – hiệu

Ta sẽ đặt ẩn phụ dạng tổng – hiệu $a = x + y,\ b = x - y$ *nếu trong hệ phương trình có chứa những hạng tử thường gặp sau:*

- $2x = a + b.$
- $2y = a - b.$
- $x^2 - y^2 = ab.$
- $2(x^2 + y^2) = a^2 + b^2.$
- $2x(x^2 + 3y^2) = 2(x^3 + 3xy^2) = a^3 + b^3.$
- $2y(3x^2 + y^2) = 2(3x^2y + y^3) = a^3 - b^3.$
- $2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4) = a^4 + b^4.$
- $8xy(x^2 + y^2) = a^4 - b^4 \ldots.$

Việc chứng minh các biểu thức này theo a, b khá nhẹ nhàng, tôi sẽ trình bày thông qua từng ví dụ. Vấn đề ở đây là ta cần nắm vững các dấu hiệu nhận dạng này.

Ví dụ 508. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 2x^2 - 2y^2 = 7 \\ 2(x^2 + y^2) = 5 \end{cases} \quad (I) \qquad (x; y \in \mathbb{R}).$

Phân tích. *Bài toán có chứa các hạng tử* $2x,\ 2(x^2 - y^2),\ 2(x^2 + y^2)$, *đó là dấu hiệu của sự đặt ẩn phụ tổng – tích dạng* $a = x + y,\ b = x - y.$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases}\cdot$ Khi đó: $\begin{cases} 2x = a + b,\ x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = ab \\ 2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2 = a^2 + b^2 \end{cases}.$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2ab = 7 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2ab = 7 \\ (a + b)^2 - 2ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = (a + b)^2 - 5 \\ (a + b)^2 + (a + b) - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \text{(thỏa } S^2 \ge 4P\text{) hoặc } \begin{cases} a + b = -4 \\ ab = 5,5 \end{cases} \text{(loại)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x; y) = \left\{\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}.$

Ví dụ 509. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases} \quad (I) \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Phân tích. *Nếu đặt:* $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ b^2 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}\cdot$ *Khi đó, viết* $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = ab$ *thì tất cả đều biểu diễn được hết theo a và b. Thông thường học sinh sẽ đặt* $a = \sqrt{x + y},\ b = \sqrt{x - y}$, *nhưng làm như thế thì phương trình thứ hai là bậc cao và sẽ rất phức tạp. Đó là lối đi sai lầm thường gặp của học sinh.*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x + y \ge 0 \\ x - y \ge 0 \end{cases}\cdot$ Đặt $\begin{cases} a = x + y \ge 0 \\ b = x - y \ge 0 \end{cases}.$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}-\sqrt{b}=2, \quad (a>b) \\ \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+1-\sqrt{ab}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2\sqrt{ab}+b=4, \quad (a>b) \\ \sqrt{\dfrac{(a+b)^2-2ab+2}{2}}=\sqrt{ab}+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2\sqrt{ab}+4, \quad (a>b) \\ \sqrt{\dfrac{(2\sqrt{ab}+4)^2-2ab+2}{2}}=\sqrt{ab}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2\sqrt{ab}+4, \quad (a>b) \\ \sqrt{ab+8\sqrt{ab}+9}=\sqrt{ab}+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2\sqrt{ab}+4 \\ ab=0, \quad (a>b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=4 \end{cases} \text{(loại) hoặc } \begin{cases} a=4 \\ b=0 \end{cases} \cdot \text{ Suy ra } \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(2;2)\}\cdot$

Ví dụ 510. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+1}+y-x-2\sqrt{x-y}=3 & (1) \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 & (2) \end{cases} \quad (i)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Nguyễn Huệ – Phú Yên

Phân tích. *Bản chất bài toán gần giống như ví dụ trên. Nhưng nếu để ý mối liên hệ giữa hai phương trình, tức từ (1) ta có* $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+1}-(x-y+2\sqrt{x-y})=3$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x-y}\cdot(\sqrt{x-y}+2)=3$ *và thế* $\sqrt{x-y}+2=\sqrt{x+y}$ *từ (2) vào thì sẽ đơn giản hơn, tức* $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x-y}\sqrt{x+y}=3$ *và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}.$

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases}, \ (a>b\ge 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=x^2+2xy+y^2 \\ b^2=x^2-2xy+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}\cdot$

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+1}-(x-y+2\sqrt{x-y})=3 \\ \sqrt{x-y}+2=\sqrt{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x-y}(\sqrt{x-y}+2)=3 \\ \sqrt{x-y}+2=\sqrt{x+y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x-y}.\sqrt{x+y}=3 \\ \sqrt{x-y}+2=\sqrt{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)+1}-\sqrt{ab}=3 \\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=2, \ (a\ge b\ge 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(a+b)^2-2ab+2}{2}}=\sqrt{ab}+3 \\ a+b-2\sqrt{ab}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(2\sqrt{ab}+4)^2-2ab+2}{2}}=\sqrt{ab}+3 \\ a+b=2\sqrt{ab}+4, \ (a>b\ge 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{ab+8\sqrt{ab}+9}=\sqrt{ab}+3 \\ a+b=2\sqrt{ab}+4, \ (a>b\ge 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phường trình là $S=(x;y)=\{(2;2)\}\cdot$

Ví dụ 511. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}-y=1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học năm 2013 – THPT Phúc Trạch – Hà Tĩnh

Phân tích. *Thấy* $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+6}=y+1\Leftrightarrow x^2-y^2+2(x-y)+5=0$ *có chứa các hạng tử* x^2-y^2, $2(x-y)$. *Đó là dấu hiệu nhận dạng đặt ẩn phụ tổng – hiệu. Khi đó, ta cần biến đổi phương trình hai vế dạng tổng – hiệu bằng việc phân tích vế trái , tức:* $x^2+xy+y^2=m(x+y)^2-n(x-y)^2=(m-n)x^2+(2m+2n)xy+(m-n)y^2$ *đồng nhất hệ số được* $\begin{cases} m-n=1 \\ 2m+2n=1 \end{cases}\Rightarrow m=\frac{3}{4};\ n=\frac{1}{4}$ *nên viết* $(2)\Leftrightarrow\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2=7.$

Từ những phân tích này, ta có lời giải chi tiết như sau:

Lời giải. Điều kiện: $y\ge -1$ thì $(I)\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+2x+6=1+2y+y^2 \\ \frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2=7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-y^2+2(x-y)=-5 \\ 3(x+y)^2+(x-y)^2=28 \end{cases}$ (II). Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases}$, suy ra: $ab=x^2-y^2$.

$$(II)\Leftrightarrow\begin{cases} b(a+2)=-5 \\ 3a^2+b^2=28 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-\dfrac{5}{a+2} \\ 3a^2+\left(-\dfrac{5}{a+2}\right)^2=28 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(-3;2);(1;2)\}\cdot$

Ví dụ 512. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-2x=y^4-y & (1) \\ (x^2-y^2)^3=3 & (2) \end{cases}$ (I)

Chọn đội tuyển trường THPT Chuyên, ĐHSP Hà Nội năm 2013

Phân tích. *Nếu đặt* $a=x+y,\ b=x-y$ *thì* $(1)\Leftrightarrow x^4-y^4=2x-y$, *trong đó sẽ phân tích:* $x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ *với* $\begin{cases} a^2=x^2+2xy+y^2 \\ b^2=x^2-2xy+y^2 \end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}$, *tức* $x^4-y^4=ab\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot$ *Còn* $2x-y=m.(x+y)+n.(x-y)=(m+n).x+(m-n).y$ *và đồng nhất hệ số được hệ* $\begin{cases} m+n=2 \\ m-n=-1 \end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2},\ n=\frac{3}{2}$, *tức viết* $2x-y=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b.$

Khi đó $(2)\Leftrightarrow[(x-y)(x+y)]^3=3\Leftrightarrow(ab)^3=3.$ *Tất cả đều biểu diễn hết theo a, b.*

Lời giải. Đặt $a = x + y,\ b = x - y$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = \dfrac{1}{2}(x+y) + \dfrac{3}{2}(x-y) \\ \left[(x-y)(x+y)\right]^3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab \cdot \dfrac{a^2 + b^2}{2} = \dfrac{a + 3b}{2} \\ (ab)^3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab(a^2 + b^2) = a + 3.b \\ \qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad 3 = (ab)^3 \quad (*) \end{cases} \Rightarrow ab(a^2 + b^2) = a + a^3b^4 \Leftrightarrow a(a^2b + b^3 - 1 - a^2b^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left[(b^3 - 1) + a^2b(1 - b^3)\right] = 0 \Leftrightarrow a(b^3 - 1)(a^2b - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 1 \vee a^2b = 1.$$

- Với $a = 0$, thế vào $(*) \Leftrightarrow (ab)^3 = 3 = 0$: vô lý nên hệ vô nghiệm khi $a = 0$.
- Với $b = 1$, thế vào $(*) \Leftrightarrow a^3 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{3}$, suy ra: $\begin{cases} x + y = \sqrt[3]{3} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 + \sqrt[3]{3}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{3} - 1}{2} \end{cases}$.
- Với $a^2b = 1 \Leftrightarrow ab = \dfrac{1}{a}$, thế vào $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^3} = 3 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow b = \sqrt[3]{9}$.

  Suy ra: $\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ x - y = \sqrt[3]{9} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}; -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{1+\sqrt[3]{3}}{2}; \dfrac{\sqrt[3]{3} - 1}{2}\right); \left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}; -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\right\}$.

Bình luận. *Trong lời giải trên, ngoài việc đặt ẩn phụ để bài toán đơn giản hơn, trong* $(*)$ *tôi đã sử dụng phép thế "hằng số" bằng "cụm biến" nhằm đưa phương trình về dạng tích số như trên. Để hiểu kỹ hơn vấn đề này, ta cùng xét tiếp ví dụ sau:*

Ví dụ 513. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - y^4 = \dfrac{3}{4y} - \dfrac{1}{2x} \\ (x^2 - y^2)^5 + 5 = 0 \end{cases} \qquad (I)$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0,\ y \neq 0$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = 3x - 2y \\ \left[(x-y)(x+y)\right]^5 + 5 = 0 \end{cases}. \text{ Đặt } \begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ b^2 = x^2 - 2xy + y^2 \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 4xy \\ a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2) \end{cases}$ và $3x - 2y = \dfrac{1}{2}\left[(x+y) + 5(x-y)\right] = \dfrac{1}{2}(a + 5b)$.

Khi đó hệ $\begin{cases} ab(a^4 - b^4) = a + 5.b \\ \qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad -a^5b^5 = 5 \quad (*) \end{cases}$ và thế $5 = -a^5b^5$ vào phương trình trên được:

$ab(a^4-b^4)=a-a^5b^6 \Leftrightarrow a(a^4b-b^5-1+a^4b^6)=0 \Leftrightarrow a\left[a^4b(1+b^5)-(1+b^5)\right]=0$

$\Leftrightarrow a(1+b^5)(a^4b-1)=0 \Leftrightarrow a=0$ hoặc $b=-1$ hoặc $a^4b=1.$

- Với $a=0,$ thì $(*) \Leftrightarrow 0=5:$ vô nghiệm.
- Với $b=-1,$ thì $(*) \Leftrightarrow a^5=5 \Leftrightarrow a=\sqrt[5]{5},$ suy ra: $\begin{cases} x+y=\sqrt[5]{5} \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt[5]{5}-1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[5]{5}+1}{2} \end{cases}.$
- Với $a^4b=1 \Leftrightarrow ab.a^3=1 \Leftrightarrow ab=\dfrac{1}{a^3}$ thì $(*) \Leftrightarrow -\left(\dfrac{1}{a^3}\right)^5=5 \Leftrightarrow a^{15}=-\dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} \Rightarrow b=\sqrt[15]{5^4}$ suy ra $\begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} \\ x-y=\sqrt[15]{5^4} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[15]{5^5}-1}{2.\sqrt[15]{5}};-\dfrac{\sqrt[15]{5^5}+1}{2.\sqrt[15]{5}}\right).$

Kết luận: So điều kiện $\Rightarrow S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{\sqrt[5]{5}-1}{2};\dfrac{\sqrt[5]{5}+1}{2}\right);\left(\dfrac{\sqrt[15]{5^5}-1}{2.\sqrt[15]{5}};-\dfrac{\sqrt[15]{5^5}+1}{2.\sqrt[15]{5}}\right)\right\}.$

Ví dụ 514. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 & (1) \\ x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1} & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R}).$

Phân tích. *Ở (2), nhận thấy x và y độc lập 1 vế, nên hướng suy nghĩ thường là hàm số, nhưng sẽ bị bế tắc do không tìm được hàm đặc trưng ở hai vế. Nếu để ý, ta có thể biến đổi* $(2) \Leftrightarrow x-\sqrt{y^2-1}=y-\sqrt{x^2+1}$ *và đặt điều kiện rồi lũy thừa sẽ tìm được mối liên hệ giữa x, y. Ngoài ra, nếu nhìn thoáng, ta sẽ liên hợp cũng xuất hiện được nhân tử* $x^2=y^2-1 \Leftrightarrow x^2-y^2=-1$ *cùng với (1) để kết thúc bằng việc đặt ẩn tổng – hiệu.*

Lời giải. Điều kiện: $|y|\ge 1.$ Ta có: $(1) \Leftrightarrow (x+y)^2+3(x-y)^2=4 \quad (3)$

$(2) \Leftrightarrow x-\sqrt{y^2-1}=y-\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{y^2-1}\ge 0,\ y-\sqrt{x^2+1}\ge 0 & (*) \\ -1-2x\sqrt{y^2-1}=1-2y\sqrt{x^2+1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow y\sqrt{x^2+1}=1+x\sqrt{y^2-1} \Leftrightarrow x^2y^2+y^2=1+2x\sqrt{y^2-1}+x^2y^2-x^2$

$\Leftrightarrow (y^2-1)-2x\sqrt{y^2-1}+x^2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{y^2-1}-x)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1}=x$

$\Leftrightarrow x^2-y^2=-1 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)=-1 \quad (4)$

Từ (3), (4), suy ra hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)^2+3(x-y)^2=4 \\ (x+y)(x-y)=-1 \end{cases} \quad (I)$

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases}$ thì hệ $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+3b^2=4 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{b},\ (a,\ b\ne 0) \\ 3b^4-4b^2+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ a=-\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ a=\sqrt{3} \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-y=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x+y=-\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x+y=\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Kết luận: So với $(*)$ và điều kiện thì nghiệm hệ là $(x;y)=\left\{(0;1);\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$.

Ví dụ 515. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2+\dfrac{4xy}{x+y}=1 & (1) \\ \sqrt{3x+y}+4x=(3x+y-6)^2+4\sqrt{x+y} & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt – Kiên Giang

***Phân tích**. (1) có các hạng tử dạng tổng hiệu, nếu đặt $a=x+y>0$, $b=x-y$ và suy ra $4xy=a^2-b^2$ thì $(1)\Leftrightarrow b^2+\dfrac{a^2-b^2}{a}=1\Leftrightarrow (a-1)(b^2+a)=0\Leftrightarrow a=1$. Từ đó tìm được mối liên hệ giữa x, y, thế vào (2) sẽ tìm được x, y và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 3x+y\ge 0 \\ x+y>0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a=x+y>0 \\ b=x-y \end{cases}$, suy ra: $4xy=a^2-b^2$.

$(1)\Leftrightarrow b^2+\dfrac{a^2-b^2}{a}=1\Leftrightarrow (ab^2-b^2)+(a^2-a)=0\Leftrightarrow b^2(a-1)+a(a-1)=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(b^2+a)=0\Leftrightarrow a-1=0\Leftrightarrow a=1$, do: $b^2+a>0,\ \forall a>0$.

Suy ra: $x+y=1$ và thế vào $(2)\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=(2x-5)^2-4x+4$ (3)

Đặt $5-2t=\sqrt{2x+1}$, $\left(t\le \dfrac{5}{2}\right)$. Suy ra hệ: $\begin{cases} (5-2t)^2=2x+1 \\ 5-2t=(2x-5)^2-4x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t-5)^2=2x+1 & (*) \\ (2x-5)^2=4x-2t+1 \end{cases} \Rightarrow (2t-5)^2-(2x-5)^2=2t-2x$

$\Leftrightarrow (t-x)(2t+2x-10)-(t-x)=0\Leftrightarrow t=x$ hoặc $2t+2x=11$.

- Với $t=x\Rightarrow \sqrt{2x+1}=5-2x\Leftrightarrow \begin{cases} (5-2x)^2=2x+1 \\ x+y=1,\ 5-2x\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-11x+12=0 \\ x+y=1,\ 5-2x\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 4$ (loại do $x \le \frac{5}{2}$) hoặc $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$.

- Với $2t + 2x = 11$ và kết hợp với $(*)$ được hệ: $\begin{cases} 2t + 2x = 11 \\ (2t-5)^2 = 2x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 11 - 2x \\ (6-2x)^2 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 11 - 2x \\ 4x^2 - 26x + 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{29}}{4} \Rightarrow t = \frac{9 \mp \sqrt{29}}{4}$.

Do $t \le \frac{5}{2}$ nên nhận $x = \frac{13+\sqrt{29}}{4}$ và thế vào $x + y = 1$, suy ra: $y = \frac{-9-\sqrt{29}}{4}$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm $(x;y) = \left\{ \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right); \left(\frac{13+\sqrt{29}}{4}; -\frac{9+\sqrt{29}}{4} \right) \right\}$.

Bình luận. *Để giải trọn vẹn hệ phương trình, ngoài những dấu hiệu cơ bản của việc giải hệ, ta cần nắm vững các dấu hiệu nhận dạng và phương pháp giải của phương trình. Bởi lẻ khi tìm được mối liên hệ giữa x, y và thế vào phương trình còn lại, sẽ trở về việc xử lý phương trình vô tỷ. Ở bài toán trên, phương trình có dạng tổng quát:* $(ax+b)^n = p.\sqrt[n]{\alpha x + \beta} + q.x + r$ *sẽ đặt* $ay + b = \sqrt[n]{\alpha x + \beta}$ *khi* $p.\alpha > 0$ *hoặc sẽ đặt ẩn phụ* $-(ay+b) = \sqrt[n]{\alpha x + \beta}$ *khi* $p.\alpha < 0$ *để đưa về hệ đối xứng loại II hoặc gần đối xứng.*

Ví dụ 516. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 & (1) \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Học sinh giỏi tỉnh Bình Định năm 2015

Phân tích. *Đây là bài toán mang ý tưởng tổng – hiệu:* $a = x + y$, $b = x - y$. *Nhận thấy:* $2x = (x+y) + (x-y) = a + b$ *và cần phân tích* $4xy + 4(x^2+y^2)$ *theo a, b. Khi đó viết:* $4xy + 4(x^2+y^2) = m.(x+y)^2 + n.(x-y)^2 = (m+n)x^2 + (2m-2n)xy + (m+n)y^2$

và đồng nhất: $\begin{cases} m + n = 4 \\ 2m - 2m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$ *hay có* $4xy + 4(x^2+y^2) = 3(x+y)^2 + (x-y)^2$.

Lúc này hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ (x+y) + (x-y) + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$ *và do* $m = 3$, *giống hệ số của phân số nên để đặt ẩn phụ triệt để ta viết hệ lại:* $\begin{cases} 3\left[(x+y)^2 + \dfrac{1}{(x+y)^2} \right] + (x-y)^2 = 7 \\ \left[(x+y) + \dfrac{1}{(x+y)} \right] + (x-y) = 3 \end{cases}$

nên đặt $a=(x+y)+\dfrac{1}{(x+y)}\Rightarrow a^2=(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}+2$ *và* $b=x-y$ *thì bài toán sẽ ngắn gọn hơn, tránh đặt ẩn phụ 2 lần. Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x+y\neq 0$. Đặt $a=x+y+\dfrac{1}{x+y},\ \left(|a|\geq 2\right)$ và $b=x-y$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2+b^2=13\\ a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-a\\ 2a^2-3a-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases},\ \left(\text{do}:|a|\geq 2\right).$$

Suy ra: $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x+y}=2\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\ (x+y)^2-2(x+y)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(1;0)\right\}\cdot$

Ví dụ 517. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}\quad (I)\ \ (x;y\in\mathbb{R}).$

Học sinh giỏi tỉnh Thái Nguyên năm 2011

Phân tích. *Tương tự, viết* $\begin{cases}2x=(x+y)+(x-y)\\ 8(x^2+y^2)+4xy=5(x+y)^2+3(x-y)^2\end{cases}$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x+y\neq 0$. Đặt $a=x+y+\dfrac{1}{x+y},\ \left(|a|\geq 2\right)$ và $b=x-y$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}5\cdot\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13\\ (x+y)+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5(a^2-2)+3b^2=13\\ a+b=1;\ |a|\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}.$$

Thế trở lại $a,\ b$ và giải tương tự, ta được nghiệm hệ là $(x;y)=(0;1)$.

Ví dụ 518. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(4x^2-4xy+4y^2-51)(x-y)^2+3=0 & (1)\\ (2x-7)(x-y)+1=0 & (2)\end{cases}\quad (I)$

Phân tích. *Bản chất bài toán này cũng tương tự 2 ví dụ trên nếu chia (1) cho* $(x-y)^2$ *và chia (2) cho* $x-y$ *thì hệ* $\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+4y^2-4xy-51+\dfrac{3}{(x-y)^2}=0\\ 2x-7+\dfrac{1}{x-y}=0\end{cases}\cdot$ *Với lối suy luận tương tự như các ví dụ trên, ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Do $x=y$ thì hệ đã cho vô nghiệm. Với $x\neq y$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4y^2-4xy-51+\dfrac{3}{(x-y)^2}=0 \\ 2x-7+\dfrac{1}{x-y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-y)^2+\dfrac{3}{(x-y)^2}+(x+y)^2=51 \\ x-y+\dfrac{1}{x-y}+x+y=7 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=x-y+\dfrac{1}{x-y} \\ b=x+y,\ |a|\ge 2 \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(a^2-2)+b^2=51 \\ a+b=7 \\ |a|\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7-a \\ 2a^2-7a-4=0 \\ |a|\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} x-y+\dfrac{1}{x-y}=4 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ 2x^2-10x+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{2};\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 519. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}} & (1) \\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9 & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Bình Định năm 2014

Phân tích. *Bài toán mang ý tưởng tổng hiệu. Nhưng do biểu thức tổng hiệu tất cả đều nằm trong căn thức nên có thể đặt a, b là 2 căn thức để đơn giản và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$. Đặt: $a=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}\ge 0,\ b=\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}\ge 0.$

Suy ra: $\begin{cases} x=a^2+b^2 \\ y=a^2-b^2 \end{cases}$ và $(1)\Leftrightarrow \dfrac{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)+2(a^2-b^2)ab}{14}=a+b$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2)(a-b)(a+b)+(a-b)(a+b)ab=7(a+b)$ và do $a+b>0$ nên:

$\Leftrightarrow (a^2+b^2)(a-b)+ab(a-b)=7 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=7 \Leftrightarrow a^3-b^3=7$ (3)

Từ (2), (3), được: $\begin{cases} a^3-b^3=7 \\ a^3+b^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3=8 \\ b^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(5;3)\}$.

Ví dụ 520. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+2xy-y^2=6(x+y+1) & (1) \\ 4(x^4+2x^3y+x^2y^2)=2x+2y+9 & (2) \end{cases}$ (I)

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Hùng Vương – Bình Dương

Phân tích. *Nhận thấy nếu biểu diễn:* $3x^2+2xy-y^2$ *và* $4(x^4+2x^3y+x^2y^2)$ *theo dạng tổng* $x+y=a,$ *hiệu* $x-y=b$ *thì bài toán được giải quyết. Thật vậy ở vế trái (1) có dạng hằng đẳng thức nên viết* $VT_{(1)}=3x^2+2xy-y^2=(x^2+2xy+y^2)+2(x^2-y^2)$ $=(x+y)^2+2(x-y)(x+y)=a^2+2ab.$ *Vấn đề còn lại là biểu diễn vế trái (2) theo a, b.* $VT_{(2)}=4(x^4+2x^3y+x^2y^2)=4x^2(x^2+2xy+y^2)=\left[(x+y)+(x-y)\right]^2.(x+y)^2.$ *Do đó ta sẽ đặt ẩn phụ dạng tổng hiệu để bài toán đơn giản hơn và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Ta có: $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2+2(x+y)(x-y)=6.(x+y)+6\\ \left[(x+y)+(x-y)\right]^2\cdot(x+y)^2=2(x+y)+9\end{cases}\quad(II)$

Đặt $\begin{cases}a=x+y\\ b=x-y\end{cases}$ thì $(II)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2ab=6a+6\\ (a+b)^2\cdot a^2=2a+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2ab=-a^2+6a+6\\ \left[(a+b).a\right]^2=2a+9\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab=\dfrac{6a+6-a^2}{2}\ (*)\\ (a^2+ab)^2=2a+9\end{cases}\Rightarrow\left(a^2+\dfrac{6a+6-a^2}{2}\right)^2=2a+9\Leftrightarrow(a^2+6a+6)^2=8a+72$$

$$\Leftrightarrow a^4+12a^3+48a^2+64a=0\Leftrightarrow a(a^3+12a^2+48a+64)=0\Leftrightarrow a.(a+4)^3=0$$

$\Leftrightarrow a=0$ (loại do thế vào $(*)$ có dạng $0=3$) hoặc $a=-4$ và từ $(*)\Rightarrow b=\dfrac{17}{4}\cdot$

Với $\begin{cases}a=-4\\ b=\dfrac{17}{4}\end{cases}$ suy ra: $\begin{cases}x+y=-4\\ x-y=\dfrac{17}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{8}\\ y=-\dfrac{33}{8}\end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{8};-\dfrac{33}{8}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 521. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)=5\\ 2(x^2+y^2)\cdot\left[1+\dfrac{1}{(x^2-y^2)^2}\right]=\dfrac{17}{2}\end{cases}\quad(I)$

Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 444 (6 – 2014)

Lời giải. Điều kiện: $x\ne\pm y.$ Đặt $\begin{cases}a=x+y\\ b=x-y\end{cases},$ suy ra $\begin{cases}a+b=2x,\ ab=x^2-y^2\\ a^2+b^2=2(x^2+y^2)\end{cases}.$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)=5\\ (a^2+b^2)\left(1+\dfrac{1}{a^2b^2}\right)=\dfrac{17}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)=5\\ \left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+\dfrac{1}{b^2}\right)=\dfrac{17}{2}\end{cases}\quad(II)$$

Đặt $u = a + \frac{1}{a},\ v = b + \frac{1}{b},\ \left(|u| \ge 2,\ |v| \ge 2\right) \Rightarrow u^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2,\ v^2 = b^2 + \frac{1}{b^2} + 2.$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ 2(u^2 + v^2) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ (u+v)^2 - 2uv = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ 4uv = 25 \end{cases}.$$

Theo Viét thì $u,\ v$ là 2 nghiệm của phương trình: $X^2 - 5X + \frac{25}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{5}{2},\ \text{suy ra: } u = v = \frac{5}{2}:\ \text{thỏa } |u| \ge 2,\ |v| \ge 2.$$

Do đó: $\begin{cases} 2a^2 - 5a + 2 = 0 \\ 2b^2 - 5b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \ \vee\ a = 0,5 \\ b = 2 \ \vee\ b = 0,5 \end{cases}\cdot$ Có các trường hợp sau:

- Trường hợp 1. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}:$ thỏa điều kiện.
- Trường hợp 2. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right):$ thỏa điều kiện.
- Trường hợp 3. $\begin{cases} a = 0,5 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0,5 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right):$ thỏa điều kiện.
- Trường hợp 4. Khi $\begin{cases} a = 0,5 \\ b = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0,5 \\ x - y = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 0 \end{cases}:$ thỏa điều kiện.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(2;0);\left(\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right);\left(\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right);\left(\frac{1}{2};0\right)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Trong lời giải trên, sau khi đặt ẩn phụ dạng tổng – hiệu, lại tiếp tục đặt ẩn phụ dạng thuận nghịch. Đối với dạng thuận nghịch loại này, ta thường nhầm lẫn giữa 2 loại, một là loại đặt* $a = x + \frac{1}{x},\ b = y + \frac{1}{y}$ *và hai là loại* $a = x + \frac{1}{y},\ b = y + \frac{1}{x}\cdot$ *Sau đây ta cùng tìm hiểu dấu hiệu nhận dạng của từng loại trên:*

① ***Đặt ẩn phụ dạng***: $a = x + \frac{1}{x},\ b = y + \frac{1}{y}\cdot$

Dấu hiệu nhận dạng: Các phương trình trong hệ chứa các hạng tử quen thuộc như:

- $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = a^2.$
- $y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 = b^2.$
- $(x+y)\cdot\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = a + b.$
- $(x^2 + y^2)\cdot\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) + 4 = a^2 + b^2.$
- $xy + \frac{1}{xy} + \frac{x^2 + y^2}{xy} = ab.$
- $\frac{y}{x}\cdot\frac{x^2+1}{y^2+1} = \frac{a}{b}\cdot$

Chứng minh các biểu thức này khá đơn giản, sẽ trình bày chi tiết trong từng ví dụ.

② ***Đặt ẩn phụ dạng***: $a = x + \dfrac{1}{y},\ b = y + \dfrac{1}{x}\cdot$

Dấu hiệu nhận dạng: Các phương trình trong hệ chứa các hạng tử quen thuộc như:

- $(x+y)\cdot\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = a+b.$
- $(x-y)\cdot\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = a-b.$
- $xy + \dfrac{1}{xy} + 2 = ab.$
- $(x^2+y^2)\cdot\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2 = a^2+b^2.$

Để tìm hiểu kỹ 2 loại này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 522. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9 \end{cases} \quad (I)$

Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}\cdot$ Đặt: $\begin{cases} a = x + \dfrac{1}{x} \\ b = y + \dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2 - 2 \\ y^2 + \dfrac{1}{y^2} = b^2 - 2 \end{cases}.$

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ (a+b)^2 - 2ab = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}.$

- Với $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ y + \dfrac{1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}\cdot$
- Với $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 3 \\ y + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(1;\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2};1\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 523. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{x^2+y^2}{xy} = 5 \\ (x+y)\cdot\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 6 \end{cases} \quad (I) \qquad (x;y \in \mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $xy \neq 0.$

Đặt: $\begin{cases} a = x + \dfrac{1}{x} \\ b = y + \dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.b = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = xy + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{xy} = xy + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{x^2 + y^2}{xy} \\ a + b = x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = x + y + \dfrac{x+y}{xy} = (x+y)\cdot\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) \end{cases}$.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ y + \dfrac{1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 3 \\ y + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(1;\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2};1\right)\right\}$.

Ví dụ 524. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)(1+xy) = 18xy & (1) \\ (x^2+y^2)(1+x^2y^2) = 208x^2y^2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Lời giải. Với $(x;y) = (0;0)$ là một nghiệm của hệ (I).

Với $xy \neq 0$, chia hai vế (1) cho xy và hai vế của (2) cho x^2y^2 được:

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\cdot\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 18 \\ (x^2+y^2)\cdot\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 208 \end{cases}$ (II). Đặt $\begin{cases} a = x + \dfrac{1}{x} \\ b = y + \dfrac{1}{y} \end{cases}$ thì $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 18 \\ a^2 + b^2 = 212 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 18 \\ (a+b)^2 - 2ab = 212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 18 \\ ab = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 14 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 14 \\ b = 4 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a = 4 \\ b = 14 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 4 \\ y + \dfrac{1}{y} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y^2 - 14y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ y = 7 + 4\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} \\ y = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$.

- Với $\begin{cases} a = 14 \\ b = 4 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x^2 - 14x + 1 = 0 \\ y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \pm 4\sqrt{3} \\ y = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm $S = (x;y) = \left\{(0;0);(2 \pm \sqrt{3};7 \pm 4\sqrt{3});(7 \pm 4\sqrt{3};2 \pm \sqrt{3})\right\}$.

Ví dụ 525. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-y-xy^2=2xy(1-x) \\ (x^2+2y^2)\cdot\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=12 \end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $xy\neq 0$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-y-xy^2=2xy-2x^2y \\ (x^2+2y^2)\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}+\dfrac{2}{xy}\right)=12 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (2x+2x^2y)-(y+xy^2)=2xy \\ x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2x}{y}+2y^2+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4y}{x}=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2x.(xy+1)-y.(xy+1)=2.xy \quad (*) \\ \left(x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)+2\left(y^2+2\cdot y\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=12 \end{cases}$$ và chia (2) vế $(*)$ cho xy:

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2\cdot\dfrac{xy+1}{y}-\dfrac{xy+1}{x}=2 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+2\cdot\left(\dfrac{1}{x}+y\right)^2=12 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\cdot\left(x+\dfrac{1}{y}\right)-\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=2 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+2\cdot\left(\dfrac{1}{x}+y\right)^2=12 \end{cases}\quad (II)$$

Đặt $a=x+\dfrac{1}{y};\ b=y+\dfrac{1}{x}$ thì hệ $(II)\Leftrightarrow\begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2+2b^2=12 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2a-2 \\ 9a^2-16a-4=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}\vee\begin{cases} a=-\dfrac{2}{9} \\ b=-\dfrac{22}{9} \end{cases},\text{ suy ra: }\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ y+\dfrac{1}{x}=2 \end{cases}\vee\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{9} \\ y+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{22}{9} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\{(1;1)\}\cdot$

Ví dụ 526. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+y^2)\cdot\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=8 & (1) \\ xy.(2x+y-6)+y+2x=0 & (2) \end{cases}$ (I)

Lời giải. Điều kiện: $xy\neq 0$. Đặt: $a=x+\dfrac{1}{y};\ b=y+\dfrac{1}{x}\cdot$

Có: $(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=\left(x^2+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)+y^2+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

$=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=a^2+b^2$ hay $(1)\Leftrightarrow a^2+b^2=8$ (3)

Chia 2 vế (2) cho xy thì $(2)\Leftrightarrow 2x+y-6+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=0\Leftrightarrow 2\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+y+\dfrac{1}{x}=6$ (4)

Từ (3), (4), suy ra: $\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ 2a+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6-2a \\ 5a^2-24a+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{14}{5} \\ b=\dfrac{2}{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a=\dfrac{14}{5} \\ b=\dfrac{2}{5} \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{14}{5} \\ y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5xy-14y+5=0 \\ 5xy-2x+5=0 \end{cases}$: vô nghiệm.
- Với $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ y+\dfrac{1}{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-2y+1=0 \\ xy-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\{(1;1)\}$.

Ví dụ 527. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^3+y^3)\cdot\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3=\dfrac{125}{4} \\ (x^2+y^2)\cdot\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=\dfrac{25}{2} \end{cases}$ (I) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $xy\neq 0$. Đặt: $a=x+\dfrac{1}{y};\ b=y+\dfrac{1}{x}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\left(y^2+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=a^2+b^2 \\ (x^3+y^3)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3=x^3\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3+y^3\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^3+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^3=a^3+b^3 \end{cases}$$

Ta có: $(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)+y^2+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{1}{x^2}=a^2+b^2=8$ (1)

$(I)\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2)=25 \\ 4(a^3+b^3)=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left[(a+b)^2-2ab\right]=25 \\ 4\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]=125 \end{cases}$ và đặt $\begin{cases} S=a+b \\ P=ab \end{cases}$, thì:

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(S^2-2P)=25 \\ 4(S^3-3SP)=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ P=\dfrac{25}{4} \end{cases}$ (thỏa $S^2\geq 4P$) hoặc $\begin{cases} S=\dfrac{-5\pm 5\sqrt{3}}{2} \\ P=\dfrac{25\pm 25\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ (loại).

Do đó : $\begin{cases} a+b=5 \\ 4ab=25 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\dfrac{5}{2}$ từ đó suy ra được: $(x;y)=(2;2);\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Dạng 4. Đặt ẩn phụ bằng cách lượng giác hóa

Để giải hệ bằng phương pháp lượng giác hóa, ta cần nắm vững công thức lượng giác cũng như phương pháp giải phương trình lượng giác. Từ phương trình hoặc hai phương trình của hệ, ta tìm tòi đặc điểm về ***sự tương đồng giữa các biến với công thức lượng giác*** *để tìm ra phép đặt ẩn phụ bởi hàm lượng giác phù hợp.*

Ví dụ 528. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=1 & (1) \\ \sqrt{2}(x-y).(1+4xy)=\sqrt{3} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lê Quí Đôn – Khánh Hòa

Phân tích*. Phương trình (1) gợi ta đến công thức lượng giác* $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ *nên ta sẽ đặt:* $x=\sin\alpha,\ y=\cos\alpha$ *với* $\alpha\in[0;2\pi]$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Đặt $x=\sin\alpha,\ y=\cos\alpha$ với $\alpha\in[0;2\pi]$.

$$(2)\Leftrightarrow(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+2\sin2\alpha)=\frac{\sqrt{6}}{2}\qquad(*)$$

$$\Leftrightarrow\sin\alpha+2\sin\alpha\sin2\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha\sin2\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sin\alpha+(\cos\alpha-\cos3\alpha)-\cos\alpha-(\sin\alpha+\sin3\alpha)=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sin3\alpha+\cos3\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\alpha+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=-\frac{7}{36}+\frac{k2\pi}{3}\\ \alpha=\frac{13\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in\left[0;2\pi\right]$, suy ra: $\alpha\in\left\{\frac{17\pi}{36};\frac{41\pi}{36};\frac{65\pi}{36};\frac{13\pi}{36};\frac{37\pi}{36};\frac{61\pi}{36}\right\}$.

Kết luận: $(x;y)=(\sin\alpha;\cos\alpha)$ với $\alpha\in\left\{\frac{17\pi}{36};\frac{41\pi}{36};\frac{65\pi}{36};\frac{13\pi}{36};\frac{37\pi}{36};\frac{61\pi}{36}\right\}$.

Bình luận*. Phương trình lượng giác* $(*)$ *có dạng hiệu tích (dạng đối xứng). Thông thường ta sẽ đặt* $t=$ *hiệu và lũy thừa lên sẽ suy ra được lượng tích số. Nhưng nếu làm như thế sẽ ra phương trình bậc 3 nghiệm lẻ, gây khó khăn cho việc giải. Để khắc phục điều đó, tôi đã phân phối và áp dụng công thức tích thành tổng để đơn giản đi được những lượng giống nhau và có lời giải như trên.*

Ví dụ 529. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y & (1) \\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Đại học khối A năm 2012

Phân tích. *Nếu các bạn để ý thì bài này tôi đã trình bày rồi với nhiều cách khác nhau. Tùy vào nhìn nhận và thế mạnh của mình mà ta chọn phương pháp giải phù hợp. Với biến đổi* $(2)\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$ *gọi ta đến công thức* $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. *Khi đó đặt* $x-\frac{1}{2}=\cos\alpha$ *và* $y+\frac{1}{2}=\sin\alpha$ *với* $\alpha\in\left[0;2\pi\right]$ *thì có lời giải khác như sau:*

Lời giải. Hệ phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3-3(x^2+y^2)+22=9(x-y) & (*)\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}x-\frac{1}{2}=\cos\alpha\\ y+\frac{1}{2}=\sin\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\cos\alpha+\frac{1}{2}\\ y=\sin\alpha-\frac{1}{2}\end{cases}$, $\alpha\in\left[0;\ 2\pi\right]$. Khi đó phương trình $(*)$ viết:

$$\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)^3-\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^3-3\left[\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right]+13=9(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$$\Leftrightarrow(1+\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{2}+\cos\alpha\sin\alpha-\frac{31}{4}\right)-3(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{35}{2}\quad(**)$$

Đặt $t=\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, $|t|\le\sqrt{2}\Rightarrow\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1-t^2}{2}\cdot$

$(**)\Leftrightarrow 2t^3+39t-41=0\Leftrightarrow(t-1)\cdot(2t^2+2t+41)=0\Leftrightarrow t=1.$

Suy ra: $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=k2\pi\\ \alpha=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Do $k\in\mathbb{Z}$ và $\alpha\in\left[0;2\pi\right]$ nên chọn: $\alpha=0$ hoặc $\alpha=2\pi$ hoặc $\alpha=\frac{3\pi}{2}\cdot$

Với $\left[\begin{array}{l}\alpha=0\\ \alpha=2\pi\end{array}\right.$, suy ra: $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và với $\alpha=2\pi$, suy ra: $(x;y)=\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)\cdot$

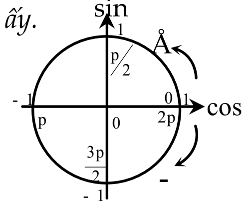
Kết luận: Các nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)\cdot$

Ví dụ 530. Giải hệ: $\begin{cases}x+3y^2-2y=0 & (1)\\ 36(x\sqrt{x}+3y^3)-27(4y^2-y)+(2\sqrt{3}-9)\sqrt{x}=1 & (2)\end{cases}$

Olympic 30/04 năm 2013

Phân tích. *Trong bài này công thức lượng giác che dấu khá kỹ. Nếu ta nhân thêm 3 ở hai vế của* $(1)\Leftrightarrow 3x+9y^2-6y=0\Leftrightarrow(\sqrt{3x})^2+(3y-1)^2=1$. *Khi đó dựa vào công thức lượng giác* $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ *ta sẽ chọn được lượng đặt ẩn phụ phù hợp. Tức*

đặt $\sqrt{3x} = \sin\alpha,\ 3y - 1 = \cos\alpha$ *và cần quan tâm đến điều kiện x, y để đối chiếu với điều kiện này trên vòng tròn lượng giác để tìm điều kiện cho* α *hợp lý. Đối với hai ví dụ trên thì điều kiện là* $x;\ y \in [-1;1]$ *nên ta chọn* $\alpha \in [0;2\pi]$. *Còn ở đây thì* $x \ge 0$ *và* $-1 \le 3y - 1 \le 1$ *nên ta chọn sao cho* $\sqrt{3x} = \sin\alpha \ge 0$ *và* $-1 \le \cos\alpha \le 1$. *Từ vòng tròn lượng giác của hình vẽ, thấy* $\alpha \in [0;\pi]$ *thỏa mãn điều kiện ấy.*



Lời giải. Ta có: (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2 + (3y-1)^2 = 1$.

Suy ra: $\begin{cases} 0 \le \sqrt{3x} \le 1 \\ -1 \le 3y - 1 \le 1 \end{cases}$ · Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x} = \sin\alpha \\ 3y - 1 = \cos\alpha \end{cases}$, $\alpha \in [0;\pi]$·

$$(2) \Leftrightarrow 4\sqrt{3}\sin^3\alpha + 4(1+\cos\alpha)^3 - 12(1+\cos\alpha)^2 + 9(1+\cos\alpha) + (2 - 3\sqrt{3})\sin\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 4\sqrt{3}\sin^3\alpha - 3\sqrt{3}\sin\alpha + 2\sin\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3\alpha - \sqrt{3}\sin 3\alpha + 2\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ hoặc } \alpha = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \text{ và do } \begin{cases} \alpha \in [0;\pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19}{24}\right\}.$$

Ta có công thức hạ bậc: $2\sin^2 a = (1 - \cos 2\alpha)$ nên:

- Với $\alpha = \frac{\pi}{12}$, suy ra: $x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{12} \Rightarrow y = \frac{4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}$·
- Với $\alpha = \frac{7\pi}{24}$, suy ra: $x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{7\pi}{24} = \frac{4 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{24} \Rightarrow y = \frac{4 + \sqrt{2(4 + \sqrt{2} - \sqrt{6})}}{12}$·
- Với $\alpha = \frac{19\pi}{24}$, suy ra: $x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{19\pi}{24} = \frac{4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{24} \Rightarrow y = \frac{4 - \sqrt{2(4 - \sqrt{2} + \sqrt{6})}}{12}$·

Ví dụ 531. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1 & (1) \\ (1 - x)(1 + y) = 2 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Từ (1) gợi ta đến công thức cộng* $\sin\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\sin\beta = \sin(\alpha \pm \beta)$, *từ đó định hướng đặt* $x = \sin\alpha,\ y = \sin\beta$ *và có lời giải 1. Ngoài ra, phương trình (1) cho ta dấu hiệu nhận dạng của bất đẳng thức cơ bản dạng* $a.b \le \frac{a^2 + b^2}{4} \Leftrightarrow (a - b)^2 \ge 0$ *và dấu đẳng thức xảy ra khi* $a = b$. *Từ đó tìm được mối liên hệ giữa x, y và có lời giải 2.*

Lời giải 1. Điều kiện: $\begin{cases} |x| \le 1 \\ |y| \le 1 \end{cases}$ · Đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \sin\beta \end{cases}$ với $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$·

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{\cos^2\beta} = |\cos\beta| = \cos\beta > 0 \\ \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha} = |\cos\alpha| = \cos\alpha > 0 \end{cases}$ $\left(\text{do}: \alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$(1) \Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\beta + \cos\beta.\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Do $k \in \mathbb{Z}$ và $\alpha,\ \beta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$

$(2) \Leftrightarrow (1-\sin\alpha)(1+\sin\beta) = 2$ và thế $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ vào thì phương trình:

$$\Leftrightarrow (1-\sin\alpha)\cdot\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = 2 \Leftrightarrow (1-\sin\alpha)\cdot(1+\cos\alpha) = 2 \qquad (3)$$

Do $-1 \le \sin\alpha,\ \cos\alpha \le 1$ nên để (3) xảy ra thì $\begin{cases}\cos\alpha = 1\\ \sin\alpha = 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \sin\alpha = -1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}\\ \alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \pi\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = 1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x = -1\\ y = 0\end{cases}.$$

Kết luận: Thử lại, hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y) = (0;1)$.

__Lời giải 2__. Điều kiện: $|x| \le 1,\ |y| \le 1.$

Áp dụng $a.b \le \frac{a^2+b^2}{4}$, ta có: $\begin{cases}x\sqrt{1-y^2} \le \dfrac{x^2+1-y^2}{2}\\ y\sqrt{1-x^2} \le \dfrac{y^2+1-x^2}{2}\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \le 1.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x^2 + y^2 = 1.$

Kết hợp với phương trình (2), ta được hệ: $\begin{cases}x^2 + y^2 = 1\\ (x-y) + xy + 1 = 0\end{cases} \qquad (I)$

Đặt $t = -y$ thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 + t^2 = 1\\ (x+t) - xt + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+t)^2 - 2(x+t) - 3 = 0\\ xt = x + t + 1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x + t = -1\\ xt = 0\end{cases} \text{(nhận do thỏa } S^2 \ge 4P) \text{ hoặc } \begin{cases}x + t = 3\\ xt = 4\end{cases} \text{(loại).}$$

Do $x \ge 0$ nên sẽ tìm được $x = 0,\ t = -1 \Rightarrow y = 1.$

Kết luận: Hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất là $(x;y) = (0;1)$.

__Ví dụ 532.__ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^3 + 4y^3 = 3x^2y + 2\sqrt{3}xy + 2x & (1)\\ x^2 = y^2 + 1 & (2)\end{cases}$

__Phân tích__. *Nhận thấy (2) có dạng công thức lượng giác cơ bản:* $\frac{1}{\cos^2 a} = \tan^2 a + 1$.

Do đó nếu đặt $x = \frac{1}{\cos\alpha}$ *thì* $y = \tan\alpha$ *với* $\alpha \in [0;\pi]$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Đặt $x=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, suy ra: $y=\tan\alpha$ với $\alpha\in[0;\pi]$ thì:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{4}{\cos^3\alpha}+4\tan^3\alpha=\frac{3}{\cos^2\alpha}\tan\alpha+2\sqrt{3}\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\tan\alpha+\frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 4+4\sin^3\alpha=3\sin\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3=\sin3\alpha+\sqrt{3}\sin2\alpha+\cos2\alpha\Leftrightarrow 3=\sin3\alpha+2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\qquad(3)$$

Do: $-1\le\sin3\alpha;\ \sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\le1$ nên để (3) có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin3\alpha=1\\ \sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ \alpha=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ và do }\begin{cases}\alpha\in[0;\pi]\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\text{ nên }\alpha=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$.

_Ví dụ 533._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\sqrt{1-y^2}=\dfrac{1}{4}\\ y\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\quad(I)\qquad(x,y\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}$. Đặt: $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\sin\beta\end{cases}$ với $\alpha,\ \beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=|\cos\alpha|=\cos\alpha\ge0\\ \sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-\sin^2\beta}=|\cos\beta|=\cos\beta\ge0\end{cases}$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac14\\ \sin\beta\cos\alpha=\dfrac14\end{cases}\overset{+}{\underset{-}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac12\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\dfrac12 & (1)\\ \sin(\alpha-\beta)=0 & (2)\end{cases}$$

$(2)\Leftrightarrow\alpha-\beta=k\pi$ và do $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha,\ \beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

$(1)\Leftrightarrow\sin2\alpha=\dfrac12$, suy ra: $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{12}$ hoặc $\alpha=\beta=\dfrac{5\pi}{12}$.

Suy ra: $x=y=\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$ hoặc $x=y=\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$.

Kết luận: hệ có nghiệm $x=y=\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$ hoặc $x=y=\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$.

Lưu ý. Do đây là hệ đối xứng loại II nên ta có thể giải bằng cách vế trừ vế.

5. Dạng 5. Đặt ẩn phụ bằng cách số phức hóa

Dựa vào sự tương quan của một phương trình nghiệm phức $f(z)=0$ với một hệ phương trình hai ẩn $x,\ y\in\mathbb{R}$. Theo kinh nghiệm của tôi thường thì ***chọn một phương trình để nhân đơn vị ảo i vào hai vế, rồi cộng (hoặc trừ) với phương trình còn lại*** $\left(thu: z^2,\ z^3,\ z^4,\ z.\bar{z},\ \dfrac{1}{z},\ \dfrac{i}{z}\right)$ *nhằm tạo được $f(z)=0$ và giải tìm nghiệm $z_1=x_1+y_1i,\ z_2=x_2+y_2i,...$ Từ đó suy ra nghiệm hệ phương trình ban đầu là: $(x;y)=(x_1;y_1),\ (x_2;y_2),......$*

Trong trường phức $\mathbb{C}$, cho: $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó ta cần nắm vững những biến đổi cơ bản dưới đây để xác định nhân i vào phương trình nào ?!

- $z^2=x^2-y^2+2xy.i,\ \bar{z}^2=x^2-y^2-2xy.i,\ z^3=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i.$
- $z^4=x^4-6x^2y^2+y^4+4i(x^3y-y^3x),\ z.\bar{z}=x^2+y^2,\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2},\ \dfrac{xi+y}{x^2+y^2}=\dfrac{i}{z}\cdot$
- *Số phức được viết dạng lượng giác: $z=r.(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ với $r>0$ sẽ có n căn bậc n là: $z_k=\sqrt[n]{r}.\left(\cos\dfrac{\varphi+k2\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+k2\pi}{n}\right)$, với $k=\overline{0;1;....;n-1}.$*
- *Công thức Moavrơ: $z^n=\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n\cos n\varphi+i\sin n\varphi;\ (n\in\mathbb{N}^*).$*

Để hiểu kỹ hơn vấn đề này, ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 534. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 & (1)\\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 & (2)\end{cases}\quad (I)\quad (x,y\in\mathbb{R}).$

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Chuyên tỉnh Lào Cai

Phân tích. *Nếu lấy $(1)+i.(2)$ thu được: $x+yi+3\cdot\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}-\dfrac{xi-y}{x^2+y^2}=3$ và nếu gọi số phức $z=x+yi$ thì có $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2};\ \dfrac{xi+y}{x^2+y^2}=\dfrac{i}{z}$ nên ta cần giải: $z+\dfrac{1}{z}+\dfrac{i}{z}=3$ sẽ tìm được z, từ đó suy x, y và có lời giải 1. Ngoài ra, đây là hệ phương trình gần giống hệ đối xứng loại II, chỉ sai lệch về hằng số và dấu nên ta sẽ giải bằng phương pháp cộng mà được học ở bài học 1. Từ đó có lời giải 2.*

Lời giải 1. Điều kiện: $x^2+y^2\neq 0$. Đặt: $z=x+iy,\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Lấy $(1)+i.(2)$ thì hệ $(I)\Leftrightarrow x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}+yi-\dfrac{(x+3y)i}{x^2+y^2}=3$

$$\Leftrightarrow (x+yi)+\frac{3x-y-xi-3yi}{x^2+y^2}=3\Leftrightarrow (x+yi)+\frac{3(x-yi)-(xi+y)}{x^2+y^2}=3$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)+3\cdot\frac{x-yi}{x^2+y^2}-\frac{xi+y}{x^2+y^2}=3 \Leftrightarrow z+\frac{3}{z}-\frac{i}{z}=3 \Leftrightarrow z^2-3z+3-i=0$$

Ta có: $\Delta=-3+4i \Rightarrow \sqrt{|\Delta|}=1+2i.$ Suy ra: $z=2+i$ hoặc $z=1-i.$

Với $z=2+i=x+yi \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ và $z=1-i=x+yi \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\{(2;1),(1;-1)\}\cdot$

Lời giải 2. Điều kiện: $x^2+y^2\neq 0.$ Do $x=0$ hoặc $y=0$ không là nghiệm nên nhân phương trình (1) với $y,$ phương trình (2) với $x,$ rồi cộng 2 phương trình vừa thu lại với nhau, ta được: $2xy+\dfrac{(3x-y)y}{x^2+y^2}+\dfrac{(x+3y)x}{x^2+y^2}=3y$

$$\Leftrightarrow 2xy+\frac{3xy-y^2-x^2-3xy}{x^2+y^2}=3y \Leftrightarrow 2xy-1=3y \Leftrightarrow x=\frac{3y+1}{2y}\cdot$$

Thế vào $(2) \Leftrightarrow y\left[\left(\dfrac{3y+1}{2y}\right)^2+y^2\right]-\left(\dfrac{3y+1}{2y}\right)-3y=0 \Leftrightarrow 4y^4-3y^2-1=0$

$$\Leftrightarrow y^2=1 \text{ hoặc } y^2=-\frac{1}{4} \text{ (loại) } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=2 \\ y=-1\Rightarrow x=1 \end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(1;-1);(2;1)\}\cdot$

Ví dụ 535. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{78y}{x^2+y^2}=20 \quad (1) \\ y+\dfrac{78x}{x^2+y^2}=15 \quad (2) \end{cases} \quad (I) \qquad (x,y\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x^2+y^2\neq 0.$ Đặt: $z=x+iy,\ (x,y\in\mathbb{R}).$

$$(I)\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{78y}{x^2+y^2}=20 \\ yi+\dfrac{78xi}{x^2+y^2}=15i \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} x+\frac{78y}{x^2+y^2}+yi+\frac{78xi}{x^2+y^2}=20+15i$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)+78\cdot\frac{xi+y}{x^2+y^2}=20+15i \Leftrightarrow z+78\cdot\frac{i}{z}=20+15i$$

$$\Leftrightarrow z^2-(20+15i)z+78i=0 \text{ có } \Delta=175-288i, \text{ suy ra: } \sqrt{|\Delta|}=16-9i \quad ^{(1)}$$

Do đó $z=18+12i$ hoặc $z=2+3i,$ suy ra: $(x;y)=(2;3),(18;12).$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(2;3);(18;12)\}.$

Nhận xét

- *Trong* [(1)] *tôi đã tìm* $\sqrt{|\Delta|}$ *bằng phương pháp tổng quát như sau:*

$$\sqrt{|\Delta|}=\sqrt{175-288i}=a+bi \Leftrightarrow 175-288i=(a+bi)^2 \Leftrightarrow 175-288i=(a^2-b^2)+2abi$$

Suy ra: $\begin{cases} a^2-b^2=175 \\ 2ab=-288 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm 9 \\ a=\mp 16 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{|\Delta|}=16-9i.$

- *Ngoài ra, dưới sự hỗ trợ của casio, ta cũng có thể tìm nhanh căn bậc 2 của một số phức bằng cách bấm: Mode 2 / 175 – 288i / = /* $\sqrt{|\text{Ans}|}\angle\dfrac{\arg(\text{Ans})}{2}$ */ = sẽ thu được một căn bậc hai của số phức là* $16-9i.$ *Thao tác: mode 2 / 175 – 288i / = /* $\sqrt{\ }$ *shift hyp Ans / shift (–) /* $\dfrac{\text{Shift / 2 / 1 / Ans /)}}{2}=$

- *Cũng tương tự như ví dụ trên, ta có thể giải bài toán này bằng cách nhân phương trình (1) với* $y\neq 0$ *và nhân phương trình (2) với* $x\neq 0,$ *rồi cộng lại thu được:*

$2xy+78=20y+15x \Leftrightarrow y=\dfrac{15x-78}{2x-20}$ *(do* $x=10$ *không là nghiệm hệ).*

$$(2)\Leftrightarrow \frac{15x-78}{2x-20}\left[x^2+\left(\frac{15x-78}{2x-20}\right)^2\right]+78x=15\left[x^2+\left(\frac{15x-78}{2x-20}\right)^2\right] \qquad (3)$$

Giải ra cũng được kết quả như trên nhưng sự biến đổi phương trình (3) *dài dòng và phức tạp, cần có sự biến đổi cẩn thận.*

_Ví dụ 536._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (6-x)(x^2+y^2)=6x+8y & (1) \\ (3-y)(x^2+y^2)=8x-6y & (2) \end{cases}$ (I) $(x,y\in\mathbb{R}).$

Phân tích. *Nếu chia hai vế cho* $x^2+y^2\neq 0$ *sau khi xét* $x=y=0$ *có phải là nghiệm không thì sẽ đưa được về dạng giống hai ví dụ trên và có lời giải 1. Ngoài ra, nếu biến đổi, sau đó cộng hai phương trình lại với nhau và rút x theo y, rồi thế vào phương trình (2) sẽ tìm được x, y và cơ lời giải 2.*

Lời giải 1. Với $x^2+y^2=0$ thì hệ có nghiệm $(x;y)=(0;0).$ Với $x^2+y^2\neq 0$ thì

$$(I)\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x=\dfrac{6x+8y}{x^2+y^2} \\ 3-y=\dfrac{8x-6y}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{6x+8y}{x^2+y^2}=6 \\ y+\dfrac{8x-6y}{x^2+y^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{6x+8y}{x^2+y^2}=6 \\ yi+\dfrac{8xi-6yi}{x^2+y^2}=3i \end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} x+yi+\frac{6x+8y}{x^2+y^2}+\frac{8xi-6yi}{x^2+y^2}=6+3i \Leftrightarrow x+yi+\frac{6(x-yi)}{x^2+y^2}+\frac{8(xi+y)}{x^2+y^2}=6+3i$$

Đặt $z=x+yi,$ suy ra: $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{z};$ $\dfrac{xi+y}{x^2+y^2}=\dfrac{i}{z}\cdot$ Khi đó phương trình:

$$\Leftrightarrow z+\frac{6}{z}+\frac{8i}{z}=6+3i \Leftrightarrow z^2-(6+3i)z+6+8i=0 \text{ có: } \Delta=3+4i.$$

Suy ra: $\sqrt{|\Delta|} = 2 + i.$ Do đó: $z = 2 + i$ hoặc $z = 4 + 2i.$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{(0;0);(2;1);(4;2)\right\}\cdot$

Lời giải 2. Với $x^2 + y^2 = 0$ thì hệ có nghiệm $(x;y) = (0;0).$

Xét $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$ hoặc $x^2 + y^2 \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x = \dfrac{6x + 8y}{x^2 + y^2} \\ 3 - y = \dfrac{8x - 6y}{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{6x + 8y}{x^2 + y^2} = 6 \\ y + \dfrac{8x - 6y}{x^2 + y^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + \dfrac{6xy + 8y^2}{x^2 + y^2} = 6y \\ xy + \dfrac{8x^2 - 6xy}{x^2 + y^2} = 3x \end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} 2xy + 8 = 3x + 6y \Leftrightarrow x = \frac{6y - 8}{2y - 3},\ \left(y \neq \frac{3}{2}\right)$$

Thế vào (1) $\Leftrightarrow \left(6 - \dfrac{6y - 8}{2y - 3}\right)\cdot\left[\left(\dfrac{6y - 8}{2y - 3}\right)^2 + y^2\right] = 6\cdot\dfrac{6y - 8}{2y - 3} + 8y$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(y - 2)(3y - 4)(4y^2 - 12y + 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 4 \end{array}\right.,\ (\text{do}: x \neq 0).$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{(0;0);(2;1);(4;2)\right\}\cdot$

Bình luận. *Dạng tổng quát của bài toán là:* $\begin{cases} ax + \dfrac{bx \pm cy}{x^2 + y^2} = \alpha \quad (1) \\ ay + \dfrac{cx + by}{x^2 + y^2} = \beta \quad (2) \end{cases}\cdot$ *Khi đó ta có hai hướng xử lý. Một là lấy* $(1) + i.(2)$ *và đặt* $z = x + yi,\ (x, y \in \mathbb{R})$ *sẽ thu được phương trình:* $az \pm \dfrac{b}{z} \pm \dfrac{ci}{z} = \alpha + \beta i$ *và giải phương trình này trên tập số phức sẽ tìm được z, từ đó suy ra được x, y. Hai là sử dụng phương pháp cộng, tức lấy* $y.(1) + x.(2)$ *sẽ thu được phương trình đơn giản hơn và rút x theo y hoặc y theo x, rồi thế vào phương trình còn lại. Nhưng hướng 2 này sẽ dẫn đến phương trình bậc cao, đòi hỏi đến kỹ năng nhẩm nghiệm, hoặc nếu nghiệm quá xấu sẽ gây khó khăn.*

Ví dụ 537. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{12}{3x + y}\right) = 2 \quad (1) \\ \sqrt{y}\left(1 + \dfrac{12}{3x + y}\right) = 6 \quad (2) \end{cases} \quad (I) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Học sinh giỏi Quốc Gia năm 2007

Lời giải 1. Điều kiện: $x \geq 0;\ y \geq 0;\ y + 3x \neq 0.$ Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{3x} \geq 0 \\ b = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases}.$

Do $x=y=0$ không là nghiệm của hệ nên xét $x>0,\ y>0$ hay $a>0,\ b>0$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{3}}\left(1-\dfrac{12}{a^2+b^2}\right)=2\\ b\left(1+\dfrac{12}{a^2+b^2}\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-\dfrac{12a}{a^2+b^2}=2\sqrt{3}\\ b+\dfrac{12b}{a^2+b^2}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-\dfrac{12a}{a^2+b^2}=2\sqrt{3}\\ bi+\dfrac{12bi}{a^2+b^2}=6i\end{cases}$$

Cộng hai phương trình lại, suy ra: $a+bi-12\cdot\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=2\sqrt{3}+6i$ (*)

Đặt: $z=a+bi$ với $a,\ b\in\mathbb{R}$ và $a,\ b\geq 0$ nên $\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{z}\cdot$ Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow z-\frac{12}{z}=2\sqrt{3}+6i\Leftrightarrow z^2-2(\sqrt{3}+3i)z-12=0$$

Ta có: $\Delta'=6+6\sqrt{3}.i$, suy ra: $\sqrt{|\Delta'|}=3+\sqrt{3}.i$ [(1)] $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=\sqrt{3}+3+(3+\sqrt{3})i\\ z=\sqrt{3}-3+(3-\sqrt{3})i\end{array}\right.$.

Do đó: $\begin{cases}a=\sqrt{3}+3\\ b=3+\sqrt{3}\end{cases}$ (nhận) hoặc $\begin{cases}a=\sqrt{3}-3<0\\ b=3-\sqrt{3}\end{cases}$ (loại do $a,\ b\geq 0$).

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{3x}=\sqrt{3}+3\\ \sqrt{y}=3+\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{(\sqrt{3}+3)^2}{3}\\ y=(3+\sqrt{3})^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4+2\sqrt{3}\\ y=12+6\sqrt{3}\end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(4+2\sqrt{3};3+\sqrt{3})\right\}\cdot$

Nhận xét. *Trong* [(1)], *ngoài cách tìm* $\sqrt{|\Delta'|}$ *bằng phương pháp tổng quát hay sử dụng casio, có thể sử dụng* $z=r.(\cos\varphi+i\sin\varphi)\Rightarrow z_k=\sqrt[n]{r}.\left(\cos\dfrac{\varphi+k2\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+k2\pi}{n}\right)\cdot$

Với $\Delta'=6+6\sqrt{3}.i=12\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=12\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i.\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ *nên sẽ có hai căn bậc hai là*

$$\delta_{1;2}=\pm\sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right)=\pm\sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\pm(3+\sqrt{3}.i)\Rightarrow\sqrt{|\Delta'|}=3+\sqrt{3}.i.$$

Hơn nữa, tại sao tôi phải đặt $a=\sqrt{3x}>0,\ b=\sqrt{y}$ *?! Câu trả lời rất đơn giản, do tôi muốn tạo ra mẫu số dạng* a^2+b^2 *để áp dụng được biến đổi của số phức.*

Lời giải 2. Do $x=y=0$ không là nghiệm hệ nên điều kiện: $x>0,\ y>0$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}1-\dfrac{12}{3x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\\ 1+\dfrac{12}{3x+y}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}\end{cases}\xleftrightarrow[(2)-(1)]{(2)+(1)}\begin{cases}1=\dfrac{3}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\quad(**)\\ \dfrac{12}{3x+y}=\dfrac{3}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\end{cases}\xrightarrow{\text{nhân}}\frac{12}{3x+y}=\frac{9}{y}-\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 12xy = 9x(3x+y) - y(3x+y) \Leftrightarrow 27x^2 - 6xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-y)(9x+y) = 0$$

Với $y = 3x$ thì $(**) \Leftrightarrow 1 = \dfrac{3}{\sqrt{3x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 12 + 6\sqrt{3} \end{cases}$.

Với $9x + y = 0$: loại do $x > 0,\ y > 0$ nên $9x + y > 0$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{(4 + 2\sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})\right\}$.

Ví dụ 538. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - \dfrac{2}{y^2} - (\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1) = \dfrac{xy^2}{x^2y^2+1} \\ 4x + \dfrac{y^2}{x^2y^2+1} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$ (I)

Lời giải. Điều kiện: $y \neq 0$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - \dfrac{2}{y^2} - (\sqrt{2}+1).x\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}.x\sqrt{2}}{2x^2 + \dfrac{2}{y^2}} = -\sqrt{2} - 1 \\ 2.\dfrac{2x}{y} - (\sqrt{2}+1)\dfrac{\sqrt{2}}{y} + \dfrac{\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{y}}{2x^2 + \dfrac{2}{y^2}} = 0 \end{cases} \quad (II) \text{ và đặt } \begin{cases} a = x\sqrt{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{y} \neq 0 \end{cases}$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - (\sqrt{2}+1)a - \dfrac{a\sqrt{2}}{a^2+b^2} = -\sqrt{2} - 1 & (1) \\ 2ab - (\sqrt{2}+1)b + \dfrac{b\sqrt{2}}{a^2+b^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy $(1) + (2).i \Rightarrow (a^2 - b^2 + 2ab) - (\sqrt{2}+1)(a+bi) - \dfrac{\sqrt{2}(a-bi)}{a^2+b^2} + \sqrt{2} + 1 = 0$ (3)

Đặt $z = a + bi,\ (b \neq 0)$ thì $(3) \Leftrightarrow z^2 - (\sqrt{2}+1)z - \dfrac{\sqrt{2}}{z} + \sqrt{2} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z^3 - (\sqrt{2}+1)z^2 + (\sqrt{2}+1)z - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{2})(z^2 - z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \text{ hoặc } z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ hoặc } z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Với $z = \sqrt{2}$, suy ra: $a = \sqrt{2}$ và $b = 0$.

Với $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, suy ra: $a = \dfrac{1}{2}$ và $b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ và $y = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}; \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$.

Ví dụ 539. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+5y=xy+2 \\ x^2+4y+21=y^2+10x \end{cases}$ (I) $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Ta có $(I)\Leftrightarrow\begin{cases} 2i(xy-2x-5y+2)=0 \\ x^2-y^2-10x+4y+21=0 \end{cases}$. Đặt $z=x+iy$.

Cộng vế theo vế, suy ra: $x^2-y^2-10x+4y+21+2i(xy-2x-5y+2)=0$

$\Leftrightarrow(x^2-y^2+2xyi)-10(x+yi)-4i(x+yi)+21+4i=0$

$\Leftrightarrow z^2-10z-4iz+21+4i=0\Leftrightarrow z^2-2(5+2i)z+21+4i=0$

Ta có: $\Delta'=(5+2i)^2-(21+4i)=16i=8(1+i)^2\Rightarrow\sqrt{|\Delta'|}=2\sqrt{2}(1+i)$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} z=5+2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})i \\ z=5-2\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2})i \end{array}\right.$ nên $\begin{cases} x=5+2\sqrt{2} \\ y=2+2\sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=5-2\sqrt{2} \\ y=2-2\sqrt{2} \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(5\pm2\sqrt{2};2\pm2\sqrt{2})\right\}$.

Nhận xét. *Ta có thể giải hệ bằng cách rút x theo y hoặc ngược lại từ phương trình (1), rồi thế vào phương trình (2) cũng được kết quả tương tự.*

Ví dụ 540. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3xy^2=-1 \\ y^3-3x^2y=-\sqrt{3} \end{cases}$ (I) $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Đây là hệ phương trình đẳng cấp bậc ba. Tuy nhiên, nếu giải bằng phương pháp thông thường, tức nhân chéo 2 vế được:* $\sqrt{3}x^3+3x^2y-3\sqrt{3}xy^2-y^3=0$ *và phương trình này nghiệm quá xấu !! Nhưng để ý xét số phức* $z=x+iy$, $(x,y\in\mathbb{R})$ *thì* $z^3=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i$. *Điều đó gợi ý cho ta lấy phương trình hai nhân với* $-i$, *rồi cộng với phương trình một và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Gọi $z=x+iy$, $(x,y\in\mathbb{R})$, suy ra: $z^3=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i$.

$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} x^3-3xy^2=-1 \\ (3x^2y-y^3)i=i\sqrt{3} \end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i=-1+i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z^3=-1+\sqrt{3}.i\Leftrightarrow z^3=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\Leftrightarrow z^3=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Nên $z\in\left\{\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right);\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right);\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)\right\}$

Suy ra: $\begin{cases} x=\sqrt[3]{2}\cos\frac{2\pi}{9} \\ y=\sqrt[3]{2}\sin\frac{2\pi}{9} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\sqrt[3]{2}\cos\frac{8\pi}{9} \\ y=\sqrt[3]{2}\sin\frac{8\pi}{9} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\sqrt[3]{2}\cos\frac{14\pi}{9} \\ y=\sqrt[3]{2}\sin\frac{14\pi}{9} \end{cases}$: là các cặp nghiệm cần tìm của hệ phương trình đã cho.

Ví dụ 541. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} \\ x^3y - y^3x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ (I) $(x, y \in \mathbb{R})$

Korean Mathematical Olympiad 1998

Lời giải. Gọi $z = x + iy \Rightarrow z^4 = (x+yi)^4 = x^4 + 4x^3yi + 6x^2y^2i^2 + 4xy^3i^3 + y^4i^2$

Suy ra: $z^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 4(x^3y - y^3x).i$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} \\ x^3yi - y^3xi = \dfrac{1}{4}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} \\ 4(x^3y - y^3x)i = i \end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 4(x^3y - y^3x)i = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z^4 = \sqrt{3} + i.$$

Ta có: $z^4 = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{24} + i\sin\dfrac{\pi}{24}\right) \\ z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{24} + i\sin\dfrac{13\pi}{24}\right) \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{25\pi}{24} + i\sin\dfrac{25\pi}{24}\right) \\ z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{37\pi}{24} + i\sin\dfrac{37\pi}{24}\right) \end{array}\right.$.

Suy ra: $\begin{cases} x = \sqrt[4]{2}\cos\dfrac{\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2}\sin\dfrac{\pi}{24} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt[4]{2}\cos\dfrac{13\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2}\sin\dfrac{13\pi}{24} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt[4]{2}\cos\dfrac{25\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2}\sin\dfrac{25\pi}{24} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt[4]{2}\cos\dfrac{37\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2}\sin\dfrac{37\pi}{24} \end{cases}$.

Nhận xét. *Nếu giải cách thông thường sẽ gây khó khăn cho việc tìm nghiệm.*

BÀI TẬP RÈN LUYỆN TỔNG HỢP VỀ ĐẶT ẨN PHỤ

BT 582. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 9 \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} + 1\right) = 18 \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

BT 583. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(3y - 2) = -8 \\ x(y^3 + 2) = -6 \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

BT 584. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{13}{2} \\ 3y^2x + x^3 = \dfrac{35}{2} \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

BT 585. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2(3x^2 + 2xy + 3y^2 - 20) + 1 = 0 \\ 2x^2 - 5x - 2xy + 5y = 0 \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

BT 586. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4(x^2+xy+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=\dfrac{85}{3} \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{13}{3} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 587. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{\left(x+y\right)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 588. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+6xy-\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{9}{8}=0 \\ 2y-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{5}{4}=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 589. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2y^2+3xy+3=0 \\ \dfrac{x-y+18}{(x+y)^2}=9\sqrt{x-y} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 590. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=16 \\ y(x^2+1)=2x(y^2+1) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 591. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4 \\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=1 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 592. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y+y^2x+2y+x=6xy \\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=4 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 593. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=8 \\ (x^3+y^3)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3=16 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 594. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 595. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 596. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+1+y(y+x)=4y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 597. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+\dfrac{1}{xy}=2 \\ (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 598. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=\dfrac{45}{4} \\ (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=\dfrac{9}{2} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 599. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+x-1=3y \\ x^2y-x=2y^2 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 600. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y^3+8=16y^3 \\ x(xy+2)=8y^2 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 601. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+1+y^2+xy=4y \\ x+y-2=\dfrac{y}{1+x^2} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 602. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^4-2x^3+x^2)(1+y^2-2y)=16y \\ 2x^2y-2xy+y^2-10y+1=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 603. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2=-9xy \\ (x^2+1)(y^2+1)=-10xy \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 604. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 605. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+4xy+y-2x=0 \\ y^4+8xy^2+4x^2+3y^2=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 606. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x+y}+\sqrt{x+y}=2 \\ \sqrt{x+y}+x-y=1 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 607. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=2 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 608. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (xy+3)^2+(x+y)^2=8 \\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 609. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 610. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x-3y}+\sqrt{5-x+y}=7 \\ 3\sqrt{5-x+y}-\sqrt{2x-y-3}=1 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 611. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y(1+y)+x^2y^2(2+y)+xy^3=30 \\ x^2y+x(1+y+y^2)+y-11=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 612. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x}+\sqrt{2y}=6 \\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{2y+9}=8 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 613. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{8x^2-8xy+2x+2y^2-2}=\sqrt{x-1}+2x-y \\ 4x\sqrt{x-1}=17-y^2 \end{cases}$

BT 614. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+x^2+2y-22=0 \\ x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 615. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+2x^3-5x^2+y^2-6x=11 \\ \dfrac{3\sqrt{y^2-7}-6}{\sqrt{y^2-7}}=x^2+x \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 616. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3x^2-13x-15=\dfrac{8}{y^3}-\dfrac{8}{y} \\ y^2+4=5y^2(x^2+2x+2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 617. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-x-y=1 \\ 4x^3-12x^2+9x=-y^3+6y+7 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 618. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x-1}-y(1+2\sqrt{2x-1})=-8 \\ y^2+y\sqrt{2x-1}+2x=13 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 619. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2-\dfrac{2x}{y}=4 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 620. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ \sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{12}{y} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 621. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 12x+3y-4\sqrt{xy}=16 \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y+5}=6 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 622. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 25 \\ x^2 + 6xy + y^2 = 10x + 6y - 1 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 623. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + xy + \dfrac{3}{2} = y^3 \\ (xy+2)^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2y + \dfrac{4}{x} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 624. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{46 - 2y(3 + 8x + 8y)} = 2x + 6 \\ 2\sqrt{4x + y} + x + 2y = 1 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 625. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{35}{12} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 626. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2y^3}{x^4} - \dfrac{y^3}{x^3 + 5y^6} = \dfrac{9}{10x^2} \\ \sqrt{x^3 + y^6}\left(\dfrac{x^4}{x^3 + 5y^6} + 2\right) = \dfrac{22x^2}{5} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 627. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{1}{xy} = 1 \\ \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{y^2}} + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} = 2\sqrt{7} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 628. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3x - y}{x^2 - y^2} + 3x + y = 9 \\ (x^2 + y^2)\left[\dfrac{5}{(x^2 - y^2)^2} + 5\right] + 2xy - \dfrac{2xy}{(x^2 - y^2)^2} = 35 \end{cases}$

BT 629. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x^2 + y)\left[4x^4 - 3x^2 + y(4x^2 + y + 6)\right] = 8 \\ 3y - 4x^2 + 2 = 0 \end{cases}$

BT 630. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y + \sqrt{2y - x + 1} = 4xy^2 + x - 1 \\ x^3 - 6x^2y = 8y^3 - 6 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 631. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 632. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{2x^2+8y} = \dfrac{7-4y}{x^2+x} \\ \sqrt{x^3-y} = \dfrac{2y}{x(4x-1)} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 633. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1 \\ \sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = \sqrt{xy+2} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 634. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2y+3} + \sqrt{9x+10y+11} = 10 \\ \sqrt{12x+13y+14} + \sqrt{28x+29y+30} = 20 \end{cases}$

BT 635. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)(\sqrt{x^3+2}+1) = \dfrac{3}{y} \\ x^2+x+1 = y \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 636. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2+xy = 1 \\ (x-y)^2(\sqrt{3x^2-xy+2y^2+2}+1) = 3 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 637. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 2 \\ 29\sqrt[3]{x^2-y^2} + \dfrac{72xy}{x-y} = 4 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 638. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2+1 = x-y \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-2y} = 3y \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 639. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 2\sqrt{y+2} = 3 \\ 4y + 8(x-2)\sqrt{x+2} + 7 = 0 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 640. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (3x-4x^3)(3y-4y^3) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 641. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{1-y^2} = 1 \\ y + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{3} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 642. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

BT 643. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x + 1 = y^2 - 2xy - x^2 \\ y^3 - 3yx^2 + y - 1 = y^2 + 2xy - x^2 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

§ 4. GIẢI HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ



Trong bài học này, ta sẽ tìm hiểu 2 phương pháp đánh giá chính để giải hệ phương trình mà thường được sử dụng nhiều trong đề thi, đó là:

- Phương pháp đánh giá bằng hàm số.
- Phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức.

I. Phương pháp đánh giá bằng hàm số

Ta sẽ vận dụng nội dung của kết quả: "Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u,\ v\in(a;b)$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$".

1. Một số dạng cơ bản sử dụng phương pháp hàm số

a. <u>Dạng 1</u>. Hệ chứa $\left[ax+\sqrt{(ax)^2+1}\right]\left[by+\sqrt{(by)^2+1}\right]=1$ (1) dạng liên hợp

Do $\sqrt{(by)^2+1}>\sqrt{(by)^2}=|by|\ge by$, suy ra: $\sqrt{(by)^2+1}-by>0$ nên:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\left[ax+\sqrt{(ax)^2+1}\right]\cdot\left[\sqrt{(by)^2+1}+by\right]\cdot\left[\sqrt{(by)^2+1}-by\right]}{\sqrt{(by)^2+1}-by}=1$$

$$\Leftrightarrow ax+\sqrt{(ax)^2+1}=\sqrt{(-by)^2+1}+(-by)\Leftrightarrow f(ax)=f(-by).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có:

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R} \text{ do } \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}}\ge 0.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(ax)=f(-by)\Leftrightarrow ax=-by$. Đã có mối liên hệ giữa x và y.

<u>**Lưu ý**</u>. Ngoài cách chứng minh bằng phương pháp hàm số, ta có thể sử dụng phương pháp liên hợp cũng tìm được ra mối liên hệ giữa x và y.

<u>Ví dụ 442.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3+2y=\sqrt{y+5x+2} & (1)\\ (3x+\sqrt{1+9x^2})\cdot(y+\sqrt{1+y^2})=1 & (2)\end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Lâm Đồng năm 2014

<u>***Lời giải***</u>. Điều kiện: $y+5x+2\ge 0$.

Do $\sqrt{1+y^2}>\sqrt{y^2}=|y|\ge y$, suy ra: $\sqrt{1+y^2}-y>0$ nên liên hợp (2) được:

$$(2)\Leftrightarrow (3x+\sqrt{1+9x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}-y}=1\Leftrightarrow 3x+\sqrt{1+(3x)^2}=\sqrt{1+(-y)^2}+(-y)$$

$$\Leftrightarrow f(3x)=f(-y).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Vì: $\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} > \dfrac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}} \ge 0.$ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(3x) = f(-y) \Leftrightarrow 3x = -y \Leftrightarrow y = -3x$ và thế vào (1) được:

$(1) \Leftrightarrow 8x^3 - 6x = \sqrt{2x+2}$ (3). Đặt $x = \cos t,\ \left(t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\right)\cdot$ Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow 2(4\cos^3 t - 3\cos t) = \sqrt{2\cos t + 2} \Leftrightarrow 2\cos 3t = \sqrt{2(1+\cos t)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos^2\frac{t}{2}} = \cos 3t \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2},\ \left(\text{do}: t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\frac{t}{2} > 0\right)\cdot$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \dfrac{t}{2} + k2\pi \\ 3t = -\dfrac{t}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{k4\pi}{5} \\ t = \dfrac{k4\pi}{7} \end{array}\right.,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right).\ \text{Vì } t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t = 0.$$

Với $t = 0,$ suy ra: $x = 1 \Rightarrow y = -3.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \{(1;-3)\}\cdot$

Nhận xét. Ngoài việc sử dụng hàm số, ta có thể sử dụng liên hợp như sau:

$$(2) \Leftrightarrow 3x + \sqrt{1+9x^2} = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{1+y^2} - y \Leftrightarrow 3x + y + \sqrt{1+9x^2} - \sqrt{1+y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + \frac{9x^2 - y^2}{\sqrt{1+9x^2}+\sqrt{1+y^2}} = 0 \Leftrightarrow (3x+y)\left(1 + \frac{3x-y}{\sqrt{1+9x^2}+\sqrt{1+y^2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = -y \text{ do: } 1 + \frac{3x-y}{\sqrt{1+9x^2}+\sqrt{1+y^2}} = \frac{\overbrace{\sqrt{1+9x^2}+3x}^{>0} + \overbrace{\sqrt{1+y^2}-y}^{>0}}{\sqrt{1+9x^2}+\sqrt{1+y^2}} > 0.$$

Ví dụ 443. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y) = 1 & (1) \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = y^2 + 8 & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Nam Định năm 2013

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ 22-3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le \dfrac{22}{3}\cdot$

Do $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y| \ge y,$ suy ra: $\sqrt{1+y^2} - y > 0$ nên liên hợp (1) được:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x = \sqrt{(-y)^2+1} + (-y) \Leftrightarrow f(x) = f(-y).$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{1+t^2}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = \dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} > 0.$

Vì: $\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} > \dfrac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}} \ge 0.$ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x)=f(-y) \Leftrightarrow x=-y$ và thế vào $(2) \Leftrightarrow 4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$ (*)

$$\Leftrightarrow 4\left[\sqrt{x+2}-\left(\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)\right]+\left[\sqrt{22-3x}-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}\right)\right]=x^2-x-2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[3\sqrt{x+2}-(x+4)\right]+\left[3\sqrt{22-3x}-(14-x)\right]=3(x^2-x-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(-x^2+x+2)}{3\sqrt{x+2}+x+4}+\frac{-x^2+x+2}{3\sqrt{22-3x}+14-x}+3(-x^2+x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+x+2)\cdot\left(\frac{4}{3\sqrt{x+2}+x+4}+\frac{1}{3\sqrt{22-3x}+14-x}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Do: $\dfrac{4}{3\sqrt{x+2}+x+4}+\dfrac{1}{3\sqrt{22-3x}+14-x}+3>0,\ \forall x\in\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(-1;1);(2;-2)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Trong cách biến đổi của phương trình* (*) *do sử dụng casio, tìm được 2 nghiệm* $x=-1,\ x=2$ *nên ghép bậc nhất* $ax+b$ *để liên hợp (xem lại phần liên hợp).*

Ví dụ 444. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+\sqrt{x^2+4})(y+\sqrt{y^2+1})=2 & (1) \\ 27x^6=x^3-8y+2 & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Nghệ An năm 2013

Lời giải. Ta có: $(1) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=2(\sqrt{y^2+1}-y)$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y) \Leftrightarrow f(x)=f(-2y).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>0.$

Vì: $\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} > \dfrac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}} \ge 0.$ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x)=f(-2y) \Leftrightarrow x=-2y$ và thế vào phương trình (2) được:

$(2) \Leftrightarrow 27x^6=x^3+4x+2 \Leftrightarrow (3x^2)^3+3x^2=x^3+3x^2+4x+2$

$$\Leftrightarrow (3x^2)^3+(3x^2)=(x+1)^3+(x+1) \Leftrightarrow f(3x^2)=f(x+1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(3x^2)=f(x+1)\Leftrightarrow 3x^2=x+1\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}\Rightarrow y=\dfrac{-1\mp\sqrt{13}}{12}$.

Kết luận: Tập nghiệm $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6};\dfrac{-1-\sqrt{13}}{12}\right);\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6};\dfrac{-1+\sqrt{13}}{12}\right)\right\}$.

Ví dụ 445. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(\sqrt{y^2+1}+1)(x-y+\sqrt{x^2+2x+2})=y^2 & (1)\\ (8y-11)\sqrt{2x^2+1}-3=(3x+1)(y-1) & (2)\end{cases}$

Lời giải. Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên xét $y\neq 0$ và liên hợp ở (1) thì:

$(1)\Leftrightarrow x-y+\sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{y^2+1}-1\Leftrightarrow x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x+1)=f(y).$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Vì: $\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>\dfrac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}}\geq 0.$ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow y=x+1$ và thế vào phương trình (2) được:

$(2)\Leftrightarrow 3x^2+x-(8x-3)\sqrt{2x^2+1}+3=0$ (3)

Đặt $t=\sqrt{2x^2+1}\geq 1$ thì $(3)\Leftrightarrow 3t^2-(8x-3).t-3x^2+x=0$ có: $\Delta_t=(10x-3)^2$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}t=3x-1\\ t=-\dfrac{x}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+1}=3x-1\\ \sqrt{2x^2+1}=-\dfrac{x}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{7}\Rightarrow y=\dfrac{13}{7}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{13}{7}\right)\right\}$.

Bình luận. *Để giải phương trình (3), tôi đã sử dụng việc đặt ẩn phụ không hoàn toàn. Nhưng nếu làm bình thường thì biệt số delta không là số chính phương, do đó tôi đã điều chỉnh hệ số $m=3$ trước t^2 để được delta là số phương. Theo phương pháp đã được học ở phần 1, thì việc tìm m ngoài nháp khá dài dòng, người ra đề thường cho m là những số nguyên dương nên tôi đã chọn phương pháp thử dần $m=1,2,3,...$ và chọn được $m=3$ thì delta là số chính phương và có lời giải ngắn gọn như trên.*

b. Dạng 2. Hệ chứa đa thức bậc 3: $a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1=a_2y^3+b_2y^2+c_2y$ (1)

Về nguyên tắc tổng quát ta sẽ sử dụng đồng nhất thức để xây dựng hàm đặc trưng dạng: $f(t)=m.t^3+n.t$, tức biến đổi:

$(1)\Leftrightarrow m.(ax+b)^3+n.(ax+b)=m.(cy+d)^3+n.(cy+d)\Leftrightarrow f(ax+b)=f(cy+d).$

Từ đó chứng minh hàm số $f(t)$ đơn điều 1 chiều trên miền D.

Suy ra: $f(ax+b)=f(cy+d)\Leftrightarrow ax+b=cy+d$ và thế vào phương trình còn lại.

Lưu ý, đối với các phương trình đơn giản, có thể sử dụng casio để tìm a, b. Ngoài ra, miền $D = D_1 \cup D_2$ với D_1, D_2 là miền của $ax+b$ và $cy+d$.

Ví dụ 446. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 & (1) \\ 2\sqrt{4-x^2} - 3\sqrt{3+2y-y^2} - 3x + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi Tp. Hà Nội năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy (1) có dạng đa thức bậc 3 theo x và theo y độc lập nhau. Do đó ta sẽ viết:* $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = y^3 + 3y$ (i). *Vì đa thức theo y khá đơn giản nên sẽ chọn hàm số đặc trưng dựa vào nó, tức xây dựng hàm số* $f(t) = t^3 + 3t$ *ở 2 vế. Khi đó viết:* $(1) \Leftrightarrow (ax+b)^3 + 3(ax+b) = y^3 + 3y$ (ii). *Lúc này có các cách tìm a, b như sau:*

Cách 1. *Khai triển và đồng nhất, tức:* $VT_{(ii)} = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + (3ab^2 + 3a)x + b^3 + 3b$ *và so sánh hệ số với (i), được* $a = b = 1$ *hay viết* $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$.

Cách 2. *Sử dụng casio nhập 1000 và gán vào A:* $A: 1000 \to A$ (1000 *shift STO A*), *rồi nhập* $X^3 + 3X^2 + 6X + 4 = A^3 + 3A$ *và bấm shift solve cho ta* $X = 999 = 1000 - 1$ *tức ta có thể viết* $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y \Leftrightarrow f(x+1) = f(y)$. *Do hàm số đặc trưng* $f(t) = t^3 + 3t$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$ *nên suy ra* $x + 1 = y$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $-2 \le x \le 2$ và $-1 \le y \le 3$.

$(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y \Leftrightarrow f(x+1) = f(y)$.

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x + 1$.

Thế vào $(2) \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = -3x + 2 \Leftrightarrow x = 0$, suy ra: $y = 1$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S = (x;y) = \{(0;1)\}$.

Ví dụ 447. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = y^3 + 3y & (1) \\ \sqrt{x-3} + \sqrt{y+1} = 3 & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Lạng Sơn năm 2014

Phân tích. *Tương tự ý tưởng bài trên, ta cần xây dựng hàm đặc trưng* $f(t) = t^3 + 3t$ *và lưu* $1000 \to A$ *trên casio, rồi nhập:* $X^3 - 3X^2 + 6X - 4 = A^3 + 3A$, *shift solve cho ta* $X = 1001 = 1000 + 1$, *tức viết* $(1) \Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) = y^3 + 3y \Leftrightarrow f(x-1) = f(y)$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 3$, $y \ge -1$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) = y^3 + 3y$ $\Leftrightarrow f(x-1) = f(y)$.

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(x-1)=f(y)\Leftrightarrow x-1=y$. Thế vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-3}+\sqrt{x}=3\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x}=6-x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 6 \\ x^2-3x=(6-x)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\{(4;3)\}$.

Nhận xét. *Ta có thể sử dụng đồng nhất thức để tìm hàm đặc trưng ở hai vế của (1).*

Ví dụ 448. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 & (1) \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 & (2) \end{cases}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – THPT Ngô Gia Tự – Bắc Ninh

Phân tích. *Thấy* $(1)\Leftrightarrow x^3-3x-2=y^3-3y^2$ *có x, y độc lập nhau nên sẽ nghĩ đến phương pháp hàm và sẽ xây dựng hàm đặc trưng* $f(t)=t^3-3t^2$. *Nếu nhạy, các em có thể viết ngay* $(1)\Leftrightarrow (x+1)^3-3(x+1)^2=y^3-3y^2$ $(*)$. *Còn không, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức hoặc casio như các ví dụ trước, tức lưu* $1000\to A$, *rồi nhập vào casio phương trình* $X^3-3X-2=A^3-3A^2$ *và bấm shift solve cho* $X=999=1000-1$, *tức viết* $(1)\Leftrightarrow (x+1)^3-3(x+1)^2=y^3-3y^2\Leftrightarrow f(x+1)=f(y)$. *Nhưng hàm đặc trưng ở 2 vế* $f(t)=t^3-3t^2$ *không đơn điệu 1 chiều trên* $\mathbb{R}$. *Khi đó cần tìm điều kiện cho* $x+1$ *và y, rồi hợp 2 điều kiện này lại sẽ được miền D đi xét với hy vọng* $f(t)$ *luôn đơn điệu 1 chiều trên miền D. Thật vậy, từ (2) có điều kiện:* $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 2$ *nên suy ra:* $x+1\in D_1=[0;2]$, $y\in D_2=[0;2]$ *và* $D=D_1\cup D_2=[0;2]$. *Lúc này ta luôn có* $f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)\le 0$ *nên hàm số đặc trưng* $f(t)$ *nghịch biến trên* $[0;2]$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 1-x^2\ge 0 \\ 2y-y^2\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} 0\le x+1\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow (x+1)^3-3(x+1)^2=y^3-3y^2\Leftrightarrow f(x+1)=f(y)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2$ trên $[0;2]$ có $f'(t)=3t^2-6t\le 0,\ \forall t\in[0;2]$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[0;2]$.

Suy ra: $f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow y=x+1$ và thế vào phương trình (2), ta được:

$$(1)\Leftrightarrow x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2(x+1)-(x+1)^2}+2=0\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{1-x^2}+2=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)+2\sqrt{1-x^2}+1=4\Leftrightarrow (\sqrt{1-x^2}+1)^2=2^2\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+1=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow 1-x^2=1\Leftrightarrow x=0,\ \text{suy ra: } y=1.$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(0;1)\}$.

Ví dụ 449. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3-\sqrt[3]{x+y-2}-x+2=0 & (1) \\ y^3-8x^3+y^2+32x^2+2(y-23x)=-24 & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Vị Thanh – Tỉnh Hậu Giang

Phân tích. *Xuất phát từ* $(2) \Leftrightarrow y^3 + y^2 + 2y = 8x^3 - 32x^2 + 46x - 24$ *có x, y độc lập được ở 2 vế nên sẽ xây dựng hàm đặc trưng dạng* $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ *luôn đồng biến dựa vào vế trái. Khi đó sử dụng casio để gán* $1000 \to A$ *và nhập phương trình:*

$A^3 + A^2 + 2A = 8X^3 - 32X^2 + 46X - 24,$ *bấm shift solve được:* $X = 501,5 = \dfrac{1000+3}{2}$

Tức có $1000 = 2X - 3$ *hay* $(2) \Leftrightarrow y^3 + y^2 + 2y = (2x-3)^3 + (2x-3)^2 + 2(2x-3)$ *với 2 vế dạng* $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ *có* $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0,\ (do: \Delta < 0,\ a > 0).$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(2) \Leftrightarrow y^3 + y^2 + 2y = (2x-3)^3 + (2x-3)^2 + 2(2x-3) \Leftrightarrow f(y) = f(2x-3).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(y) = f(2x-3) \Leftrightarrow y = 2x - 3.$

$(1) \Leftrightarrow (2x-3)^3 = \sqrt[3]{3x-5} + x - 2.$ Đặt $2z - 3 = \sqrt[3]{3x-5} \Rightarrow \begin{cases} (2z-3)^3 = 3x - 5 \\ (2x-3)^3 = 2z + x - 5 \end{cases}$

Lấy vế trừ vế, suy ra: $(2z-3)^3 - (2x-3)^3 = 2(x - z)$

$$\Leftrightarrow (z-x)\cdot\left[(2x-3)^2 + (2x-3)(2z-3) + (2z-3)^2 + 1\right] = 0 \Leftrightarrow z = x.$$

Do $(2x-3)^2 + (2x-3)(2z-3) + (2z-3)^2 + 1 = \left(2x + z - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{3(2z-3)^2}{4} + 1 > 0.$

Nên: $\sqrt[3]{3x-5} = 2x - 3 \Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \Rightarrow y = \dfrac{-1 \mp \sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm $S = (x;y) = \left\{(2;1); \left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{4}; \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right); \left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{4}; \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 450. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y & (1) \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases} \quad (I)$

Đại học khối A năm 2012

Phân tích. *Nhận thấy (2) có dạng tam thức bậc 2 nhưng biệt số delta không là số chính phương nên không chọn phương án hằng số biến thiên. Do x, y có thể độc lập được ở 2 vế của (1) nên sẽ nghĩ đến việc sử dụng hàm số. Bạn đọc có thể sử dụng casio để tìm hàm đặc trưng ở phương trình (1) như các ví dụ trước, nhưng ở đây tôi xin được trình bày bằng phương pháp đồng nhất thức cũng cho kết quả tương tự như sau:*

$(1) \Leftrightarrow m\cdot(ax+b)^3 + n\cdot(ax+b) = m\cdot(cy+d)^3 + n\cdot(cy+d),\ (*)$ *với hàm số đặc trưng định sẵn là* $f(t) = m.t^3 + n.t$. *Khi đó so sánh hệ số hạng tử của bậc 3, bậc 2, bậc 1 trong* $(*)$ *với phương trình (1), ta sẽ tìm được* $m,\ n,\ a,\ b,\ c,\ d,$ *nghĩa là:*

Hạng tử bậc 3: $\begin{cases} ma^3x^3 = x^3 \\ nc^3y^3 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ma^3 = 1 \\ mc^3 = 1 \end{cases}$ *nên sẽ chọn* $m = a = c = 1$. *Khi đó viết phương trình* $(*)$ *dạng:* $(x+b)^3 + n.(x+b) = (y+d)^3 + n.(y+d)$.

Hạng tử bậc 2: $\begin{cases} 3bx^2 = -3x^2 \\ 3dy^2 = 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = -3 \\ 3d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ d = 1 \end{cases}\cdot$ *Viết phương trình* $(*)$ *dạng:*
$(x-1)^3 + n.(x-1) = (y+1)^3 + n.(y+1)$. *Ta cần tìm n nữa là xong !?!*

Hạng tử bậc 1: $\begin{cases} 3x + nx = -9x \\ 3y + ny = -9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + n = -9 \\ 3 + n = -9 \end{cases} \Leftrightarrow n = -12.$

Khi đó có thể viết $(1) \Leftrightarrow (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1)$ *và kiểm tra lại bằng cách khai triển, rồi so sánh với (1) thấy hoàn toàn giống nên việc làm là đúng hướng. Lúc này hàm đặc trưng ở 2 vế có dạng* $f(t) = t^3 - 12t$, *nhưng hàm này không đơn điệu một chiều trên ¡ do* $f'(t) = 3t^2 - 12$ *chưa xác định được dấu. Do đó ta cần tìm điều kiện cho lượng* $x-1,\ y+1$ *và hợp 2 điều kiện này lại được miền D với hy vọng* $f'(t)$ *luôn dương hoặc luôn âm. Quan sát (2), thấy có dạng hằng đẳng thức nên viết:* $(2) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ *và theo công thức lượng giác:* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, *gợi ta đến điều kiện quen thuộc:* $-1 \le x - \frac{1}{2} \le 1,\ -1 \le y + \frac{1}{2} \le 1,$ *hay* $(x-1) \in D_1 = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $(y+1) \in D_2 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ *và miền D để xét hàm số* $f(t)$ *là* $D = D_1 \cup D_2 = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ *thì* $f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0,\ \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]\cdot$ *Khi đó sẽ suy ra mối liên hệ giữa x, y là* $x - 1 = y + 1$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) & (3) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 & (4) \end{cases}$

$(3) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1)$ và $(4) \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x - \frac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le y + \frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \le y + 1 \le \frac{3}{2} \end{cases}.$

Xét $f(t) = t^3 - 12t$ trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ có: $f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0,\ \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]\cdot$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]\cdot$

Suy ra: $f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow x = y + 2$ và thế vào (4) được:

$(4) \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=1 \Rightarrow (x;y)=\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right).$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}.$

Nhận xét. *Việc áp dụng đồng nhất thức trên để tìm ra hàm đặc trưng trông có vẻ dài dòng nhưng khi đã làm quen thì khá dễ dàng và nhanh. Hơn nữa, ta đã quen với việc tìm điều kiện của những hàm căn, phân thức mà ít gặp việc tìm điều kiện kéo theo cho biểu thức đa thức. Ví dụ trên sẽ tìm điều kiện khi* x, y *đưa được về hằng đẳng thức độc lập giữa chúng, tức viết dưới dạng:* $(ax+b)^2+(cy+d)^2=e>0 \Rightarrow \begin{cases}(ax+b)^2 \le e\\ (cy+d)^2 \le e\end{cases}.$

Ví dụ 451. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1)\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 & (2)\end{cases} \quad (I)$

Đại học khối A năm 2013

Phân tích. *Nhận thấy (2) là tam thức bậc hai theo x hoặc theo y, nhưng biệt số delta không là số chính phương nên không giải bằng phương pháp hằng số biến thiên được. Quan sát (1) thấy có x, y có thể độc lập nhau, tức* $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=y+\sqrt{y^4+2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt[4]{x-1})^4+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+y \Leftrightarrow f(\sqrt[4]{x-1})=f(y).$ *Hàm số đặc trưng ở 2 vế có dạng* $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t$ *với* $f'(t)=\frac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0$ *chưa khẳng định được dấu nên sẽ tìm điều kiện cho* $\sqrt[4]{x-1}$ *và* $y.$ *Ta luôn có* $\sqrt[4]{x-1}\ge 0,$ *còn y chưa xác định nên sẽ quan tâm đến phương trình (2) với hy vọng tìm được điều kiện ở đó. Thật vậy:*

$(2) \Leftrightarrow (x^2+2xy+y^2)-2(x+y)+1=4y \Leftrightarrow \left[(x+y)^2-2(x+y)+1\right]=4y$

$\Leftrightarrow (x+y-1)^2=4y\ge 0,$ *suy ra:* $y\ge 0.$ *Lúc này xét hàm* $f(t)$ *trên* $\left[0;+\infty\right)$ *có* $f'(t)$ *luôn dương nên* $y=\sqrt[4]{x-1}$ *và thế vào phương trình còn lại thì bài toán được giải.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(\sqrt[4]{x-1})^4+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+y \Leftrightarrow f(\sqrt[4]{x-1})=f(y)\\ (x+y-1)^2=4y\ge 0 \Rightarrow y\ge 0 \qquad (3)\end{cases}.$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có: $f'(t)=\frac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0,\ \forall t\ge 0.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right).$

Suy ra: $f(\sqrt[4]{x-1})=f(y) \Leftrightarrow y=\sqrt[4]{x-1} \Leftrightarrow x=y^4+1$ và thế vào (3), ta được:

$(3) \Leftrightarrow (y^4+y)^2 = 4y \Leftrightarrow y(y^7+2y^4+y-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y^7+2y^4+y-4=0 \quad (4) \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(y)=y^7+2y^4+y-4$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có:

$f'(y)=7y^6+8y^3+1>0,\ \forall y\ge 0$ nên hàm số $f(y)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Mà $f(1)=0 \Leftrightarrow y=1,$ suy ra: $x=2.$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(1;0);(2;1)\right\}$.

Nhận xét. *Tuy đây không phải là hàm số bậc 3 nhưng tôi muốn đưa vào để các bạn có thể thành thạo việc tìm điều kiện biểu thức bậc 2 dựa vào số chính phương. Để thực hành điều này, ta có thể giải và theo dõi ví dụ sau:*

Ví dụ 452. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y \\ x^2+2x(y-2)+y^2-8y+4=0 \end{cases} \quad (I)$

Đề thi thử số 2 THPT Quốc Gia 2015 – Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 450

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2.$

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x-2}+\sqrt{(\sqrt[4]{x-2})^4+5}=y+\sqrt{y^4+5} \\ (x+y-2)^2=4y\ge 0 \Rightarrow y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\sqrt[4]{x-2})=f(y) & (1) \\ (x+y-2)^2=4y & (2) \end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^4+5}$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+5}}+1>0,\ \forall t\ge 0.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Suy ra: $f(\sqrt[4]{x-2})=f(y) \Leftrightarrow y=\sqrt[4]{x-2} \Leftrightarrow x=y^4+2$ và thế vào (2), ta được:

$(2) \Leftrightarrow y(y^7+2y^4+y-4)=0 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=2$ hoặc $y^7+2y^4+y-4=0 \quad (3)$

Xét hàm số $f(y)=y^7+2y^4+y-4$ trên $[0;+\infty)$ có:

$f'(y)=7y^6+8y^3+1>0,\ \forall y\ge 0$ nên hàm số $f(y)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Mà $f(1)=0 \Leftrightarrow y=1,$ suy ra: $x=3.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(2;0);(3;1)\right\}$.

Ví dụ 453. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^6-y^3+x^2-9y^2-30=28y & (1) \\ 1+x\sqrt{y+5}+2x+(x+1)\sqrt{y+2x+6}=0 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Từ (1) ta có x, y độc lập nhau tức* $(1) \Leftrightarrow x^6+x^2=y^3+9y^2+28y+30$ *hay* $(x^2)^3+x^2=y^3+9y^2+28y+30$ *và dựa vào vế trái để xây dựng hàm đặc trưng dạng* $f(t)=t^3+t.$ *Gán* $1000 \to A$ *vào casio, nhập* $A^3+A=X^3+9X^2+28X+30,$ *rồi bấm shift solve, cho ta kết quả:* $X=997=1000-3 \Leftrightarrow X+3=A.$ *Khi đó ta sẽ viết phương trình* $(1) \Leftrightarrow (x^2)^3+x^2=(y+3)^3+(y+3) \Leftrightarrow f(x^2)=f(y+3) \Leftrightarrow x^2=y+3$ *rồi thế vào phương trình còn lại sẽ tìm được mối liên hệ giữa x, y và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} y \ge -5 \\ y + 2x + 6 \ge 0 \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow (x^2)^3 + (x^2) = (y+3)^3 + (y+3) \Leftrightarrow f(x^2) = f(y+3).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x^2) = f(y+3) \Leftrightarrow x^2 = y + 3 \Leftrightarrow y = x^2 - 3$. Thế vào (2), ta được:

$(2) \Leftrightarrow 1 + x\sqrt{x^2+2} + 2x + (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1) + (x+1)\cdot\sqrt{(x+1)^2+2} = (-x) + (-x)\cdot\sqrt{(-x)^2+2} \Leftrightarrow f(x+1) = f(-x).$

Xét hàm số $f(z) = z + z\cdot\sqrt{z^2+2}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(z) = 1 + \sqrt{z^2+2} + \dfrac{z^2}{\sqrt{z^2+2}} > 0,\ \forall z \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(z)$ tăng trên $\mathbb{R}$. Suy ra $f(x+1) = f(-x) \Leftrightarrow x + 1 = -x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 1.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\right\}$.

Ví dụ 454. Giải hệ: $\begin{cases} 2x + xy\sqrt{x^2y^2+2} + (xy+1)\sqrt{x^2+4x+6} + 3 = 0 & (1) \\ xy(xy-1)^2 + x^2y^2 = (x+1)(x^2+x+1) & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy cả 2 phương trình không độc lập được x, y ở 2 vế, nhưng để ý ở phương trình (2) nếu xem $t = xy$ thì rõ ràng t, x độc lập ở 2 vế và ta sẽ xây dựng hàm đặc trưng. Thật vậy từ* $(2) \Leftrightarrow xy\cdot(x^2y^2 - 2xy + 1) + x^2y^2 = (x+1)\cdot(x^2+x+1)$

$\Leftrightarrow xy\cdot(x^2y^2 - xy + 1) = (x+1)\cdot\left[(x+1)^2 - (x+1) + 1\right] \Leftrightarrow f(xy) = f(x+1)$ *với hàm đặc trưng là* $f(t) = t^3 - t^2 + t$ *có* $f'(t) = 3t^2 - 2t + 1 = 2t^2 + (t-1)^2 > 0$ *với mọi t nên đã tìm được mối liên hệ giữa x, y, rồi thế vào phương trình còn lại và có lời giải sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(2) \Leftrightarrow xy\cdot(x^2y^2 - xy + 1) = (x+1)\cdot\left[(x+1)^2 - (x+1) + 1\right] \Leftrightarrow f(xy) = f(x+1).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 - 2t + 1 = 2t^2 + (t-1)^2 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(xy) = f(x+1) \Leftrightarrow xy = x + 1$.

$(1) \Leftrightarrow 2x + (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} + (x+2)\sqrt{x^2+4x+6} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(1 + \sqrt{x^2+2x+3}) + (x+2)\cdot(\sqrt{x^2+4x+6}) = 0 \qquad (3)$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+2x+3} > 0 \\ b = \sqrt{x^2+4x+6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x^2+2x+3 \\ b^2 = x^2+4x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 2x+3 \\ x = \dfrac{b^2-a^2-3}{2} \end{cases}$.

$(3) \Leftrightarrow \dfrac{b^2-a^2-1}{2}\cdot(1+a) + \dfrac{b^2-a^2+1}{2}\cdot(1+b) = 0$

$\Leftrightarrow (1+a)(b^2-a^2-1) + (1+b)(b^2-a^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[(1+a)(b^2-a^2)+(1+b)(b^2-a^2)\right]+b-a=0 \Leftrightarrow (b^2-a^2)(a+b+2)+(b-a)=0$

$\Leftrightarrow (b-a)\left[(a+b)(a+b+2)+1\right]=0 \Leftrightarrow a=b$ do $(a+b)(a+b+2)+1>0, \forall a,b>0.$

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+4x+6} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{3}\cdot$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}\cdot$

c. <u>Dạng 3</u>. Có 1 phương trình dạng: $\left[\begin{array}{l} a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1=(a_2y+b_2)\sqrt{c_2y+d_2} \\ (a_1x+b_1)\sqrt{c_1y+d_1}=(a_2y+b_2)\sqrt{c_2y+d_2} \end{array}\right.$

Khi đó ta sẽ biến đổi phương trình mà cần bám sát vào căn thức để xây dựng hàm đặc trưng. Để hiểu kỹ hơn vấn đề này, ta cùng xét các ví dụ sau:

<u>Ví dụ 455.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1) \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2) \end{cases}$

Đại học khối A năm 2010

<u>Phân tích</u>*. Nhận thấy phương trình (1) có x, y độc lập được ở 2 vế và có dạng cơ bản:* $a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1=(a_2y+b_2)\sqrt{c_2y+d_2}$ *nên sẽ nghĩ đến việc sử dụng phương pháp hàm. Khi đó ta sẽ bám sát vào căn thức để xây dựng hàm số đặc trưng, nghĩa là viết:* $(1) \Leftrightarrow 4x^3+x=(3-y)\sqrt{5-2y}.$ *Do trong căn thức chứa 2y nên sẽ nhân 2 cho hai vế để tạo lượng 2y bên ngoài, tức:* $(1) \Leftrightarrow 8x^3+2x=(6-2y)\sqrt{5-2y}.$ *Biểu thức trong căn chứa* $5-2y$ *nên viết* $8x^3+2x=\left[(\sqrt{5-2y})^2+1\right]\sqrt{5-2y}=(\sqrt{5-2y})^3+\sqrt{5-2y}$ $\Leftrightarrow (2x)^3+(2x)=(\sqrt{5-2y})^3+\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2y})$ *nên đã xây dựng được hàm số đặc trưng ở 2 vế có dạng* $f(t)=t^3+t$ *có* $f'(t)=3t^2+1>0$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$*. Từ đó tìm được mối liên hệ giữa x, y, rồi thế vào (2) và có lời giải chi tiết sau:*

✎ ***<u>Lời giải</u>****.* Điều kiện: $x\le\frac{3}{4};\ y\le\frac{5}{2}\cdot$

$(1) \Leftrightarrow (2x)^3+(2x)=(\sqrt{5-2y})^3+\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2y}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2x)=f(\sqrt{5-2y}) \Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{2}(5-4x^2) \end{cases}.$

Thế vào phương trình (2) ta được:

$(2) \Leftrightarrow 4x^2+\frac{1}{4}(5-4x^2)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0 \qquad (3)$

Do sử dụng casio tìm được (3) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$ nên có thể xử lý phương trình (3) bằng phương pháp hàm số như sau: (có thể giải bằng liên hợp).

Xét hàm số $f(x)=4x^2+\dfrac{1}{4}(5-4x^2)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ trên $\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$ có:

$$f'(x)=8x-2x(5-4x^2)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}=2x(-1-4x^2)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0,\ \forall x\in\left[0;\frac{3}{4}\right).$$

Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$ và có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=7.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};7\right)\right\}.$

Ví dụ 456. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^3+12y^2+25y+18=(2x+9)\sqrt{x+4} & (1)\\ \sqrt{3x+1}+3x^2-14x-8=\sqrt{6-4y-y^2} & (2)\end{cases}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – THPT Nghi Sơn – Tỉnh Thanh Hóa

Phân tích. *Nhận thấy từ:* $(1)\Leftrightarrow 2y^3+12y^2+25y+18=\left[2(\sqrt{x+4})^2+1\right]\sqrt{x+4}$ *hay* $(1)\Leftrightarrow 2y^3+12y^2+25y+18=2(\sqrt{x+4})^3+\sqrt{x+4}$. *Sử dụng casio gán* $1000\to A$ *và nhập* $2X^3+12X^2+25X+18=2A^3+A$ *và bấm shift solve, được* $X=998=1000-2$, *nghĩa là viết:* $(1)\Leftrightarrow 2(y+2)^3+(y+2)=2(\sqrt{x+4})^3+\sqrt{x+4}\Leftrightarrow f(y+2)=f(\sqrt{x+4})$ *với hàm đặc trưng* $f(t)=2t^3+t$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$ *nên có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{3}$ và $-2-\sqrt{10}\le y\le -2+\sqrt{10}$.

$(1)\Leftrightarrow 2(y+2)^3+(y+2)=2(\sqrt{x+4})^3+\sqrt{x+4}\Leftrightarrow f(y+2)=f(\sqrt{x+4}).$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=6t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(y+2)=f(\sqrt{x+4})\Leftrightarrow y+2=\sqrt{x+4}\Leftrightarrow x=y^2+4y$, với $y\ge -2$.

Thế vào phương trình $(2)\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ (3)

Do sử dụng casio, tìm được $x=5$ *là nghiệm duy nhất (3), nên ghép hằng số liên hợp.*

$(3)\Leftrightarrow(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0$

$$\Leftrightarrow\frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-5)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0\Leftrightarrow x=5\Rightarrow y=1.$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(5;1)\}.$

Ví dụ 457. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{9-4y^2} = 2x^2 + 6y^2 - 7 & (2) \end{cases}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – THPT Trần Phú – Thanh Hóa

Phân tích. *Nếu chuyển vế và rút* $\sqrt{1-x}$ *làm nhân tử thì (1) có dạng cơ bản, tức có:*
$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = (3-2x)\sqrt{1-x} = \left[2(\sqrt{1-x})^2 + 1\right]\sqrt{1-x} = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x}$ *và 2 vế có dạng hàm đặc trưng* $f(t) = 2t^3 + t$ *luôn đơn điệu trên* $\mathbb{R}$. *Từ đó có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \le 1,\ -\dfrac{3}{2} \le y \le \dfrac{3}{2}\cdot$

$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}).$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \ge 0 \Leftrightarrow y^2 = 1-x,\ 0 \le y \le \dfrac{3}{2}\cdot$

Thế vào phương trình $(2) \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1$ (3)

Phương trình (3) dạng $\sqrt{ax+b} = cx^2 + dx + e$, *có rất nhiều hướng giải. Sau đây, tôi xin được trình cách giải bằng liên hợp, lũy thừa, đặt ẩn phụ, đưa về dạng* $A^2 = B^2$.

- **Hướng 1**. Sử dụng chức năng table của casio, tìm được nhân tử $x^2 - 4x + 1$.

Do $2x - 3 + \sqrt{4x+5} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} = 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3}$ và thế vào (3) không thỏa nên xét $2x - 3 + \sqrt{4x+5} \ne 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \ne 0,$ ta có:

$(3) \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 1) + \left[(2x-3) - \sqrt{4x+5}\right] = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 + \dfrac{2(x^2-4x+1)}{2x - 3 + \sqrt{4x+5}} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{2x-3+\sqrt{4x+5}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt[4]{2} \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(1-\sqrt{2}; \pm\sqrt[4]{2})\right\}\cdot$

- **Hướng 2.** Lũy thừa lên sau khi biết nhân tử là $x^2 - 4x + 1$.

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \ge 0 \\ x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \ge 0 \\ (x^2 - 4x + 1)\cdot(x^2 - 2x - 1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt[4]{2}. \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

- **Hướng 3.** Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5}\Rightarrow\begin{cases}4y^2-12y+9=4x+5\\2x^2-6x-1=2y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-3y+1=x\\x^2-3x+1=y\end{cases}$

$\Rightarrow x^2-y^2-2(x-y)=0\Leftrightarrow(x-y)(x+y-2)=0\Leftrightarrow x=y$ hoặc $y=2-x.$

Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{4x+5}=2x-3:$ vô nghiệm $\forall x\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]\cdot$

Với $y=2-x,$ suy ra: $\sqrt{4x+5}=1-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\x^2-2x-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\sqrt{2}\\y=\pm\sqrt[4]{2}\end{cases}.$

- **Hướng 4.** Nhân 2 vế của phương trình (3) cho 2, ta được:

$(3)\Leftrightarrow2\sqrt{4x+5}=4x^2-12x-2\Leftrightarrow(\sqrt{4x+5}+1)^2=(2x-2)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{4x+5}+1=2x-2\\\sqrt{4x+5}+1=-2x+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{4x+5}=2x-3\\\sqrt{4x+5}=1-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-\sqrt{2}\\y=\pm\sqrt[4]{2}\end{cases}.$

Ví dụ 458. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+2}=y^3+3y^2+5y+3 & (1)\\x^3+2x^2+x-7y^2-14y+19=3\sqrt[3]{9(y+1)^2} & (2)\end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Gia Định – Tp. Hồ Chí Minh

Phân tích. *Viết* $(1)\Leftrightarrow y^3+3y^2+5y+3=(x+4)\sqrt{x+2}=[(\sqrt{x+2})^2+2]\cdot\sqrt{x+2}$ *hay* $(\sqrt{x+2})^3+2\sqrt{x+2}=y^3+3y^2+5y+3.$ *Gán* $1000\to A$ *vào casio và nhập phương trình* $A^3+2A=X^3+3X^2+5X+3,$ *rồi bấm shift solve, được* $X=999=1000-1,$ *tức* $(1)\Leftrightarrow(\sqrt{x+2})^3+2\sqrt{x+2}=(y+1)^3+2(y+1)$ *với hàm đặc trưng* $f(t)=t^3+2t$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$. *Từ đó sẽ tìm được mối liên hệ giữa x, y và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-2.$

$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{x+2})^3+2\sqrt{x+2}=(y+1)^3+2(y+1)\Leftrightarrow f(\sqrt{x+2})=f(y+1).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{x+2})=f(y+1)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=y+1\Leftrightarrow\begin{cases}y-1\\x+2=(y+1)^2\end{cases}.$

$(2)\Leftrightarrow x^3+2x^2+x-7(y+1)^2+26=3.\sqrt[3]{9(y+1)^2}$ và thế $x+2=(y+1)^2$ thì:

$\Leftrightarrow x^3+2x^2-6x+12=3.\sqrt[3]{9(x+2)}$ (3)

Do sử dụng casio, tìm được nghiệm duy nhất $x=1$ *của phương trình (3) nên có thể giải bằng liên hợp, bất đẳng thức, hàm số.*

Ta có: $VP_{(3)}=3.\sqrt[3]{9(x+2)}=3.\sqrt[3]{3.3.(x+2)}\overset{Cauchy}{\le}3+3+x+2=x+8$ (4)

Mà: $VT_{(3)}=x^3+2x^2-6x+12\ge x+8\Leftrightarrow(x-1)^2(x+4)\ge0:$ đúng $\forall x\ge-2$ (5)

Do đó nghiệm của (3) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức của (4) và (5) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=1,$ suy ra: $y=\sqrt{3}-1.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(1;\sqrt{3}-1)\right\}\cdot$

Ví dụ 459. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y-1}+3\sqrt{x-2}+x^2=12 & (1)\\ x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} & (2)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Phân tích. *Từ điều kiện:* $y\ge 1$ *nên viết* $(2)\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=\sqrt{y^2(y+3)}=y\sqrt{y+3}$ *hay* $x^3-3x^2+2=\left[(\sqrt{y+3})^2-3\right]\sqrt{y+3}=(\sqrt{y+3})^3-3y.$ *Tương tự các ví dụ trước, sử dụng casio, sẽ viết lại:* $(2)\Leftrightarrow(x-1)^3-3(x-1)=(\sqrt{y+3})^3-3\sqrt{y+3}.$ *Do* $x\ge 2$ *và* $y\ge 1$ *nên* $x-1\ge 1,$ $\sqrt{y+3}\ge 2.$ *Lúc này xét hàm đặc trưng* $f(t)=t^3-3t$ *với* $t\ge 1$ *thì* $f'(t)=3t^2-3=3(t^2-1)\ge 0,$ $\forall t\ge 1$ *nên* $f(t)$ *luôn đồng biến trên* $[1;+\infty)$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2,$ $y\ge 1.$

$(2)\Leftrightarrow(x-1)^3-3(x-1)=(\sqrt{y+3})^3-3\sqrt{y+3}\Leftrightarrow f(x-1)=f(\sqrt{y+3}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên $\left[1;+\infty\right)$ có $f'(t)=3(t^2-1)\ge 0,$ $\forall t\ge 1.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Suy ra: $f(x-1)=f(\sqrt{y+3})\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y+3}\Leftrightarrow y=x^2-2x-2.$

Thế vào $(2)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-3}+3\sqrt{x-2}+x^2-12=0$ (3) với điều kiện: $x\ge 3.$

Sử dụng casio, tìm được phương trình (3) có nghiệm duy nhất nên có thể sử dụng phương pháp hàm số hoặc liên hợp để giải nó.

- **Hướng 1**. Sử dụng kỹ thuật nhân lượng liên hợp.

$(3)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-3}+3(\sqrt{x-2}-1)+x^2-9=0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(x-3)}+\frac{3(x-3)}{\sqrt{x-2}+1}+(x-3)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-3}\cdot\left[\sqrt{x+1}+\frac{3}{\sqrt{x-2}+1}+(x+3)\sqrt{x-3}\right]=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=1.$$

Do $\sqrt{x+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x-2}+1}+(x+3)\sqrt{x-3}>0,$ $\forall x\ge 3.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(3;1)\right\}\cdot$

- **Hướng 2**. Sử dụng phương pháp hàm số.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}+3\sqrt{x-2}+x^2-12$ trên $\left[3;+\infty\right)$ có:

$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x-2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}+2x>0,$ $\forall x>3.$ Suy ra $f(x)$ đồng biến $\left[3;+\infty\right)$.

Mà $f(3)=0 \Leftrightarrow x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3). Suy ra: $y=1$.

Ví dụ 460. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2x^2=5-2y & (1) \\ (15-2x)\sqrt{6-x}-(4y+9)\sqrt{2y+3}=0 & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Long An năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy (2) có dạng cơ bản* $(a_1x+b_1)\sqrt{c_1y+d_1}=(a_2y+b_2)\sqrt{c_2y+d_2}$. *Khi đó ta dựa vào biểu thức trong căn thức ở 2 vế để đi tìm hàm đặc trưng, nghĩa là:*

$$(2) \Leftrightarrow \left[2(6-x)+3\right]\cdot\sqrt{6-x}=\left[2(2y+3)+3\right]\cdot\sqrt{2y+3}$$

$$\Leftrightarrow \left[2(\sqrt{6-x})^2+3\right]\cdot\sqrt{6-x}=\left[2(\sqrt{2y+3})^2+3\right]\cdot\sqrt{2y+3}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{6-x})^3+3\sqrt{6-x}=2(\sqrt{2y+3})^3+3\sqrt{2y+3} \Leftrightarrow f(\sqrt{6-x})=f(\sqrt{2y+3}).$$

Đã xác định hàm đặc trưng $f(t)=2t^3+3t$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$ *và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\le 6;\ y\ge -\dfrac{3}{2}\cdot$

$$(2) \Leftrightarrow 2(\sqrt{6-x})^3+3\sqrt{6-x}=2(\sqrt{2y+3})^3+3\sqrt{2y+3} \Leftrightarrow f(\sqrt{6-x})=f(\sqrt{2y+3}).$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=6t^2+3>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(\sqrt{6-x})=f(\sqrt{2y+3}) \Leftrightarrow \sqrt{6-x}=\sqrt{2y+3} \Leftrightarrow 2y=3-2x.$

Thế vào $(1) \Leftrightarrow x^3+2x^2-x-2=0,$ suy ra: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(1;1);(-1;2);\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 461. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x}+(3y-20)\sqrt{6-y}=0 & (1) \\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{2y-3x+8}+3x^2=14x+8 & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2013 – Chuyên Bến Tre – Tỉnh Bến Tre

Phân tích. *Tương tự, từ* $(1) \Leftrightarrow \left[3(\sqrt{7-x})^2+2\right]\sqrt{7-x}=\left[3(\sqrt{6-y})^2+2\right]\sqrt{6-y}$

$$\Leftrightarrow 3(\sqrt{7-x})^3+2\sqrt{7-x}=3(\sqrt{6-y})^2+2\sqrt{6-y} \Leftrightarrow f(\sqrt{7-x})=f(\sqrt{6-y}).$$

Từ đó đã xây dựng được hàm đặc trưng $f(t)=3t^3+2t$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

Lời giải. Điều kiện: $x\le 7,\ y\le 6,\ 2x+y+2\ge 0,\ 2y-3x+8\ge 0.$

$$(1) \Leftrightarrow 3(\sqrt{7-x})^3+2\sqrt{7-x}=3(\sqrt{6-y})^2+2\sqrt{6-y} \Leftrightarrow f(\sqrt{7-x})=f(\sqrt{6-y}).$$

Xét hàm số $f(t)=3t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=9t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{7-x})=f(\sqrt{6-y}) \Leftrightarrow \sqrt{7-x}=\sqrt{6-y} \Leftrightarrow y=x-1$ và thế vào (2) thì:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0;\ \forall x\in\left[-\frac{1}{3};6\right]$

$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0\Leftrightarrow x=5\Rightarrow y=4.$

Do: $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0,\ \forall x\in\left[-\frac{1}{3};6\right]\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(5;4)\}\cdot$

Ví dụ 462. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1})+3y(2+\sqrt{9y^2+3})=0\\ 4x^3-3y+5+3\sqrt{1-3y}=0\end{cases}$

Học sinh giỏi khu vực Đồng Bằng Sông Cửu Long

***Phân tích**. Từ (1) có x, y độc lập nhau nên sẽ nghĩ đến phương pháp hàm số. Nếu chuyển vế phương trình (1) và để ý đến tính chất số chính phương* $a^2=(-a)^2$ *ta thu được:* $(1)\Leftrightarrow(4x+2)\cdot(1+\sqrt{x^2+x+1})=(-3y)\cdot(2+\sqrt{(-3x)^2+3})=0.$ *Ở vế phải có dạng hàm đặc trưng* $f(t)=t.(2+\sqrt{t^2+3})$ *nên sẽ dựa vào nó để xây dựng bên vế trái. Do trong căn có hằng số 3 nên ta sẽ tạo ra bằng cách rút số 2 ở* $4x+2=2.(2x+1)$ *để đưa vào căn, tức:* $VT_{(1)}=(4x+2)\cdot(1+\sqrt{x^2+x+1})=(2x+1)\cdot(2+\sqrt{4x^2+4x+1})$ *hay* $VT_{(1)}=(2x+1)\cdot\left[2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right]$ *cũng dạng hàm số đặc trưng giống vế phải. Tức:* $(1)\Leftrightarrow(2x+1)\cdot\left[2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right]=(-3y)\cdot\left[2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right]$ *và có lời giải như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $y\le\frac{1}{3}\cdot$

$(1)\Leftrightarrow(2x+1)[2+\sqrt{(2x+1)^2+3}]=(-3y)[2+\sqrt{(-3x)^2+3}]=0\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3y).$

Xét hàm số $f(t)=t.(2+\sqrt{t^2+3})$ trên ℝ có $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\ \forall t\in$ ℝ.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên ℝ. Suy ra $f(2x+1)=f(-3y)\Leftrightarrow 2x+1=-3y.$

$(2)\Leftrightarrow 4x^3+2x+3\sqrt{2x+2}+6=0$ (3), điều kiện $x\ge-1.$

Xét hàm số $f(x)=4x^3+2x+3\sqrt{2x+2}+6$ trên $\left[-1;+\infty\right)$ có:

$f'(x)=12x^2+2+\frac{3}{\sqrt{2x+2}}>0,\ \forall x>-1.$ Nên hàm số $f(x)$ đồng biến $\left[-1;+\infty\right).$

Suy ra $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất mà ta có: $f(-1)=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=\frac{1}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

Ví dụ 463. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(18x+9)\sqrt{x^2+x+1}=y\sqrt{4y^2+27} & (1)\\(2y+3)^2=24\sqrt{x}.(2y-9) & (2)\end{cases}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – TTLT Đại học Ngoại Thương – Tp. HCM

Phân tích. *Nhận thấy* $VP_{(1)}$ *bên trong căn có* $4y^2=(2y)^2$ *nên sẽ tạo ra* $2y$ *ở bên ngoài căn bằng cách nhân thêm 2 ở hai vế (1) và đưa số 2 này vào căn ở vế trái của nó. Tức* $(1)\Leftrightarrow 9.(2x+1)\cdot\sqrt{4x^2+4x+4}=2y.\sqrt{(2y)^2+27}$ *và lúc này thấy bên ngoài ở vế trái có* $2x+1$ *nên viết* $(1)\Leftrightarrow 9.(2x+1).\sqrt{(2x+1)^2+3}=(2y).\sqrt{(2y)^2+27}$. *Vẫn chưa xuất hiện hàm đặc trưng ở 2 vế, nếu để ý vế trái có số 9, rồi chuyển vế và đưa số* $\dfrac{1}{3}$ *vào căn thì sẽ được hàm đặc trưng ở 2 vế giống nhau dạng:* $f(t)=t.\sqrt{t^2+3}$, *nghĩa là:*

$$(1)\Leftrightarrow(2x+1).\sqrt{(2x+1)^2+3}=\left(\frac{2y}{3}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{2y}{3}\right)^2+3}\Leftrightarrow f(2x+1)=f\left(\frac{2y}{3}\right).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$.

$$(1)\Leftrightarrow(2x+1).\sqrt{(2x+1)^2+3}=\left(\frac{2y}{3}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{2y}{3}\right)^2+3}\Leftrightarrow f(2x+1)=f\left(\frac{2y}{3}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t.\sqrt{t^2+3}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(2x+1)=f\left(\dfrac{2y}{3}\right)\Leftrightarrow 6x+3=2y.$

$(2)\Leftrightarrow(x+1)^2-4\sqrt{x}.(x-1)=0\Leftrightarrow x^2-4x\sqrt{x}+2x+4\sqrt{x}+1=0 \qquad (3)$

Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình (3) nên chia 2 vế (3) cho $x\ne 0$:

$$(3)\Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+2+\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+2=0 \qquad (4)$$

Đặt $t=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, suy ra: $t^2=x+\dfrac{1}{x}-2$ nên $(4)\Leftrightarrow t^2-4t+4=0\Leftrightarrow t=2.$

Suy ra: $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2\Leftrightarrow(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=1+\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}x=3+2\sqrt{2}\\y=\dfrac{21+12\sqrt{2}}{2}\end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $(x;y)=\left(3+2\sqrt{2};\dfrac{21+12\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ví dụ 464. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})(1-\sqrt{3x-9x^2})=(\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y})(1-\sqrt{3y-9y^2}) & (1)\\ x^2+3y+2\sqrt{1-2y}=\dfrac{1414}{625} & (2)\end{cases}$$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lê Quí Đôn – Tỉnh Bình Định

Lời giải. Điều kiện: $0<x\le\frac{1}{3};\ 0\le y\le\frac{1}{3}\cdot$ Nhân 2 vế của (1) cho 2, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})\cdot(2-2\sqrt{3x-9x^2})=(\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y})\cdot(2-2\sqrt{3y-9y^2})$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})\cdot[1+(1-2\sqrt{3x-9x^2})]=(\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y})\cdot[1+(1-2\sqrt{3y-9y^2})]$$

Áp dụng hằng đẳng thức: $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)=(a-b)(a^2+b^2-2ab),$ ta được: $(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})^3=(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})\cdot(3x+1-3x-2\sqrt{3x-9x^2})$

Hay $\begin{cases}(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})^3=(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})\cdot(1-2\sqrt{3x-9x^2})\\ (\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y})^3=(\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y})\cdot(1-2\sqrt{3y-9y^2})\end{cases}\cdot$ Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})+(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})^3=(\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y})+(\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y})^3$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})=f(\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y}).$$

Xét hàm số $f(t)=t+t^3$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=1+3t^2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x})=f(\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y})\Leftrightarrow\sqrt{3x}-\sqrt{1-3x}=\sqrt{3y}-\sqrt{1-3y}$

$\Leftrightarrow(\sqrt{3x}-\sqrt{3y})+(\sqrt{1-3y}-\sqrt{1-3x})=0$ và do $x=y=0$ thì hệ vô nghiệm nên liên hợp được: $\dfrac{3(x-y)}{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}+\dfrac{3(x-y)}{\sqrt{1-3y}+\sqrt{1-3x}}=0$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{3}{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}+\frac{3}{\sqrt{1-3y}+\sqrt{1-3x}}\right)=0\Leftrightarrow x=y.$$

Thế vào phương trình $(2)\Leftrightarrow x^2+3x+2\sqrt{1-2x}-\dfrac{1414}{625}=0$ (3)

Xét hàm số $f(x)=x^2+3x+2\sqrt{1-2x}-\dfrac{1414}{625}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$ có:

$$f'(x)=2x+3-\frac{2}{\sqrt{1-2x}}>0\Rightarrow f''(x)=2-\frac{2}{(\sqrt{1-2x})^3}<0,\ \forall x\in\left[0;\frac{1}{3}\right]\cdot$$

Do đó hàm số $f'(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]\cdot$

Suy ra: $f'(x)>f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=5-\dfrac{112}{27}>0.$ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]\cdot$

Mà: $f\left(\frac{8}{25}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{8}{25},$ suy ra: $y=\frac{8}{25}\cdot$ **Kết luận**: $S=(x;y)=\left\{\left(\frac{8}{25};\frac{8}{25}\right)\right\}\cdot$

Nhận xét. *Các dạng cơ bản thường gặp khi trong hệ mà có một phương trình chứa:*

- $\left[ax+\sqrt{(ax)^2+1}\right]\cdot\left[by+\sqrt{(by)^2+1}\right]=1\xrightarrow{PP}$ *Liên hợp để sử dụng hàm số.*
- $a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1=a_2y^3+b_2y^2+c_2y\xrightarrow{PP}$ *sử dụng casio hoặc đồng nhất để đưa về dạng* $m(ax+b)^3+n(ax+b)=m(cy+d)^3+n(cy+d)$ *và sử dụng hàm số.*
- $\left[\begin{array}{l}\circ\ a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1=(a_2y+b_2)\cdot\sqrt{c_2y+d_2}\\ \circ\ (a_1x+b_1)\cdot\sqrt{c_1y+d_1}=(a_2y+b_2)\cdot\sqrt{c_2y+d_2}\end{array}\right.\xrightarrow{PP}$ *bám sát vào căn thức (bậc thấp nhất trong phương trình) để xây dựng hàm đặc trưng và sử dụng hàm số.*

2. Một số kỹ năng làm xuất hiện hàm số đặc trưng

a. *Chia để xuất hiện hàm số đặc trưng*

Trong một số bài toán, biến x và y chưa độc lập ở 2 vế, ta cần chia để chúng độc lập nhau hoặc sau khi chia chúng chưa độc lập nhau nhưng vẫn xây dựng được hàm đặc trưng ở 2 vế. Ta cùng xét các ví dụ sau để hiểu rõ hơn vấn đề này.

Ví dụ 465. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^3.(4x^2+1)+2.(y^2+1).\sqrt{y}=6 & (1)\\ y^2.x.(2+2\sqrt{4x^2+1})=y+\sqrt{y^2+1} & (2)\end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Quảng Nam năm 2014 – 2015

Phân tích. *Từ (2) nếu chia cho* $y^2>0,$ *thì sẽ độc lập được x, y ở 2 vế nên khả năng sử dụng hàm số là rất cao. Thật vậy:* $(2)\Leftrightarrow 2x+2x\cdot\sqrt{(2x)^2+1}=\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2+1}$ *với hàm đặc trưng* $f(t)=t+t.\sqrt{t^2+1}$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $y\geq 0.$ Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên xét $y>0$ và từ (2), để hệ phương trình có nghiệm thì $x>0.$

$$(2)\Leftrightarrow 2x+2x\cdot\sqrt{(2x)^2+1}=\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2+1}\Leftrightarrow f(2x)=f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot$$

Xét $f(t)=t+t.\sqrt{t^2+1}$ trên $\left(0;+\infty\right)$ có: $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0,\ \forall t>0.$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty).$ Suy ra: $f(2x)=f\left(\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow 2x=\frac{1}{y}\cdot$

Thế vào $(1)\Leftrightarrow y^3+y+2(y^2+1)\sqrt{y}-6=0$ (3)

Sử dụng casio, tìm được phương trình (3) có nghiệm duy nhất $y=1$ *và quan sát thấy vế trái của (3) có đạo hàm có khả dương nên sử dụng hàm số để giải.*

Xét hàm số $f(y)=y^3+y+2(y^2+1)\sqrt{y}-6$ trên $(0;+\infty)$ có:

$f'(y)=3y^2+y+4\sqrt{y}+\dfrac{y^2+1}{\sqrt{y}}>0,\ \forall y>0$ nên $f(y)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó phương trình $f(y)=0$ có tối đa 1 nghiệm mà $f(1)=0\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};1\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 466. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y.(1-\sqrt{1+y^2})=x-\sqrt{1+x^2} & (1)\\ \sqrt{x^2+x+xy}-\sqrt{x^2-x+xy}=\sqrt{7}-\sqrt{3xy} & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy nếu chia (1) cho* $x^2>0$ *sẽ độc lập được x, y ở 2 vế của phương trình. Thật vậy:* $(1)\Leftrightarrow y-y\cdot\sqrt{1+y^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}$ *nên khả năng sử dụng hàm số là rất cao. Vấn đề ở đây là đi tìm điều kiện của x để khi đưa vào căn thức không phải chia ra các trường hợp dài dòng ?!.*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x+xy\ge 0\\ x^2-x+xy\ge 0\end{cases}$ và $xy\ge 0.$

Do: $1-\sqrt{1+y^2}\le 0,\ x-\sqrt{1+x^2}<0$ nên từ (2), suy ra: $x^2y>0$ với $x^2>0$ và do từ điều kiện $xy\ge 0,$ suy ra: $y>0$ và $x>0.$

$(1)\Leftrightarrow y-y\cdot\sqrt{1+y^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\Leftrightarrow f(y)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot$

Xét hàm số $f(t)=t-t.\sqrt{1+t^2}$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=(1-\sqrt{1+t^2})-\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}<0.$

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra: $f(y)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}\cdot$

Thế $xy=1$ vào (2), được: $(2)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ (3)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ trên $(0;+\infty)$ có:

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+4}}-\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-4x+4}}$$
$$=\frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}-\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}=f(2x+1)-f(2x-1).$$

Xét hàm số $f(z)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2+3}}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(z)=\dfrac{3}{\sqrt{(z^2+3)^3}}>0,\ \forall z\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(z)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $2x+1>2x-1$ nên $f(2x+1)>f(2x-1)$ hay $f(2x+1)-f(2x-1)>0,$ suy ra: $f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra $f(x)$ đồng biến $(0;+\infty)$ và có $f(x)=f(2)=\sqrt{7}-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(2;\dfrac{1}{2}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 467. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\dfrac{1}{2y}-4\sqrt{\dfrac{1}{2y}+3}+8 & (1)\\ x+\sqrt{x^2+1}=x^2y.(2+2\sqrt{4y^2+1}) & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Xuất phát từ (2), nếu chia hai vế cho $x^2>0$ thì sẽ độc lập được x, y ở hai vế nên khả năng sử dụng hàm số là rất cao. Thật vậy:*

$(2)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x^2+1}=2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}$ *và vế phải có dạng hàm đặc trưng quen thuộc* $f(t)=t+t.\sqrt{t^2+1}$ *có* $f'(t)=1+\sqrt{1+t^2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}>0$ *nên sẽ đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

Vấn đề còn lại là đưa $\dfrac{1}{x}$ *vào trong căn thức, tạo ra* $VP=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ *khi* $x>0.$ *Nhưng điều kiện* $-3\le x\le 2$ *sẽ không cho phép ta làm điều ấy mà cần phải chia ra 2 trường hợp âm, tức* $x\in\left[-3;0\right)$ *và dương, tức* $x\in\left(0;2\right].$ *Để khắc phục điều này ta đi tìm điều kiện chặt cho x. Để ý vế phải (1) có dạng hằng đẳng thức theo biến y, nghĩa là:*

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{1}{2y}+3}\right)^2-2.2.\sqrt{\frac{1}{2y}+3}+4=\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}-1$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{1}{2y}+3}-2\right)^2=\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}-1\ge 0\Rightarrow\sqrt{3+x}\ge 1+\sqrt{2-x}$$

$\Leftrightarrow 3+x\ge 3-x+2\sqrt{2-x}\Leftrightarrow\sqrt{2-x}\le x\Leftrightarrow 1\le x\le 2.$ *Khi đó đưa x vào căn dễ dàng.*

❧ ***Lời giải***. Điều kiện: $\begin{cases}1\le x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}y>0\\ y\le-\dfrac{1}{6}\end{array}\right.\end{cases}.$

$$(2)\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=2y+2y\cdot\sqrt{(2y)^2+1}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f(2y).$$

Xét hàm số $f(t)=t+t.\sqrt{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=1+\sqrt{1+t^2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$

Do đó hàm số $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(2y)\Leftrightarrow\frac{1}{x}=2y\Leftrightarrow x=\frac{1}{2y}\cdot$

Thế vào phương trình $(1)\Leftrightarrow x-5\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}+8=0$ (3)

Sử dụng casio, tìm được $x=1$ là nghiệm duy nhất của (3) nên có thể sử dụng phương pháp liên hợp hoặc phương pháp hàm số hoặc bất đẳng thức để giải.

$(3)\Leftrightarrow(x-1)-5\cdot(\sqrt{x+3}-2)+(\sqrt{2-x}-1)=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left(1-\frac{5}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1}{\sqrt{2-x}+1}\right)=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot$$

Do: $1-\frac{5}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1}{\sqrt{2-x}+1}=\frac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1}{\sqrt{2-x}+1}<0,\ \forall x\in[1;2]\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 468. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4\sqrt{1+2x^2y}-1=3x+2\sqrt{1-2x^2y}+\sqrt{1-x^2} & (1)\\ 2x^3y-x^2=\sqrt{x^4+x^2}-2x^3y\sqrt{4y^2+1} & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Từ (2) nếu chuyển vế* $(2)\Leftrightarrow 2x^3y+2x^3y\sqrt{4y^2+1}=\sqrt{x^4+x^2}+x^2$ *và chia cả hai vế cho lượng* $x^3\neq 0$ *sẽ độc lập được x, y ở 2 vế và sẽ xuất hiện hàm đặc trưng.*

Thật vậy: $(2)\Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot$ *Từ đó sẽ tìm được mối liên hệ giữa x và y, rồi thế vào phương trình còn lại sẽ tìm được x, y.*

Lời giải. Điều kiện: $1+2x^2y\geq 0,\ 1-2x^2y\geq 0$ và $-1\leq x\leq 1$.

Với $x=0,$ thì hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}3=3\\0=0\end{cases}$ nên hệ có nghiệm $(x;y)=(0;y),\ y\in\mathbb{R}$.

Với $x\neq 0,$ thì $(2)\Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot$

Xét hàm số $f(t)=t+t.\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2xy=1.$

Thế $2xy=1$ vào $(1)\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$ (3)

Đặt $a=\sqrt{1+x}\geq 0,\ b=\sqrt{1-x}\geq 0$ và $3x=x-1+2.(x+1)=a^2-2b^2.$

$(3)\Leftrightarrow 2a^2-b^2+ab-4a+2b=0\Leftrightarrow(2a-b)(a+b-2)=0\Leftrightarrow b=2a\ \vee\ a+b=2.$

Với $a+b=2,$ suy ra: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2\Leftrightarrow x=0$ (loại do $x\neq 0$).

Với $b=2a,$ suy ra: $2\sqrt{x+1}=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow y=-\dfrac{5}{6}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{5}{6}\right);\left(0;y\right),\forall y\in\mathbb{R}\right\}\cdot$

Ví dụ 469. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1)\\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nếu chia hai vế của phương trình (1) cho $x^3\neq 0$ thì sẽ độc lập được x, y ở hai vế, tức:* $(1)\Leftrightarrow 2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}=(4-2y)\sqrt{3-2y}$ *nên khả năng sử dụng hàm số là rất cao. Hơn nữa đây là dạng cơ bản* $ax^3+bx^2+cx+d=(ex+f).\sqrt{mx+n}$ *nếu ta xem* $\dfrac{1}{x}$ *là x và có từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\geq -2,\ y\leq\dfrac{3}{2}\cdot$

Do $x=0$ thì hệ vô nghiệm nên xét $x\neq 0$ và chia hai vế của (1) cho $x^3\neq 0$:

$$(1)\Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=(4-2y)\sqrt{3-2y}=\left[(\sqrt{3-2y})^2+1\right]\cdot\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+\sqrt{3-2y}\Leftrightarrow f\left(1-\frac{1}{x}\right)=f\left(\sqrt{3-2y}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=f\left(\sqrt{3-2y}\right)\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$ và thế vào (2):

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{15-x}=1$ (3). Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+2}\geq 0\\ b=\sqrt[3]{15-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=x+2\\ b^3=15-x\end{cases}\Rightarrow a^2+b^3=17.$

Kết hợp (3), suy ra hệ: $\begin{cases}a^2+b^3=17\\ a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ b^3+b^2+2b-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ a=3\end{cases}.$

Do đó: $\sqrt{x+2}=3\Leftrightarrow x=7\Rightarrow y=\dfrac{111}{98}$: thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình cần tìm là $S=(x;y)=\left\{\left(7;\dfrac{111}{98}\right)\right\}\cdot$

Lưu ý. Ta có thể giải phương trình (3) bằng phương pháp hàm số như sau:

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{15-x}$ có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(15-x)^2}}>0,\forall x>-2.$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$ và có $f(x)=1=f(7)\Leftrightarrow x=7.$

Ví dụ 470. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+3=(4x^2-2yx^2)\sqrt{3-2y}+\dfrac{4x^2+1}{x} & (1) \\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}}=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1} & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nếu chuyển vế và chia 2 vế (1) cho $x^2\neq 0$, thì phương trình (1) tương đương* $\dfrac{2x^2+3}{x^2}-\dfrac{4x^2+1}{x^3}=(4-2y)\cdot\sqrt{3-2y}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x}+2=(4-2y)\cdot\sqrt{3-2y}$ $=[(\sqrt{3-2y})^2+1]\cdot\sqrt{3-2y}=(\sqrt{3-2y})^3+\sqrt{3-2y}$. *Khi đó gán* $1000\to A$ *vào casio và nhập* $-X^3+3X^2-4X+2=A^3+A$, *rồi bấm shift solve cho ta* $X=-999$, *suy ra:* $-X=1000-1\Leftrightarrow 1-X=A$ *hay viết* $(1)\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=(\sqrt{3-2y})^3+\sqrt{3-2y}$ *và đã xây dựng được hàm số đặc trưng* $f(t)=t^3+t$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0,\ x\neq -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{3}{2}\cdot$

$$(1)\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=\left(3-2y\right)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y}\Leftrightarrow f\left(1-\frac{1}{x}\right)=f\left(\sqrt{3-2y}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=f\left(\sqrt{3-2y}\right)\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$ và thế vào phương trình (2) thì

$$(2)\Leftrightarrow\left(2x+1\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\left(x+2\right)+\sqrt[3]{2x^2+x^3}\overset{:x}{\Leftrightarrow}\left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\left(\frac{2}{x}+1\right)+\sqrt[3]{\frac{2}{x}+1}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^3+\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}+1}\right)^3+\sqrt[3]{\frac{2}{x}+1}\Leftrightarrow f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}+1}\right)\cdot$$

Xét hàm số $f(u)=u^3+u$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(u)=3u^2+1>0,\ \forall u\in\mathbb{R}$ nên $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=f\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}+1}\cdot$ Đặt $v=\dfrac{1}{x}$ thì phương trình:

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+v}=\sqrt[3]{2v+1}\Leftrightarrow\begin{cases}0\neq v\ge-\dfrac{1}{2}\\(1+t)^3+(2t+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow v=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 471. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{x^3}{x+1} = (y+2)\cdot\sqrt{(x+1)\cdot(y+1)} & (1) \\ x\sqrt{y+1} - 2x + \sqrt{x+1} = 0 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nếu chia hai vế của (1) cho $\sqrt{x+1} > 0$ thì sẽ độc lập được hai biến. Tức là:*

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{x^3}{(x+1)\sqrt{x+1}} = \left[(\sqrt{y+1})^2 + 1\right]\sqrt{y+1} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1}.$ *Khi đó cần biến đổi* $VT = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{(x+1)\sqrt{x+1}} = \dfrac{x^3 + x(x+1)}{(\sqrt{x+1})^2.\sqrt{x+1}} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ *và đã xây dựng được hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1,\ y \ge -1.$

$(1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f\left(\sqrt{y+1}\right).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f\left(\sqrt{y+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}$ và có điều kiện là $x \ge 0.$

Thế vào (2) được: $(2) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}} - 2x + \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x+1} + (\sqrt{x+1})^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+1})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x+1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = 0.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ phương trình là $(x;y) = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

Ví dụ 472. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1+4x).x^2 = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sqrt{y} & (1) \\ xy - 3y + 9x - 1 = \sqrt{2x - \dfrac{y}{4}} & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Mạc Đĩnh Chi – Tp. Hồ Chí Minh

Phân tích. *Từ phương trình (1), nếu chia 2 vế cho $x\sqrt{x} > 0$ sẽ không độc lập được x, y ở 2 vế nhưng được:* $(1+4x).2\sqrt{x} = \left(\dfrac{x+y}{x}\right).\sqrt{\dfrac{y}{x}} \Leftrightarrow \left[1 + (4x)\right]\cdot\sqrt{4x} = \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ *hay* $f(\sqrt{4x}) = f\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$ *với hàm đặc trưng $f(t) = (1+t^2).t = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.*

Lời giải. Điều kiện: $y \ge 0,\ 8x \ge y \ge 0.$

Do $x=0$ thì hệ không thỏa nên xét $x>0$ và chia 2 vế (1) cho $x\sqrt{x}>0,$ được:

$$(1)\Leftrightarrow\left[1+(4x)\right]\cdot\sqrt{4x}=\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}\Leftrightarrow f(\sqrt{4x})=f\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{4x})=f\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\Leftrightarrow\sqrt{4x}=\sqrt{\frac{y}{x}}\Leftrightarrow y=4x^2>0$ và thế vào (2) được:

$$(2)\Leftrightarrow 4x^3-12x^2+9x-1=\sqrt{2x-x^2}\Leftrightarrow 4(x-1)^3-3(x-1)=\sqrt{1-(x-1)^2}\quad(3)$$

Đặt $z=x-1$ thì $(3)\Leftrightarrow 4z^3-3z=\sqrt{1-z}\Leftrightarrow\begin{cases}4z^3-3z\ge 0\\(4z^3-3z)^2=1-z\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4z^3-3z\ge 0\\16z^6-24z^4+10z^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow z=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \vee\ z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ \vee\ z=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Với $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra: $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y=6-4\sqrt{2}$: thỏa điều kiện.

Với $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, suy ra: $x=\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow y=6+\sqrt{2}+4\sqrt{2+\sqrt{2}}$: không thỏa.

Với $z=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, suy ra: $x=\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow y=6-\sqrt{2}-4\sqrt{2-\sqrt{2}}$: thỏa mãn.

Kết luận: Nghiệm $(x;y)=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};6-4\sqrt{2}\right);\left(\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};6-\sqrt{2}-4\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$

Nhận xét. *Trong rất nhiều trường hợp, sau khi chia hai biến x, y không phân ly được ở 2 vế nhưng vẫn tạo ra được hàm đặc trưng mà ví dụ trên là điển hình. Để hiểu kỹ hơn vấn đề này, ta cùng xét các ví dụ sau:*

Ví dụ 473. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^{11}+xy^{10}=y^{22}+y^{12} & (1)\\7y^4+13x+8=2y^4.\sqrt[3]{x(3x^2+3y^2-1)} & (2)\end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lê Quí Đôn – Đà Nẵng

Phân tích. *Từ (1) chia* $y^{11}\ne 0$, *được:* $(1)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^{11}+\left(\frac{x}{y}\right)=y^{11}+y\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(y).$

Khi đó suy ra: $x=y^2$ *với hàm đặc trưng* $f(t)=t^{11}+t$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

Lời giải. Từ $(1)\Leftrightarrow x(x^{10}+y^{10})=y^{22}+y^{12}$, suy ra điều kiện: $x\ge 0.$

Do $x=y=0$ không là nghiệm nên xét $x>0,\ y\ne 0.$

Chia 2 vế (1) cho $y^{11}\ne 0,$ thì $(1)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^{11}+\left(\frac{x}{y}\right)=y^{11}+y\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(y).$

Xét hàm số $f(t)=t^{11}+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=11.t^{10}+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(y)\Leftrightarrow x=y^2>0.$

Thế vào $(2)\Leftrightarrow 7x^2+13x+8=2x^2\cdot\sqrt[3]{x\cdot(3x^2+3x-1)}$ (3)

Chia 2 vế (3) cho $x^3>0,$ thì $(3)\Leftrightarrow 7\cdot\dfrac{1}{x}+13\cdot\dfrac{1}{x^2}+8\cdot\dfrac{1}{x^3}=2.\sqrt[3]{3+3\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}$ (4)

Đặt $t=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y^2}>0$ thì $(4)\Leftrightarrow 8t^3+13t^2+7t=2\sqrt[3]{3+3t-t^2}$

$\Leftrightarrow 8t^3+12t^2+10t+3=(3+3t-t^2)+2.\sqrt[3]{3+3t-t^2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3+3t-t^2})^3+2\sqrt[3]{3+3t-t^2}=(2t+1)^3+2(2t+1)\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{3+3t-t^2})=f(2t+1).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt[3]{3+3t-t^2})=f(2t+1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{3+3t-t^2}=2t+1\Leftrightarrow 3+3t-t^2=(2t+1)^3$

$\Leftrightarrow 8t^3+13t^2+3t-2=0\Leftrightarrow(t+1)(8t^2+5t-2)=0\Leftrightarrow 8t^2+5t-2=0,$ (do $t>0$)

$\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{89}-5}{16},$ thế vào $t=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y^2}>0,$ suy ra: $x=\dfrac{16}{\sqrt{89}-5},\ y=\pm\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{89}}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $(x;y)=\left(\dfrac{16}{\sqrt{89}-5};\pm\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{89}}}{2}\right).$

Ví dụ 474. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x & (1)\\ x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(x-1)}=\dfrac{9}{2} & (2)\end{cases}$

Đề thi thử số 4 – TN.THPT Quốc Gia 2015 – Diễn đàn k2pi.net.vn

Phân tích. *Từ (1), nếu chia hai vế cho $x^2>0,$ được: $\sqrt{1+\dfrac{y}{x^2}}+\dfrac{y}{x^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}$ có dạng $f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ với hàm đặc trưng $f(t)=\sqrt{1+t}+t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó sẽ tìm được mối liên hệ giữa x, y, rồi thế vào (2) và có lời giải 1. Ngoài ra, thấy phương trình (1) luôn đúng khi $x=y,$ tức luôn có nhân tử $x-y$ nên sẽ sử dụng kỹ thuật nhân lượng liên hợp nhằm đưa về tích số với lượng nhân tử $x-y.$ Thật vậy $(1)\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y}-x\sqrt{x^2+x}=x-y\Leftrightarrow x.(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x})=x-y$ và liên hợp trong dấu ( ) sẽ có nhân tử chung ở 2 vế là $(x-y)$ và có lời giải 2.*

Điều kiện: $x\ge 1,\ y\ge 0.$

☙ ***Lời giải 1***. Sử dụng phương pháp hàm số.

(1) $\xleftrightarrow{\text{Chia: } x^2>1}$ $\sqrt{1+\dfrac{y}{x^2}}+\dfrac{y}{x^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{1+t}+t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}+1>0,\ \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow y=x$.

Thế $y=x$ vào (2) $\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x}+2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x(x-1)}-9=0$

$$\Leftrightarrow\left[(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}.\sqrt{x-1}+(\sqrt{x-1})^2\right]+2(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})-8=0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^2+2(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})-8=0\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=2$$

$$\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{x(x-1)}=4\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)}=5-2x\Leftrightarrow\begin{cases}5-2x\ge 0\\16x=25\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{25}{16}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{25}{16};\dfrac{25}{16}\right)\right\}$.

Lời giải 2. Sử dụng nhân lượng liên hợp.

(1) $\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y}+y=x\sqrt{x^2+x}+x\Leftrightarrow x\cdot(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x})+(y-x)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{x(y-x)}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+(y-x)=0\Leftrightarrow(y-x)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=x.\text{ Do }\frac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1>0,\ \forall x\ge 1,\ y\ge 0.$$

Thế $y=x$ vào (2) $\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{9}{2}$ (3)

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}>0\Rightarrow t^2=2x-1+2\sqrt{x(x-1)}\Leftrightarrow x+\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{t^2+1}{2}$.

(3) $\Leftrightarrow\dfrac{t^2+1}{2}+t=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2+2t-8=0\\t>0\end{cases}\Leftrightarrow t=2.$

Suy ra: $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2-\sqrt{x}\Leftrightarrow\begin{cases}2-\sqrt{x}\ge 0\\4\sqrt{x}=5\end{cases}\Rightarrow x=y=\dfrac{25}{16}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{25}{16};\dfrac{25}{16}\right)\right\}$.

Ví dụ 475. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1)=8x^2y^3 & (1)\\x^2y-x+2=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Từ $(2) \Leftrightarrow 2 = x - x^2y$ và thế vào phương trình (1), ta được:

$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} - 4x^2y + x)(\sqrt{4y^2+1}+1) = 8x^2y^3$ và do $x = y = 0$ không là nghiệm

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 4x^2y + x = 2x^2y(\sqrt{4y^2+1}-1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x = 2x^2y\sqrt{4y^2+1} + 2x^2y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x = 2x^2y.(\sqrt{4y^2+1}+1)$, (3) và $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ nên từ (3)

có $y > 0$ và từ $(2) \Rightarrow y = \dfrac{x-2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 2.$ Do đó chia 2 vế (3) cho $x^2 > 0$ được:

$$(3) \Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 2y\sqrt{(2y)^2+1} + 2y \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(2y).$$

Xét hàm số $f(t) = t + t.\sqrt{1+t^2}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = \sqrt{1+t^2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(2y) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 2y.$

Thế vào $(2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = \dfrac{1}{8}$: thỏa mãn điều kiện.

b. <u>Kết hợp 2 phương trình bằng phương pháp cộng để tạo ra hàm đặc trưng</u>

Trong nhiều bài toán, ta cần có sự kết hợp giữa 2 phương trình trong hệ mới tạo ra được hàm số đặc trưng. Vấn đề đặt ra là khi nào cộng, khi nào trừ, khi nào lấy phương trình này cộng n lần phương trình kia, xác định giá trị n này như thế nào và dấu hiệu nhận dạng ra sao ?! Để trả lời những câu hỏi này, ta cùng xét các ví dụ với những lời phân tích tìm lời giải mà ở đó tác giả sẽ truyền tải đến các bạn những thủ thuật, những kinh nghiệm sẽ giúp bạn trả lời được các câu hỏi trên.

Ví dụ 476. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2-2x+5} = 3y + \sqrt{y^2+4} & (1) \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Tuyên Quang năm 2015

Phân tích. *Nhận thấy (2) có dạng bậc hai nhưng biệt số delta không là số chính phương nên không giải được bằng phương pháp hằng số biến thiên. Quan sát thấy (1), (2) đều độc lập theo x, y ở 2 vế nhưng cũng không tìm được hàm đặc trưng. Khi đó sẽ nghĩ đến việc kết hợp giữa 2 phương trình để xây dựng hàm đặc trưng. Viết hệ* $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2-2x+5} = 3y + \sqrt{y^2+4} \\ x^2 - 3x + 1 = y^2 - 3y \end{cases}$ *và cộng 2 vế phương trình với nhau sẽ thu được:*

$$x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x^2-2x+5} = y^2 + \sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow (x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2+4} = y^2 + \sqrt{y^2+4}.$$

Đến đây, nếu viết $f(x-1) = f(y)$ *sẽ khó khăn cho việc xét hàm* $f(t) = t^2 + \sqrt{t^2+1}$, *bởi lẽ* $f'(t) = 2t + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ *chưa khẳng định được dấu và cần tìm điều kiện cho* $x-1$ *và*

y nên sẽ dài dòng. Nhưng viết $f((x-1)^2)=f(y^2)$ *có hàm đặc trưng* $f(t)=t+\sqrt{t+1}$ *với* $f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}>0,\ \forall t\ge 0$ *sẽ luôn đồng biến trên* $\left[0;+\infty\right)$.

Lời giải. Lấy phương trình (1) cộng với phương trình (2):

$$(x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}\Leftrightarrow f((x-1)^2)=f(y^2).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t+1}$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}>0,\ \forall t>0.$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Suy ra: $f((x-1)^2)=f(y^2)\Leftrightarrow (x-1)^2=y^2\Leftrightarrow y=x-1$ hoặc $y=1-x$.

Với $y=x-1$, thế vào $(2)\Leftrightarrow x^2-(x-1)^2-3x+3(x-1)+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\cdot$

Với $y=1-x$, thế vào $(2)\Leftrightarrow x^2-(1-x)^2-3x+3(1-x)+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}\cdot$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)\right\}\cdot$

_Ví dụ 477._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{x}-y\sqrt{y}+\sqrt{xy}+y-2\sqrt{y}-\sqrt{x}+2=0 & (1)\\ 3x-y+5\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y}=0 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nếu cộng hai phương trình cho nhau thì sẽ triệt tiêu đi lượng* $\sqrt{xy}$ *và độc lập được x, y ở 2 vế, tức có biến đổi:* $(1)+(2)\Rightarrow x\sqrt{x}+3x+4\sqrt{x}+2=y\sqrt{y}+\sqrt{y}$ *hay* $(\sqrt{x})^3+3x+4\sqrt{x}+2=(\sqrt{y})^3+\sqrt{y}$ *và gán* $1000\to A$ *vào casio, rồi nhập phương trình* $X^3+3X^2+4X+2=A^3+A$, *với* $X=\sqrt{x}$ *và bấm shift solve cho ta:* $X=999$ *hay* $X=1000-1=A-1\Leftrightarrow A=X+1$ *nên viết* $(\sqrt{x}+1)^3+(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{y})^3+\sqrt{y}$ *có dạng hàm đặc trưng* $f(t)=t^3+t$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0,\ y\ge 0.$

Lấy $(1)+(2)\Rightarrow x\sqrt{x}+3x+4\sqrt{x}+2=y\sqrt{y}+\sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^3+(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{y})^3+\sqrt{y}\Leftrightarrow f(\sqrt{x}+1)=f(\sqrt{y}).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{x}+1)=f(\sqrt{y})\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\sqrt{y}$ và thế vào phương trình (2) được:

$(2)\Leftrightarrow x+3\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{(0;1)\right\}\cdot$

Ví dụ 478. Giải hệ: $\begin{cases} 3x^2 - 8x + 2(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2(y+2)\sqrt{y^2 + 4y + 5} & (1) \\ x^2 + 2y^2 = 4x - 8y - 6 & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Bắc Giang năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy (2) là tam thức bậc hai nhưng biệt số delta không là số chính phương nên không giải được bằng phương pháp hằng số biến thiên. Quan sát thấy cả 2 phương trình đều độc lập được x, y ở 2 vế nhưng sẽ không tìm được hàm đặc trưng. Khi đó cần có sự kết hợp giữa 2 phương trình để xây dựng hàm đặc trưng. Trước hết viết x, y độc lập, tức hệ* $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + 2(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2(y+2)\sqrt{y^2 + 4y + 5} \\ x^2 - 4x = -2y^2 - 8y - 6 \end{cases}$.

Nếu cộng hai phương trình lại thì biểu thức trong và ngoài căn theo theo biến x, cũng như theo biến y không có mối liên hệ gì với nhau. Còn nếu trừ hai phương trình với nhau thu được: $2x^2 - 4x + 2(x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 1} = 2y^2 + 8y + 6 + 2(y+2)\sqrt{y^2 + 4y + 5}$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 2(x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 1} = 2(y+2)^2 + 2(y+2)\sqrt{(y+2)^2 + 1}$ *có dạng hàm số đặc trưng* $f(t) = 2t^2 + 2t.\sqrt{t^2 + 1}$ *có* $f'(t) = 2.\dfrac{(t + \sqrt{t^2 + 1})^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t$ *nên* $f(t)$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$. *Từ đó suy ra mối liên hệ giữa x, y và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(1) - (2) \Rightarrow 2(x-1)^2 + 2(x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 1} = 2(y+2)^2 + 2(y+2)\sqrt{(y+2)^2 + 1}$

$\Leftrightarrow f(x-1) = f(y+2).$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + 2t.\sqrt{t^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 4t + 2\sqrt{t^2 + 1} + \dfrac{2t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}$

$$= 2\left(2t + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}\right) = 2\left(\frac{t^2 + 1 + 2.t.\sqrt{t^2 + 1} + t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}\right) = 2\frac{(\sqrt{t^2 + 1} + 1)^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(x-1) = f(y+2) \Leftrightarrow x = y + 3.$

Thế vào phương trình $(2) \Leftrightarrow 3y^2 + 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3 \Rightarrow x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \dfrac{3}{8} \end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{(0;-3); \left(\dfrac{8}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

Ví dụ 479. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy (2) có dạng tam thức bậc hai theo x hoặc theo y, nhưng biệt số delta không là số chính phương nên không giải được bằng phương pháp hằng số biến*

thiên. Thấy (1), (2) có x, y độc lập nhau nhưng không tìm được hàm đặc trưng nên sẽ nghĩ đến việc kết hợp 2 phương trình lại với nhau. Trước tiên ta sẽ độc lập x, y ở 2 vế để dễ nhìn nhận cộng hay trừ chúng, tức hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} \\ x^2 - 2x - 2 = -2y^2 - y \end{cases}$

và sẽ dễ dàng thấy cần trừ chúng, bởi lẻ nếu cộng thì bậc của x, y sẽ lệch nhau. Khi đó:

$$\Rightarrow x^2 + 3x + \sqrt{x+2} + 2 = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - x - 2 + \sqrt{x+2} = (2y+1)^2 - 2y - 1 + \sqrt{2y+1} \Leftrightarrow f(x+2) = f(\sqrt{2y+1}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -2,\ y \geq -\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(1) - (2) \Rightarrow x^2 + 3x + \sqrt{x+2} + 2 = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - x - 2 + \sqrt{x+2} = (2y+1)^2 - 2y - 1 + \sqrt{2y+1} \Leftrightarrow f(x+2) = f(\sqrt{2y+1}).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t + \sqrt{t}$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t) = 2t + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} - 1$ hay

$$f'(t) = 2t + \frac{1}{4\sqrt{t}} + \frac{1}{4\sqrt{t}} - 1 \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 3\cdot\sqrt[3]{2t\cdot\frac{1}{4\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{4\sqrt{t}}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Suy ra: $f(x+2) = f(\sqrt{2y+1}) \Leftrightarrow x + 2 = 2y - 1 \Leftrightarrow x = 2y - 1.$

Thế vào phương trình $(2) \Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{1}{6} \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S = (x;y) = \left\{(1;1);\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{6}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 480. Giải hệ PT: $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2+1} = 2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} & (1) \\ x^2 + 2y^2 = 2x - 4y + 3 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Lấy phương trình (1) trừ cho phương trình (2), ta được:

$$(1) - (2) \Rightarrow 2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} = 2y^2 + 2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} + 4y + 2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1) + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 = (y+1)^2 + 2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} + y^2 + 2y + 2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} + x)^2 = \left[\sqrt{(y+1)^2+1} + y + 1\right]^2 \Leftrightarrow f(x) = f(y+1).$$

Xét hàm số $f(t) = (\sqrt{t^2+1} + t)^2$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = \dfrac{2.(t + \sqrt{t^2+1})^2}{\sqrt{t^2+1}} \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(x) = f(y+1) \Leftrightarrow x = y + 1.$

$(2) \Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = -1$ hoặc $y = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}\cdot$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(-1;-2); \left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)\right\}\cdot$

<u>*Ví dụ 481.*</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3(3x^2 - 4x - 23) + 8y = 8 & (1) \\ y^2(x^3 + 10x + 27) - 6y = 8 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. Hồ Chí Minh

<u>Phân tích</u>*. Nếu chia hai vế cho (1) cho $y^3 \neq 0$, của (2) cho $y^2 \neq 0$ ta sẽ thu được hệ mới:* $\begin{cases} 3x^2 - 4x - 23 = \left(\dfrac{2}{y}\right)^3 - 2\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 \\ x^3 + 10x + 27 = 2.\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + 3\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right) \end{cases}\cdot$ *Nhận thấy cả 2 phương trình lệch bậc nhau và không có dạng hàm đặc trưng nhưng nếu cộng hai phương trình lại với nhau được 2 vế cùng bậc, tức:* $\left(\dfrac{2}{y}\right)^3 + 3\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right) = x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)^3 + (x+1).$ *Khi đó đã xây dựng được hàm số đặc trưng dạng* $f(t) = t^3 + 3t$ *luôn đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

<u>Lời giải</u>. Do $y = 0$ không là nghiệm hệ nên xét $y \neq 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x - 23 = \left(\dfrac{2}{y}\right)^3 - 2\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 \\ x^3 + 10x + 27 = 2.\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + 3\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right) \quad (3) \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = \left(\dfrac{2}{y}\right)^3 + 3\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 3.(x+1) = \left(\dfrac{2}{y}\right)^3 + 3.\left(\dfrac{2}{y}\right) \Leftrightarrow f(x+1) = f\left(\dfrac{2}{y}\right)\cdot$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x+1) = f\left(\dfrac{2}{y}\right) \Leftrightarrow x + 1 = \dfrac{2}{y}$ và thế vào phương trình (3), ta được:

$(3) \Leftrightarrow x^3 + 10x + 27 = 2(x+1)^2 + 3(x+1) \Leftrightarrow x^3 - 2x + 3x + 22 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 4x + 11) = 0 \Leftrightarrow x = -2,$ suy ra: $y = -2.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ phương trình cần tìm là $(x;y) = (-2;-2).$

<u>*Ví dụ 482.*</u> Giải hệ PT: $\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} & (1) \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y & (2) \end{cases}$

Đề thi thử Đại học khối A năm 2013 – THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

Phân tích. *Thấy:* $VP_{(1)}=\left[(2x-1)+2\right]\sqrt{2x-1}=(\sqrt{2x-1})^3+2\sqrt{2x-1},$ *từ đó định hướng hàm đặc trưng dự kiến là* $f(t)=t^3+2t.$ *Còn vế trái vẫn tồn tại x nên ta không thể đưa được về hàm đặc trưng. Nhưng để ý hệ số của biến x ở phương trình (1) gấp đôi hệ số biến x ở phương trình (2), giúp ta nghĩ đến việc lấy* $(1)-2.(2)$ *lúc đó sẽ triệt tiêu đi được biến x, tức:* $y^3+3y^2+5y+3=(\sqrt{2x-1})^3+2\sqrt{2x-1}.$ *Sử dụng casio, sẽ đưa về dạng:* $(y+1)^3+2\cdot(y+1)=(\sqrt{2x-1})^3+2\cdot\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow f(y+1)=f(\sqrt{2x-1}).$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

Lấy $(1)-2.(2)\Rightarrow y^3+3y^2+5y+3=(2x+1)\cdot\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow(y+1)^3+2\cdot(y+1)=(\sqrt{2x-1})^3+2\cdot\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow f(y+1)=f(\sqrt{2x-1}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(y+1)=f(\sqrt{2x-1})\Leftrightarrow y+1=\sqrt{2x-1}\ge0\Rightarrow y\ge-1.$

$$(2)\Leftrightarrow2(x^2-6x+5)+(x+1-2\sqrt{2x-1})=0\Leftrightarrow2(x^2-6x+5)+\frac{x^2-6x+5}{x+1+2\sqrt{2x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-6x+5)\cdot\left(1+\frac{1}{x+1+2\sqrt{2x-1}}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\x=5\Rightarrow y=2\end{array}\right..$$

Do: $1+\frac{1}{x+1+2\sqrt{2x-1}}>0,\ \forall x\ge\frac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(1;0);(5;2)\right\}\cdot$

Ví dụ 483. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+xy-5x-6y+10=0 & (1)\\x^3-y^3-3x^2-3xy+17x+13y-27=0 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy (1) có dạng tam thức bậc hai theo x hoặc theo y nhưng biệt số delta không là số chính phương. Nếu quan sát kỹ, sẽ thấy hệ số của xy ở 2 vế gấp 3 lần nhau. Do đó nếu nhân phương trình (1) cho 3, rồi cộng với phương trình (2) sẽ triệt tiêu đi xy và thu được biểu thức x, y độc lập, đồng bậc nên khả năng sử dụng hàm số hoặc* $A^3=B^3$ *là rất cao. Thật vậy hệ* $\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+3y^2+3xy-15x-18y+30=0\\x^3-y^3-3x^2-3xy+17x+13y-27=0\end{cases}$

$\Rightarrow x^3+2x=y^3-3y^2+5y-3\Leftrightarrow x^3+2x=(y-1)^3+2(y-1)\Leftrightarrow f(x)=f(y-1).$

Lời giải. Lấy phương trình (1) nhân 3, rồi cộng với phương trình (2) được:

$\Rightarrow x^3+2x=y^3-3y^2+5y-3\Leftrightarrow x^3+2x=(y-1)^3+2(y-1)\Leftrightarrow f(x)=f(y-1).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x)=f(y-1)\Leftrightarrow x=y-1\Leftrightarrow y=x+1$ và thế vào (1), ta được:

$(1)\Leftrightarrow x^2+(x+1)^2+x(x+1)-5x-6(x+1)+10=0\Leftrightarrow3x^2-8x+5=0$

$\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$ hoặc $x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow y = \dfrac{8}{3}\cdot$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{(1;2);\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 484. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 - 5\sqrt{x} + 5 = 0 & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{y^2+2y+3} - \dfrac{1}{5}y^2 + y & (2) \end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh An Giang năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy nếu lấy phương trình (1) trừ với 5 lần phương trình (2) sẽ triệt tiêu đi* y^2, *tức:* $(1) - 5.(2) \Rightarrow y^2 - 5\sqrt{x} + 5 - 5\sqrt{x+2} = -5\sqrt{y^2+2y+3} + y^2 - 5y$ *hay* $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \sqrt{y^2+2y+3} + y + 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x})^2+2} + \sqrt{x} = \sqrt{(y+1)^2+2} + (y+1)$

$\Leftrightarrow f(\sqrt{x}) = f(y+1)$ *và tìm được mối liên hệ giữa x, y, rồi thế vào phương trình (1). Bản chất của phép cộng là phép thế, tức từ (1) có* $y^2 = 5(\sqrt{x} - 1)$ *và thế vào (2) cũng xây dựng được hàm đặc trưng* $f(t) = \sqrt{t^2+2} + t$ *như trên.*

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0$.

Lấy phương trình (1) trừ 5 lần phương trình (2), ta được:

$(1) - 5.(2) \Rightarrow y^2 - 5\sqrt{x} + 5 - 5\sqrt{x+2} = -5\sqrt{y^2+2y+3} + y^2 - 5y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \sqrt{y^2+2y+3} + y + 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x})^2+2} + \sqrt{x} = \sqrt{(y+1)^2+2} + (y+1) \Leftrightarrow f(\sqrt{x}) = f(y+1).$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+2} + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}} + 1 = \dfrac{\sqrt{t^2+2}+t}{\sqrt{t^2+2}} > \dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+2}} \geq 0, \forall t.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{x}) = f(y+1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = y + 1$ và thế vào phương trình (1) được:

$(1) \Leftrightarrow y^2 - 5.(y+1) + 5 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = 5 \Rightarrow x = 36 \end{array}\right.$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ cần tìm là $S = (x;y) = \{(1;0);(36;5)\}\cdot$

Ví dụ 485. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 6x^2y = 8y^3 - 6 & (1) \\ 4xy^2 + x = 2y + \sqrt{2y - x + 1} + 1 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy nếu cộng biểu thức ngoài căn thức của 2 phương trình lại với nhau thì sẽ có hình dáng của hằng đẳng thức dạng* $(ax+by)^3$. *Quan sát căn thức thấy có chứa* $x - 2y$ *nên sẽ dự kiến* $a = 1,\ b = -2$ *và khai triển biểu thức này, ta được:*

$(x-2y)^3 = x^3 - 3x^2y + 12xy^2 - 8y^3$. *Do nó chứa* $12xy^2$ *và phương trình (2) chỉ chứa* $4xy^2$ *nên sẽ lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) và có lời giải sau:*

Lời giải. Điều kiện: $2y - x + 1 \ge 0$.

Lấy phương trình (2) nhân 3, rồi cộng với phương trình (1), được:

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2y + 12xy^2 + 3x = 8y^3 + 6y - 3 + 3\sqrt{2y - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)^3 + 3.(x-2y) - 3.\sqrt{1-(x-2y)} + 3 = 0 \qquad (3)$$

Đặt $t = x - 2y$ thì $(3) \Leftrightarrow t^3 + 3t - 3\sqrt{1-t} + 3 = 0 \qquad (4)$

Do $t = 1$ không là nghiệm của (4) nên chỉ xét $t < 1$.

Xét $f(t) = t^3 + 3t - 3\sqrt{1-t} + 3$ trên $(-\infty;1)$ có $f'(t) = 2t^2 + 3 + \dfrac{3}{2\sqrt{1-t}} > 0,\ \forall t < 1$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và có $f(0) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow 2y = x$.

Thế vào $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^3 = x^3 - 6 \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$: thỏa điều kiện.

Ví dụ 486. Giải hệ PT: $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x+1} = 2y\sqrt{y^2+1} + 9 - y - 6y^2 & (1) \\ \sqrt{x^2+3x+2} + 3\sqrt{x+1} = y\sqrt{y^2+1} - 6 + 3y + 4y^2 & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – THPT Chuyên Lê Hồng Phong – TP. HCM

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1$. Nhân (1) với 4, nhân (2) với 3 ta được:

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x^2+3x+2} - 2\sqrt{x+1} = 4y\sqrt{y^2+1} + 18 - 2y - 12y^2 & (3) \\ 3\sqrt{x^2+3x+2} + 9\sqrt{x+1} = 3y\sqrt{y^2+1} - 18 + 9y + 12y^2 & (4) \end{cases}$$

Cộng (3) với (4) theo vế, suy ra: $7\sqrt{x^2+3x+2} + 7\sqrt{x+1} = 7y\sqrt{y^2+1} + 7y$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)} + \sqrt{x+1} = y\sqrt{y^2+1} + y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{(\sqrt{x+1})^2+1} + \sqrt{x+1} = y\cdot\sqrt{y^2+1} + y \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(y).$$

Xét hàm số $f(t) = t.\sqrt{t^2+1} + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = \sqrt{t^2+1} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(\sqrt{x+1}) = f(y) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = y \ge 0$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)} + 3\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1}.\sqrt{x+2} - 6 + 3\sqrt{x+1} + 4(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của hệ là $(x;y) = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot$

c. Một số phép biến đổi tương đương để xây dựng hàm đặc trưng

Đối với loại này, chúng không theo một nguyên tắc nhất định nào cả, mà tùy thuộc vào đặc điểm của từng bài toán, từng phương trình trong hệ, ta cần tìm ra mối liên hệ giữa các biến với nhau, từ đó xây dựng hàm đặc trưng. Sau đây tôi xin được trình bày những lớp ví dụ có sự biến đổi gần giống nhau đứng cạnh nhau:

Ví dụ 487. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y+1=y^2-\dfrac{1}{y}+\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+1}} & (1) \\ \sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7x+2y+2}=2y+3 & (2) \end{cases}$

***Phân tích**. Nhận thấy phương trình (1) có x, y độc lập được 2 vế nên sẽ bám sát vào nó để xây dựng hàm đặc trưng, tức:* $(1) \Leftrightarrow x+1-\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+1}}=y^2-3y-\dfrac{1}{y}$ *và do vế phải đơn giản hơn vế trái nên sẽ xây dựng hàm đặc trưng dự kiến là* $f(t)=t^2-3t-\dfrac{1}{t}\cdot$ *Khi đó cần biến đổi vế trái về dạng hàm này và thường xuất phát từ bậc thấp nhất, tức từ căn thức. Nghĩa là* $VT_{(1)}=x+1-\dfrac{3.(\sqrt{x+1})^2+1}{\sqrt{x+1}}=(\sqrt{x+1})^2-3.\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, *đã giống hàm đặc trưng, tức luôn có* $f(\sqrt{x+1})=f(y)$ *nêncó lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x>-1,\ y\ge \dfrac{2}{9}\cdot$

$$(1)\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2-3\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=y^2-3y-\frac{1}{y}\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1})=f(y).$$

Xét hàm số $f(t)=t^2-3t-\dfrac{1}{t}$ trên $\left(0;+\infty\right)$ có $f'(t)=2t-3+\dfrac{1}{t^2}$ hay

$$f'(t)=\frac{2t^3-3t^2+1}{t^2}=\frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2}\ge 0,\ \forall t>0 \text{ nên } f(t) \text{ đồng biến trên } \left(0;+\infty\right).$$

Suy ra: $f(\sqrt{x+1})=f(y)\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=y^2-1$ và thế vào (2) được:

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7y^2+2y-5}=2y+3 \qquad (3)$$

Sử dụng casio, tìm được 2 nghiệm $y=2,\ y=3$ *nên ghép bậc nhất để liên hợp và do liên hợp căn bậc ba, để đơn giản có thể đặt:* $a=\sqrt[3]{7y^2+2y-5}$ *và* $b=y+1>0$.

$$(3)\Leftrightarrow \left[\sqrt{9y-2}-(y+2)\right]+\left[\sqrt[3]{7y^2+2y-5}-(y+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9y-2-(y+2)^2}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{7y^2+2y-5-(y+1)^3}{a^2+ab+b^2}=0 \text{ với } \begin{cases} a=\sqrt[3]{7y^2+2y-5} \\ b=y+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-y^2+5y-6}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{-y^3+4y^2-y-6}{a^2+ab+b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-5y+6}{\sqrt{9y+2}+y+2}+\frac{(y+1)(y^2-5y+6)}{a^2+ab+b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-5y+6)\left(\frac{1}{\sqrt{9y+2}+y+2}+\frac{y+1}{a^2+ab+b^2}\right)=0 \Leftrightarrow y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=3 \end{array}\right.$$

Do $\begin{cases} \sqrt{9y+2}+y+2>0 \\ y+1 \end{cases}$, $\forall y \geq \frac{2}{9}$ và $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}>0,\ \forall a,\ b.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\{(8;3),(3;2)\}$.

Ví dụ 488. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2-9y-\frac{4}{x}+2=0 & (1) \\ 4\sqrt{x+1}+xy\sqrt{y^2+4}=0 & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – TT.LTĐH Thành Công – Tp. HCM

Phân tích. *Đây là một dạng bài toán mà hàm số được dấu khá kỹ. Nhận thấy từ phương trình (2) có thể độc lập được x, y, tức:* $(2) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{-4}{y\sqrt{y^2+4}}$ *và đã phân tích ở ví dụ trên, thường bám sát vào căn thức để biến đổi đưa về dạng hàm đặc trưng.*

Nghĩa là $(2) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1})^2-1}{\sqrt{x+1}}=\frac{y^2-(y^2+4)}{y\sqrt{y^2+4}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}-\frac{\sqrt{y^2+4}}{y}$

đã xây dựng được hàm đặc trưng dạng $f(t)=t-\frac{1}{t}$ *với* $f(\sqrt{x+1})=f\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)$.

Lời giải. Điều kiện: $-1\leq x\neq 0$. Do $x=-1$ và $y=0$ không là nghiệm nên:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}-\frac{\sqrt{y^2+4}}{y} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t-\frac{1}{t}$ trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ có $f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0,\ \forall t\neq 0.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Suy ra: $f\left(\sqrt{x+1}\right)=f\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ (x+1)(y^2+4)=y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{y^2+4}-1 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{y^2+4} \Leftrightarrow -\frac{4}{x}=y^2+4$ và thế vào (1), được:

$(1) \Leftrightarrow 3y^2-9y+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=1 \\ x=-\frac{4}{5} \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(-\dfrac{1}{2};2\right);\left(-\dfrac{4}{5};1\right)\right\}$.

Ví dụ 489. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6}=6-y & (1)\\ (x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{x^2-4x+5}\cdot\sqrt{y+1} & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Giữa các căn của hai phương trình không có mối liên hệ với nhau nên không giải được bằng phương pháp đặt ẩn phụ. Bài toán cũng không có dấu hiệu của việc sử dụng bất đẳng thức hoặc liên hợp. Còn nếu từ (1), rút* $y=6-2(x-2)\sqrt{x+6}$ *và thế vào (2) thì quá phức tạp, sẽ gây khó khăn. Nhưng nếu để ý, từ (2) có thể độc lập x, y theo 2 vế, tức* $(2)\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\dfrac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+2}}$, $(2')$ *và bám sát vào căn thức để xây dựng hàm đặc trưng,* $(2')\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{(\sqrt{y+1})^2+1}}\Leftrightarrow f(x-2)=f(\sqrt{y+1}).$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -6,\ y\ge -1.$

$(2)\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{(\sqrt{y+1})^2+1}}\Leftrightarrow f\left(x-2\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right).$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x-2)=f(\sqrt{y+1})\Leftrightarrow\sqrt{y+1}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ y=x^2-4x+3\end{cases}$ và thế vào (1):

$(1)\Leftrightarrow 2(x-2)\sqrt{x+6}=-x^2+4x+3 \qquad (3)$

Sử dụng casio, tìm $x=3$ *là nghiệm duy nhất của (3) nên sẽ ghép hằng số để liên hợp.*

$(3)\Leftrightarrow 2(x-2)(\sqrt{x+6}-3)+x^2+2x-15=0\Leftrightarrow\dfrac{2(x-2)(x-3)}{\sqrt{x+6}+3}+(x-3)(x+5)=0$

$\Leftrightarrow(x-3)\left[\dfrac{2(x-2)}{\sqrt{x+6}+3}+x+5\right]=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases},\left(do:\dfrac{2(x-2)}{\sqrt{x+6}+3}+x+5>0,\forall x\ge 2\right)$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(3;0)\right\}$.

Ví dụ 490. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x-1)\sqrt{x+y}=(6-x-y)\sqrt{2-x} & (1)\\ 2.\sqrt[3]{12x^2+3xy-18x}=x^3-6x-y+5 & (2)\end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Bắc Ninh năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy các biến trong và ngoài căn của (1) có mối liên hệ với nhau nên để đơn giản, đặt* $a=\sqrt{2-x}$, $b=\sqrt{x+y}\Rightarrow x=2-a^2$ *thì* $(1)\Leftrightarrow(3-2a^2).b=(6-b^2).a.$

Lúc này có thể phân ly a, b ra 2 vế tức: $\dfrac{3-2a^2}{a}=\dfrac{6-b^2}{b}\Leftrightarrow\dfrac{6-(2a)^2}{(2a)}=\dfrac{6-b^2}{b}$ *hay có* $f(2a)=f(b)$ *với hàm đặc trưng* $f(t)=\dfrac{6-t^2}{t}=\dfrac{6}{t}-t$ *luôn nghịch biến nên sẽ tìm được mối liên hệ giữa a, b, suy ra mối liên hệ giữa x, y và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x+y\ge 0,\ x\le 2.$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{2-x}\ge 0\Rightarrow x=2-a^2\\ b=\sqrt{x+y}\ge 0\end{cases}$ thì $(1)\Leftrightarrow(3-2a^2).b=(6-b^2).a$ (3)

Do $a=b=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\ x=2\end{cases}$ thì hệ không thỏa nên xét $\begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases}$, thì:

$(3)\Leftrightarrow\dfrac{3-2a^2}{a}=\dfrac{6-b^2}{b}\Leftrightarrow\dfrac{6-(2a)^2}{(2a)}=\dfrac{6-b^2}{b}\Leftrightarrow f(2a)=f(b).$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{6}{t}-t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=-\dfrac{6}{t^2}-1<0,\ \forall t>0.$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra: $f(2a)=f(b)\Leftrightarrow b=2a.$

Hay $\sqrt{x+y}=2\sqrt{2-x}\Leftrightarrow x+y=4(2-x)\Leftrightarrow y=8-5x$ và thế vào (2), được:

$(2)\Leftrightarrow 2.\sqrt[3]{-3x^2+6x}=x^3-x-3$ (4)

Phương trình (4) có dạng $2.\sqrt[3]{f(x)}=$ *đa thức bậc 3 nên sẽ nghĩ đến việc sử dụng hàm số mà đơn giản nhất là hàm đơn điệu tăng* $f(z)=z^3+2z.$ *Do đó sẽ nghĩ đến biến đổi phương trình* $(4)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{-3x^2+6x})^3+2.\sqrt[3]{-3x^2+6x}=x^3-3x^2+5x-3$ *và sử dụng casio sẽ viết được:* $(4)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{-3x^2+6x})^3+2.\sqrt[3]{-3x^2+6x}=(x-1)^3+2(x-1).$

$(4)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{6x-3x^2})^3+2.\sqrt[3]{6x-3x^2}=(x-1)^3+2(x-1)\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{6x-3x^2})=f(x-1).$

Xét hàm số $f(z)=z^3+2z$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(z)=3z^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt[3]{6x-3x^2})=f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{6x-3x^2}=x-1\Leftrightarrow x^3-3x-1=0$ (5)

Xét $x\in[-2;2]$ và đặt $x=2\cos u,\ \big(u\in[0;\pi]\big)$ thì phương trình:

$(5)\Leftrightarrow 8\cos^3u-6\cos u=1\Leftrightarrow 4\cos^3u-3\cos u=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 3u=\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow u=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}$ và do $k\in\mathbb{Z}$, $u\in[0;\pi]$, suy ra: $u\in\left\{\dfrac{\pi}{9};\dfrac{5\pi}{9};\dfrac{7\pi}{9}\right\}.$

Suy ra: $x=2\cos\dfrac{\pi}{9}$ hoặc $x=2\cos\dfrac{5\pi}{9}$ hoặc $x=2\cos\dfrac{7\pi}{9}\cdot$ Do phương trình bậc 3 có không quá 3 nghiệm nên đây là 3 nghiệm của phương trình (5).

Kết luận: So với điều kiện, các cặp nghiệm cần tìm của hệ phương trình là:

$(x;y)=\left(2\cos\frac{\pi}{9};8-10\cos\frac{\pi}{9}\right);\left(2\cos\frac{5\pi}{9};8-10\cos\frac{5\pi}{9}\right);\left(2\cos\frac{7\pi}{9};8-10\cos\frac{7\pi}{9}\right)\cdot$

Ví dụ 491. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}16\sqrt{3y+4}=85-2x & (1)\\ 16(x^3-y)+6x(3-4x)=6\sqrt[3]{y+1}+21 & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy (2) có căn bậc 3 và đa thức bậc ba độc lập x, y nên sử dụng hàm số, tức có:* $(2)\Leftrightarrow 16x^3-24x^2+18x-5=16(\sqrt[3]{y+1})^3+6\sqrt[3]{y+1}$. *Nhưng sẽ không biến đổi được vế trái về dạng hàm đặc trưng* $f(t)=16t^3+6t$ *và có vẻ như dư bậc hai. Lúc đó ta sẽ nghĩ đến việc đặt ẩn phụ* $x=u-\frac{b}{3a}\Rightarrow x=u+\frac{1}{2}\cdot$ *Thế vào, khai triển và rút gọn được* $16u^3+16u$. *Phép đặt ẩn phụ này tìm ra được dựa vào việc tịnh tiến điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba về gốc tọa độ O để triệt tiêu đi bậc hai. Cụ thể xét* $y=ax^3+bx^2+cx+d$ *có:* $y'=3ax^2+2bx+c\Rightarrow y''=6ax+2b=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{3a}$ *nên đặt* $x=u-\frac{b}{3a}\cdot$ *Từ đó tìm được mối liên hệ giữa x, y và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $y\ge -\frac{4}{3}\cdot$ Đặt: $x=u+\frac{1}{2}\cdot$

$(2)\Leftrightarrow 16u^3+16u=16(\sqrt[3]{y+1})^3+6\sqrt[3]{y+1}\Leftrightarrow f(u)=f(\sqrt[3]{y+1})$.

Xét hàm số $f(t)=16t^3+6t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=48t^2+6>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(u)=f(\sqrt[3]{y+1})\Leftrightarrow u=\sqrt[3]{y+1}$

$\Rightarrow x-\frac{1}{2}=\sqrt[3]{y+1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+\sqrt[3]{y+1}$ và thế vào phương trình (1), được:

$(1)\Leftrightarrow 8\sqrt{3y+4}+\sqrt[3]{y+1}-42=0$ (3)

Xét hàm số $f(y)=8\sqrt{3y+4}+\sqrt[3]{y+1}$ trên $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)$ có:

$f'(y)=\frac{4}{\sqrt{3y+4}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(y+1)^2}}>0,\ \forall y>-\frac{4}{3}$, nên $f(y)$ đồng biến trên $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)\cdot$

Do đó phương trình $f(y)=0$ có tối đa 1 nghiệm và có $f(7)=0\Leftrightarrow y=7$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3). Suy ra: $x=\frac{5}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{\left(\frac{5}{2};7\right)\right\}\cdot$

Ví dụ 492. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4y\sqrt{x-1} = x^2 + 4y^2 - 3x + 3 & (1) \\ \dfrac{2+2\sqrt{4y^2+1}}{x+\sqrt{x^2-2x+2}-1} = \dfrac{1}{y(x-1)^2} & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy từ (2) có thể độc lập được x, y ở 2 vế dạng phân thức, nghĩa là*

$(2) \Leftrightarrow 2y + 2y \cdot \sqrt{4y^2+1} = \dfrac{(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+1}}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{(x-1)^2}+1}$ *nên đã xây dựng được hàm đặc trưng dạng* $f(t) = t + t.\sqrt{t^2+1}$ *với* $f(2y) = f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$. Từ $(2) \Leftrightarrow \dfrac{2+2\sqrt{4y^2+1}}{\sqrt{(x-1)^2+1}+(x-1)} = \dfrac{1}{y(x-1)^2} \Rightarrow y > 0.$

$$(2) \Leftrightarrow 2y + 2y \cdot \sqrt{4y^2+1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+1}}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (2y) + (2y) \cdot \sqrt{(2y)^2+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Xét hàm số $f(t) = t + t.\sqrt{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+1} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(2y) = f\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \Leftrightarrow 2y = \dfrac{1}{x-1}$.

$$(1) \Leftrightarrow (4y^2 - 4y\sqrt{x-1} + x - 1) + (x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow (2y - \sqrt{x-1})^2 + (x-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \sqrt{x-1} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = \sqrt{x-1} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^3} = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của hệ cần tìm là $(x;y) = \left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 493. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{y+1} - \sqrt{2(x+y)} = x - y - 2 & (1) \\ 3\sqrt{3y-2x+6} - \sqrt{y^2-3} = x + 1 & (2) \end{cases}$

Chọn đội tuyển VMO tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2015

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} y+1 \geq 0; \ y^2 - 3 \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ 3y - 2x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \sqrt{3} \\ x + y \geq 0 \\ 3y - 2x + 6 \geq 0 \end{cases}$.

Do $x + y = 0$ không thỏa nên xét $x + y > 0.$

$(1) \Leftrightarrow x+y+\sqrt{2\cdot(x+y)} = 2(y+1)+\sqrt{2.\left[2(y+1)\right]} \Leftrightarrow f(x+y) = f(2(y+1)).$

Xét hàm số $f(t) = t+\sqrt{2t}$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t) = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2t}} > 0,\ \forall t > 0.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty).$

Suy ra: $f(x+y) = f(2(y+1)) \Leftrightarrow x+y = 2(y+1) \Leftrightarrow x = y+2$ và thế vào (2) được:

$(2) \Leftrightarrow 3\sqrt{y+2}-\sqrt{y^2-3} = y+3 \qquad (3)$

Sử dụng casio, tìm được phương trình (3) có nghiệm duy nhất $y=2$ nên ghép hằng số và sử dụng kỹ thuật truy ngược dấu để giải (3).

$(3) \Leftrightarrow 2\cdot(\sqrt{y^2-3}-1)+3\sqrt{y+2}\cdot(\sqrt{y+2}-2)+2-y = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(y^2-4)}{\sqrt{y^2-3}+1}+\dfrac{3(y-2)\sqrt{y+2}}{\sqrt{y+2}+2}-(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)\cdot\left(\dfrac{2y+4}{\sqrt{y^2-3}+1}+\dfrac{\sqrt{y+2}-1}{\sqrt{y+2}+2}\right) = 0 \Leftrightarrow y-2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4.$

Do ta luôn có $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-3}+1}+\dfrac{\sqrt{y+2}-1}{\sqrt{y+2}+2} > 0,\ \forall y \ge \sqrt{3}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ cần tìm là $(x=4,\ y=2).$

Ví dụ 494. Giải hệ PT: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2y}+2y = \sqrt[3]{8y^3+4}+(x^2+2y-1)\sqrt{6x+4} & (1) \\ \sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y} = 2xy-x^2+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y} & (2) \end{cases}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia năm 2015 – TT. Hoàng Gia – Tp. HCM

Phân tích. *Nhận thấy từ (2) chỉ chứa hai ẩn là y và $x-y$ có thể độc lập với nhau ở 2 vế, nghĩa là* $(2) \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2 = \sqrt{x^2-2xy+y^2+1}-\sqrt{x-y}-(x^2-2xy+y^2)$ $\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2 = \sqrt{(x-y)^2+1}-\sqrt{x-y}-(x-y)^2 \Leftrightarrow f(y) = f(x-y).$ *Nên tìm được mối liên hệ giữa x, y, rồi thế vào phương trình còn lại và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x-y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge y \ge 0.$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2 = \sqrt{x^2-2xy+y^2+1}-\sqrt{x-y}-(x^2-2xy+y^2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2 = \sqrt{(x-y)^2+1}-\sqrt{x-y}-(x-y)^2 \Leftrightarrow f(y) = f(x-y).$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+1}-\sqrt{t}-t^2$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-2t$ hay

$f'(t) = t\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} < 0,\ \forall t > 0$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Suy ra: $f(y) = f(x-y) \Leftrightarrow y = x - y \Leftrightarrow x = 2y$ và thế vào phương trình (1), được:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} + x = \sqrt[3]{x^3+4} + (x^2+x-1).\sqrt{6x+4}$ (3)

Nhận thấy phương trình (3) có hạng tử tích số $(x^2+x-1)\cdot\sqrt{6x+4}$ và dựa vào kinh nghiệm giải hệ bằng kỹ thuật liên hợp, ta sẽ dự đoán nhân tử của phương trình là x^2+x-1. Khi đó cần thêm bớt $(\sqrt{x^2+x}-1)$, $\left[(x+1)-\sqrt{x^3+4}\right]$ và liên hợp sẽ xuất hiện nhân tử ấy. Hiển nhiên, ta có thể sử dụng table của casio để tìm nhân tử này.

$(3) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x}-1) + \left[(x+1) - \sqrt[3]{x^3+4}\right] - (x^2+x-1).\sqrt{6x+4} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x}+1} + \frac{3.(x^2+x-1)}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+4}+\sqrt[3]{(x^3+4)^2}} - (x^2+x-1).\sqrt{6x+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+4}+\sqrt[3]{(x^3+4)^2}} = \sqrt{6x+4} \quad (4) \end{array}\right.$$

$$VT_{(4)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+x}+1} + \frac{3}{\left(x+1+\dfrac{\sqrt[3]{x^3+4}}{2}\right)^2 + \dfrac{3\sqrt[3]{(x^3+4)^2}}{4}} \le \frac{1}{1} + \frac{3}{\left(1+\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \dfrac{3\sqrt[3]{16}}{4}} < 2.$$

$VP_{(2)} = \sqrt{6x+4} \ge \sqrt{4} = 2,\ \forall x \ge 0.$ Do đó phương trình (4) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ cần tìm là $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$.

II. Phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức cổ điển

Thông thường ta sẽ chọn phương pháp này đối với những hệ phương trình không giải được bằng những phương pháp đã nêu ở những phần trước. Khi đó ta sẽ có các ý tưởng thường gặp sau để xử lý bài toán:

- Lựa chọn một phương trình và biến đổi được về $f(x;y) = a$ mà khi đó dùng bất đẳng thức hoặc đánh giá chứng minh được $f(x;y) \ge a$ hay $f(x;y) \le a$. Khi đó quan hệ x, y là những giá trị thỏa mãn dấu đẳng thức xảy ra.
- Sử dụng phương pháp cộng, thu được phương trình mới $f(x;y) = g(x;y)$ mà ta dễ xác định $\begin{cases} f(x;y) \ge a \\ g(x;y) \le a \end{cases}$. Lúc đó quan hệ giữa x, y là những giá trị thỏa mãn dấu "$=$" xảy ra, nghĩa là phải đi giải hệ mới: $\begin{cases} f(x;y) = a \\ g(x;y) = a \end{cases}$.

☞ **Lưu ý**.

① Đôi khi cần nhìn nhận sự tương đồng giữa các bất đẳng thức cổ điển (bất đẳng thức phụ) với phương trình để chọn công cụ đánh giá phù hợp.

② Đối với phương trình vừa có tính đối xứng vừa mang tính chất đẳng cấp thường thì các biến bằng nhau, tức có $x = y$. Từ đó dự đoán được "điểm rơi" và tách ghép hợp lý để áp dụng đánh giá phù hợp.

③ Các bất đẳng thức cổ điển thường được sử dụng:

* Bất đẳng thức Cauchy:
  - Với $a,\ b \ge 0$ thì: $a + b \ge 2\sqrt{a.b}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.
  - Với $a,\ b,\ c \ge 0$ thì: $a + b + c \ge 3.\sqrt[3]{a.b.c}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.
* Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpxki):
  - Với $a,\ b,\ x,\ y$ bất kỳ ta luôn có: $\begin{cases} (a.x + b.y)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ |a.x + b.y| \le \sqrt{(a^2 + b^2).(x^2 + y^2)} \end{cases}$.

    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ hay $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}\cdot$
  - Với $x,\ y,\ z$ bất kỳ thì: $\begin{cases} (a.x + b.y + c.z)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ |a.x + b.y + c.z| \le \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \end{cases}$.

    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$ hay $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}\cdot$
  - Với $a,\ b,\ c$ là các số thực và $x,\ y,\ z$ là các số dương thì:

    $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ và $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (dạng cộng mẫu số).
* Bất đẳng thức véctơ: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$. Dấu = xảy ra khi $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng hướng

Ví dụ 495. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{12 - y} + \sqrt{y(12 - x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y - 2} & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Đại học khối A năm 2014

Phân tích. *Từ phương trình (1) có hình dáng của bất đẳng thức Cauchy viết ngược dạng:* $2\sqrt{ab} \le a + b$. *Do* $2 \le y \le 12$ *nên* $12 - x^2 \ge 0$ *nên sẽ áp dụng bất đẳng thức Cauchy, được:* $\sqrt{y.(12 - x^2)} \le \dfrac{y + 12 - x^2}{2}$ (1′). *Còn* $x\sqrt{12 - y} = \sqrt{x^2.(12 - y)}$ *là sai do x chưa khẳng định được dương khi* $-2\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{3}$. *Nhưng ta luôn có bất đẳng thức phụ quen thuộc dạng* $u.v \le \dfrac{u^2 + v^2}{2} \Leftrightarrow (u - v)^2 \ge 0$: *luôn đúng* $\forall u, v$. *Nghĩa là:*

$x\sqrt{12-y} \le \dfrac{x^2+12-y}{2}$ $(2')$. *Khi đó lấy* $(1')+(2') \Rightarrow x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)} \le 12$ *và dấu* $"="$ *xảy ra khi và chỉ khi dấu* $"="$ *trong* $(1')$ *và* $(2')$ *đồng thời xảy ra, tức luôn có* $\begin{cases} y=12-x^2 \\ x=\sqrt{12-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{3} \\ y=12-x^2 \end{cases}\cdot$ *Từ đó tìm được mối liên hệ giữa x, y và có lời giải 1. Ngoài ra, với điều kiện trên, phương trình (1) có mang dáng vấp của bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng:* $a\cdot x+b\cdot y \le \sqrt{(a^2+b^2)\cdot(x^2+y^2)}$, *nghĩa là từ (1) ta luôn có:*

$(1) \Leftrightarrow x.\sqrt{12-y}+\sqrt{12-x^2}.\sqrt{y} \overset{Cauchy-Schwarz}{\le} \sqrt{(x^2+12-x^2).(12-y+y)}=12,$ *và dấu đẳng thức xảy ra khi* $\dfrac{x}{\sqrt{12-y}}=\dfrac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{3} \\ y=12-x^2 \end{cases}\cdot$ *Từ đó có lời giải 2.*

Điều kiện: $\begin{cases} 12-y \ge 0 \\ y.(12-x^2) \ge 0 \\ y-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le y \le 12 \\ -2\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{3} \end{cases}.$

Lời giải 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức phụ:

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ \sqrt{y.(12-x^2)} \le \dfrac{y+12-x^2}{2} \\ \bullet\ x\sqrt{12-y} \le \dfrac{x^2+12-y}{2} \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)} \le 12.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{3} \\ y=12-x^2 \end{cases}\cdot$ Thế vào (2), ta được:

$(2) \Leftrightarrow x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow (x^3-8x-3)+2.(1-\sqrt{10-x^2})=0$

$\Leftrightarrow (x-3).(x^2+3x+1)+\dfrac{2.(x^2-9)}{1+\sqrt{10-x^2}}=0 \Leftrightarrow (x-3).\left[x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0$

$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3,$ do $x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}>0,\ \forall x \in \left[0;2\sqrt{3}\right]\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Lời giải 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

$(1) \Leftrightarrow x.\sqrt{12-y}+\sqrt{12-x^2}.\sqrt{y} \overset{Cauchy-Schwarz}{\le} \sqrt{(x^2+12-x^2).(12-y+y)}=12.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x}{\sqrt{12-y}}=\dfrac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{3} \\ x\sqrt{y}=\sqrt{12-y}.\sqrt{12-x^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{3} \\ x^2y=(12-y).(12-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{3} \\ x^2y=144-12x^2-12y+x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{3} \\ y=12-x^2 \end{cases}.$

Thế vào (2), giải tương tự cũng được nghiệm như trên.

Nhận xét. *Sau khi thế vào* $(2) \Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10 - x^2}$ *và sử dụng casio nhập vào và bấm shift solve trong miền xác định* $\left[0; 2\sqrt{3}\right]$, *chẳng hạn shift solve 1 được* $x = -1$, *nghiệm bị vi phạm nên tiếp tục shift solve 2 thu được* $x = 3$, *nghiệm này thỏa mãn nên ta sẽ ghép hằng số để liên hợp và có lời giải chi tiết như trên.*

Ví dụ 496. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2.(x + y) & (1) \\ \sqrt{x.(2 - y)} + \sqrt{y.(2 - x)} = 2 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Phân tích. *Phương trình (2) có dáng vẻ của bất đẳng thức Cauchy từng cụm căn, rồi cộng lại, nhưng do điều kiện* $\begin{cases} x.(2 - y) \ge 0 \\ y.(2 - x) \ge 0 \end{cases}$ *chưa khẳng định được các hạng tử tích trong căn đều dương nên chưa áp dụng được. Khi đó cần làm chặt miền điều kiện lại để áp dụng bất đẳng thức Cauchy. Quan sát (1) có dạng hằng đẳng thức, nên biến đổi*

$(1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 \le 1 \\ (y - 1)^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$. *Từ đó suy ra các hạng tử tích trong căn thức đều dương nên áp dụng được bất đẳng Cauchy như sau:*

$$\begin{cases} \sqrt{x.(2 - y)} \le \dfrac{x + 2 - y}{2} \\ \sqrt{y.(2 - x)} \le \dfrac{y + 2 - x}{2} \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} \sqrt{x.(2 - y)} + \sqrt{y.(2 - x)} \le 2,$$ *dấu đẳng thức khi:* $\begin{cases} x = 2 - y \\ y = 2 - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 2 - x$ *và thế vào phương trình (1). Từ đó có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x.(2 - y) \ge 0 \\ y.(2 - x) \ge 0 \end{cases}$.

Từ $(1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, suy ra: $\begin{cases} (x - 1)^2 \le 1 \\ (y - 1)^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} \bullet \ \sqrt{x \cdot (2 - y)} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{x + 2 - y}{2} \\ \bullet \ \sqrt{y \cdot (2 - x)} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{y + 2 - x}{2} \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} \sqrt{x \cdot (2 - y)} + \sqrt{y \cdot (2 - x)} \le 2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 2 - y \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2$ và kết hợp (1) được

hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ (x + y)^2 - 2xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Theo Viét thì $x,\ y$ là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 2X + \dfrac{1}{2} = 0.$

Suy ra: $\begin{cases} x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$: thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2};\dfrac{2\mp\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

Ví dụ 497. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x.\sqrt{8-x^2} + y.\sqrt{3-2y} = 5 & (1) \\ (3-2y).\sqrt{x+1} = 2y + \sqrt{4-y} - 2 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Từ (1) thấy hình dáng của bất đẳng thức. Đối với* $x\sqrt{8-x^2}$ *sẽ áp dụng bất đẳng thức luôn đúng* $a.b \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ *sẽ được hằng số và dấu đẳng thức xảy ra khi* $a = b$, *nghĩa là có* $x\cdot\sqrt{8-x^2} \le \dfrac{x^2+8-x^2}{2} = 4.$ *Còn đối với* $y\cdot\sqrt{3-2y}$ *sẽ không áp dụng bất đẳng thức trên được do vẫn còn y không phù hợp. Quan sát biểu thức trong căn có* $-2y$ *nên bình phương:* $(y.\sqrt{3-2y})^2 = y.y.(3-2y) \overset{Cauchy}{\le} \left(\dfrac{y+y+3-2y}{3}\right)^2 = 1.$

Nhưng khi áp dụng Cauchy thì cần $y \ge 0$ *nên sẽ làm chặt miền điều kiện dựa vào (2). Thật vậy do* $3-2y \ge 0,\ x+1 \ge 0$ *nên* $(2) \Leftrightarrow (3-2y).\sqrt{x+1} = 2y + \sqrt{4-y} - 2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow 2.(\sqrt{4-y})^2 - \sqrt{4-y} - 6 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le \sqrt{4-y} \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-y} \le 2 \Leftrightarrow y \ge 0.$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 8-x^2 \ge 0,\ x+1 \ge 0 \\ 3-2y \ge 0,\ 4-y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 2\sqrt{2}$ và $y \le \dfrac{3}{2}\cdot$

$$(2) \Leftrightarrow (3-2y).\sqrt{x+1} = 2y + \sqrt{4-y} - 2 \ge 0 \Rightarrow 2.(\sqrt{4-y})^2 - \sqrt{4-y} - 6 \le 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le \sqrt{4-y} \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-y} \le 2 \Leftrightarrow y \ge 0.$$

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ x\cdot\sqrt{8-x^2} \le \dfrac{x^2+8-x^2}{2} = 4. \\ \bullet\ y\cdot y\cdot(3-2y) \overset{Cauchy}{\le} \left(\dfrac{y+y+3-2y}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow y\sqrt{3-2y} \le 1 \end{cases}$ và cộng lại:

$(1) \Leftrightarrow 5 = x\sqrt{8-x^2} + y\sqrt{3-2y} \le 5$ và dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = \sqrt{8-x^2} \\ y = 3-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$

Thế vào phương trình (2) thấy thỏa mãn nên nhận $x = 2,\ y = 1.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \{(2;1)\}\cdot$

Ví dụ 498. Giải hệ PT: $\begin{cases} 6.\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2}+3.\sqrt{(2x-1)(2y-1)}=5x+7y+3 & (1) \\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}+1=2\cdot\dfrac{x+y}{xy} & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nếu* $x;\ y\ge\dfrac{1}{2}$ *thì từ (1), thấy có sự tương đồng của bất đẳng thức Cauchy 3 số và 2 số rồi cộng lại. Nghĩa là* $2.3.\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(y+1)}\overset{Cauchy}{\le}2.(x+2y+3)$ *và tương tự có* $3.\sqrt{(2x-1).(2y-1)}\overset{Cauchy}{\le}3\cdot\dfrac{2x+2y-2}{2}=3x+3y-3$ *và cộng lại thì được* $(2)\Leftrightarrow 5x+7y+3=6.\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2}+3.\sqrt{(2x-1)(2y-1)}\le 5x+7y+3.$ *Khi đó dấu đẳng thức xảy ra khi* $\begin{cases} x+1=y+1 \\ 2x-1=2y-1 \end{cases}\Leftrightarrow x=y$ *và thế vào phương trình còn lại thì bài toán được giải quyết. Vấn đề đặt ra ở đây là phải đi tìm điều kiện cho x và y như trên ?*

Từ $(2)\Leftrightarrow\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}+1=2\cdot\dfrac{1}{y}+2\cdot\dfrac{1}{x}$ *có dáng dấp của hằng đẳng thức nên sẽ biến đổi*

$$(2)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{y^2}-2\cdot\frac{1}{y}+1\right)+\left(\frac{1}{x^2}-2\cdot\frac{1}{x}+1\right)=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{x}-1\right)^2=1.$$

Suy ra: $\dfrac{1}{y}-1\le 1;\ \dfrac{1}{x}-1\le 1\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{2};\ y\ge\dfrac{1}{2}$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

☙ ***Lời giải***. Điều kiện: $\begin{cases}(2x-1)(2y-1)\ge 0 \\ xy\ne 0\end{cases}$.

$$(2)\Leftrightarrow\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+1=2\cdot\frac{1}{y}+2\cdot\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{x}-1\right)^2=1,\ (3)\Rightarrow x\ge\frac{1}{2};\ y\ge\frac{1}{2}\cdot$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương:

Ta có: $\begin{cases}\bullet\ \ 2.3.\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(y+1)}\overset{Cauchy}{\le}2.(x+2y+3) \\ \bullet\ \ 3.\sqrt{(2x-1).(2y-1)}\overset{Cauchy}{\le}3\cdot\dfrac{2x+2y-2}{2}=3x+3y-3\end{cases}\cdot$ Cộng lại, suy ra:

$$(2)\Leftrightarrow 5x+7y+3=6.\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2}+3.\sqrt{(2x-1)(2y-1)}\le 5x+7y+3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x+1=y+1 \\ 2x-1=2y-1\end{cases}\Leftrightarrow x=y.$

Thế vào phương trình $(3)\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=2+\sqrt{2} \\ x=y=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(2\pm\sqrt{2};2\pm\sqrt{2})\right\}\cdot$

Ví dụ 499. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x-y+\dfrac{1}{2}\right)^2+(xy-3)^2=\dfrac{5}{4} & (1) \\ (x+1).\sqrt{y^2+5}+(y-1).\sqrt{x^2-3}=10 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy (2) có dáng dấp của bất đẳng thức luôn đúng:* $2ab \le a^2+b^2$. *Tức là* $(2) \Leftrightarrow 10=(x+1).\sqrt{y^2+5}+(y-1).\sqrt{x^2-3} \le x^2+y^2+x-y+2,$ *hay viết lại dạng* $x^2+y^2+x-y \ge 8.$ *Nếu chứng minh* $x^2+y^2+x-y \le 8$ *từ (1) thì nghiệm hệ là các giá trị mà dấu* $"="$ *xảy ra. Thật vậy:* $(1) \Leftrightarrow x^2+y^2+x-y=8-(xy-4)^2 \le 8.$

Lời giải. Điều kiện: $x^2-3 \ge 0.$

Áp dụng bất đẳng thức luôn đúng $a.b \le \dfrac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0:$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \bullet\ (x+1)\cdot\sqrt{y^2+5} \le \dfrac{(x+1)^2+y^2+5}{2}=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+2x+6) \\ \bullet\ (y-1)\cdot\sqrt{x^2-3} \le \dfrac{(y-1)^2+x^2-3}{2}=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2-2y-2) \end{cases}$$

Kết hợp với $(2) \Leftrightarrow 10=(x+1).\sqrt{y^2+5}+(y-1).\sqrt{x^2-3} \le x^2+y^2+x-y+2$

Suy ra: $x^2+y^2+x-y \ge 8$ (3)

Ta lại có: $(1) \Leftrightarrow x^2+y^2+\dfrac{1}{4}-2xy-y+x+x^2y^2-6xy+9=\dfrac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-y=-x^2y^2+8xy-8=8-(x^2y^2-8xy+16)=8-(xy-4)^2 \le 8$$

Hay $x^2+y^2+x-y \le 8$ (4)

Từ (3), (4), suy ra hệ có nghiệm khi $\begin{cases} xy=4 \\ x+1=\sqrt{y^2+5} \\ y-1=\sqrt{x^2-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(2;2)\}\cdot$

Ví dụ 500. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 10x^2+5y^2-12xy-x-y=8 & (1) \\ (x-1)\sqrt{y-2}+(y-1)\sqrt{x+2}=5 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Tương tự* $(2) \Leftrightarrow 5=(x-1)\sqrt{y-2}+(y-1)\sqrt{x+2} \le \dfrac{1}{2}(x^2+y^2-x-y+2)$

hay $(2) \Rightarrow x^2+y^2-x-y \ge 8.$ *Khi đó* $(1) \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y=8-(3x-2y)^2 \le 8.$

Lời giải. Điều kiện: $y \ge 2,\ x \ge -2.$

Áp dụng bất đẳng thức luôn đúng $a.b \le \dfrac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0:$

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ (x-1).\sqrt{y-2} \le \dfrac{(x-1)^2+y-2}{2} = \dfrac{1}{2}(x^2-2x+y-1) \\ \bullet\ (y-1).\sqrt{x+2} \le \dfrac{(y-1)^2+x+2}{2} = \dfrac{1}{2}(y^2-2y+x+3) \end{cases}$ và cộng lại suy ra:

$(2) \Leftrightarrow 5 = (x-1)\sqrt{y-2} + (y-1)\sqrt{x+2} \le \dfrac{x^2+y^2-x-y+2}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y \ge 8.$

$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y+(9x^2-12xy+4y^2) = 8 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y = 8-(3x-2y)^2 \le 8.$

Do đó nghiệm hệ thỏa mãn $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ x-1=\sqrt{y-2} \\ y-1=\sqrt{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ x-1=\sqrt{\dfrac{3}{2}x-2} \\ \dfrac{3}{2}x-1=\sqrt{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(2;3)\}\cdot$

Ví dụ 501. Giải hệ: $\begin{cases} y.(\sqrt{x+6}-y)+\sqrt{6.(y^2-x)} = 6 & (1) \\ \sqrt{x^2-2y^2+17}+2\sqrt{4x+5} = x^3-2x^2+5y^2-26 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Từ phương trình* $(1) \Leftrightarrow y\sqrt{x+6}+\sqrt{6.(y^2-x)} = 6+y^2$. *Do từ điều kiện, y chưa khẳng định được dấu nêu sẽ áp dụng bất đẳng thức* $2ab \le a^2+b^2$ *cho cụm:* $y.\sqrt{x+6}$ *và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho cụm* $\sqrt{6.(y^2-x)}$, *sau đó cộng lại. Nghĩa là* $(1) \Leftrightarrow 6+y^2 = y.\sqrt{x+6}+\sqrt{6.(y^2-x)} \le \dfrac{y^2+x+6}{2}+\dfrac{6+y^2-x}{2} = 6+y^2$. *Khi đó dấu đẳng thức xảy ra khi* $x=y^2-6$, *và có lời giải chi tiết sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{5}{4},\ x^2-2y^2+12 \ge 0.$

$(1) \Leftrightarrow y.\sqrt{x+6}+\sqrt{6.(y^2-x)} = 6+y^2 \qquad (1')$

Ta có: $\begin{cases} y.\sqrt{x+6} \le \dfrac{y^2+x+6}{2} \\ \sqrt{6.(y^2-x)} \overset{\text{Cauchy}}{\le} \dfrac{6+y^2-x}{2} \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} (1) \Leftrightarrow 6+y^2 = y\sqrt{x+6}+\sqrt{6(y^2-x)} \le 6+y^2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y=\sqrt{x+6} \ge 0 \\ 6=\sqrt{y^2-x} \end{cases} \Leftrightarrow x=y^2-6$, và thế vào phương trình $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{4x+5} = x^3-2x^2+5x+4 \qquad (3)$

$\Leftrightarrow 3x^3-6x^2+15x+12-3\sqrt{x^2-2x+5}-6\sqrt{4x+5}=0$

$\Leftrightarrow 3(x+1-\sqrt{x^2-2x+5})+2\sqrt{4x+5}(\sqrt{4x+5}-3)+3x^3-6x^2+4x-1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{12(x-1)}{x+1+\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{8(x-1)\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3}+(x-1)(3x^2-3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{12}{x+1+\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{8\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3}+3x^2-3x+1\right)=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=\sqrt{7}\end{cases}.$$

Do: $\dfrac{12}{x+1+\sqrt{x^2-2x+5}}+\dfrac{8\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+5}+3}+(3x^2-3x+1)>0,\ \forall x\ge -\dfrac{5}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ cần tìm là $(x;y)=(1;\sqrt{7})$.

Nhận xét. *Trong cách giải của phương trình (3), tôi đã sử dụng kỹ thuật truy ngược dấu để liên hợp. Thay vì viết* $3-\sqrt{4x+5}$, *sẽ đổi thành* $\sqrt{4x+5}(\sqrt{4x+5}-3)$ *và đổi* $2-\sqrt{x^2-2x+5}$ *thành* $x+1-\sqrt{x^2-2x+5}$ *nhằm tạo lượng dương sau khi liên hợp.*

Ví dụ 502. Giải hệ PT: $\begin{cases}\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3(x+y) & (1)\\ \sqrt{2x+y+1}+2\sqrt[3]{7x+12y+8}=2xy+y+5 & (2)\end{cases}$

Olympic 30/04/2014 lần thứ XX

Phân tích. *Phương trình (1) đẳng cấp và đối xứng theo hai biến x, y nên ta có thể dự đoán* $x=y$ *và sẽ giải phương trình (1) bằng phương pháp đánh giá dựa vào điểm rơi này. Nhận thấy các biểu thức trong căn thức đều đưa được về dạng hằng đẳng thức nên sẽ đưa về dạng* $\sqrt{(x-y)^2+A^2}\ge\sqrt{A^2}=|A|\ge A$ *với dấu* "=" *xảy ra khi* $x=y$. *Thật vậy, viết* $5x^2+2xy+2y^2=(mx+ny)^2+(x-y)^2$ *và đồng nhất tìm được* $m=2$, $n=1$ *nên có* $\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}=\sqrt{(2x+y)^2+(x-y)^2}$. *Do bài toán đối xứng nên có thể viết tương tự đối với căn còn lại và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $2x+y+1\ge 0$ và vế trái (1) luôn dương nên $x+y\ge 0$.

$$(1)\Leftrightarrow 3(x+y)=\sqrt{(2x+y)^2+(x-y)^2}+\sqrt{(x+2y)^2+(x-y)^2}$$
$$\ge\sqrt{(2x+y)^2}+\sqrt{(x+2y)^2}=|2x+y|+|x+2y|\ge 3(x+y).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y\ge 0$.

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}+2\cdot\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5 \qquad (3)$$

Sử dụng casio, nhẩm được phương trình (3) có 2 nghiệm: $x=0$, $x=1$ *nên sẽ ghép bậc nhất dạng* $ax+b$ *để liên hợp nhằm tạo ra nhân tử* $x(x-1)=x^2-x$. *Biểu thức này xác định bằng cách: Với căn thức* $\sqrt{3x+1}$ *thì*

$$\begin{cases}khi\ x=0\Rightarrow\sqrt{3x+1}=\sqrt{3.0+1}=1=ax+b=a.0+b\\ khi\ x=1\Rightarrow\sqrt{3x+1}=\sqrt{3.1+1}=2=ax+b=a.1+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$$ *nên sẽ ghép biểu thức* $\left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]$. *Với* $\sqrt[3]{19x+8}$ *thì*

$\begin{cases} khi\ x=0 \Rightarrow \sqrt[3]{19x+8}=\sqrt[3]{19.0+8}=2=ax+b=a.0+b \\ khi\ x=1 \Rightarrow \sqrt[3]{19x+8}=\sqrt[3]{19.1+8}=3=ax+b=a.1+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ *nên sẽ ghép biểu thức:* $2\cdot\left[\sqrt[3]{19x+8}-(x+2)\right]$. *Lúc này sẽ có tách ghép và giải tiếp tục như sau:*

$$(3) \Leftrightarrow \left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]+2\cdot\left[\sqrt[3]{19x+8}-(x+2)\right]=2x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{-2(x^3+6x^2-7x)}{\sqrt[3]{(19x+8)^2}+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+(x+2)^2}=2x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2(x^2-x)(x+7)}{\sqrt[3]{(19x+8)^2}+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+(x+2)^2}+2(x^2-x)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2(x+7)}{\sqrt[3]{(19x+8)^2}+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+(x+2)^2}+2\right]}_{>0,\ \forall x\geq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.: \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(0;0);(1;1)\}$.

Ví dụ 503. Giải hệ PT: $\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{y^2+xy+2x^2}=2(x+y) & (1) \\ (8y-6)\sqrt{x-1}=(2+\sqrt{x-2})(y+4\sqrt{y-2}+3) & (2) \end{cases}$

Chọn đội tuyển VMO tỉnh Cần Thơ năm 2015

Phân tích. *Bài toán mang tính đẳng cấp và đối xứng ở phương trình (1), nhưng ta sẽ không đưa được về dạng hằng đẳng thức với điểm rơi nên không sử dụng được dạng* $\sqrt{(x-y)^2+A^2}\geq\sqrt{A^2}=|A|\geq A$. *Do đưa được về dạng* $\sum\sqrt{(mx+ny)^2+py^2}$ *nên có thể sử dụng bất đẳng thức véctơ. Cụ thể ta có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 2 \end{cases}$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}y\right)^2}+\sqrt{\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)^2}=2.(x+y) \qquad (3)$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chọn $\vec{u}=\left(x+\frac{y}{2};\frac{\sqrt{7}}{2}y\right)$, $\vec{v}=\left(y+\frac{x}{2};\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$ nên:

$\vec{u}+\vec{v}=\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y;\frac{\sqrt{7}}{2}(x+y)\right)$. Suy ra: $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{\frac{9}{4}(x+y)^2+\frac{7}{4}(x+y)^2}=2(x+y)$

và $|\vec{u}|=\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}y\right)^2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức véctơ $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$, và kết hợp (3), ta có:

$$(3)\Leftrightarrow 2(x+y)=\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}y\right)^2}+\sqrt{\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)^2}\geq 2(x+y).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, nghĩa là:

$\frac{\sqrt{7}}{2}x.\left(x+\frac{y}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{2}y.\left(y+\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow x=y$, do $x\geq 1,\ y\geq 2$.

Thế vào $(2)\Leftrightarrow(8x-6)\sqrt{x-1}=(2+\sqrt{x-2}).(x+4\sqrt{x-2}+3)$

$$\Leftrightarrow(4x-3).\sqrt{4x-4}=(2+\sqrt{x-2}).\left[((\sqrt{x-2})^2+4\sqrt{x-2}+4)+1\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[(\sqrt{4x-4})^2+1\right].\sqrt{4x-4}=(2+\sqrt{x-2}).\left[(\sqrt{x-2}+2)^2+1\right]$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{4x-4})^3+\sqrt{4x-4}=(2+\sqrt{x-2})^3+(2+\sqrt{x-2})$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{4x-4})=f(2+\sqrt{x-2}).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{4x-4})=f(2+\sqrt{x-2})\Leftrightarrow\sqrt{4x-4}=2+\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow x+2+4\sqrt{x-2}=4x-4\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2}=3x-6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=2\\ x=\frac{34}{9}\Rightarrow y=\frac{34}{9}\end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $(x;y)=(2;2);\ \left(\frac{34}{9};\frac{34}{9}\right)$.

Ví dụ 504. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y & (1)\\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3 & (2)\end{cases}$

Tạp chí Toán học & Tuổi Trẻ số 407

Phân tích. *Nhận thấy phương trình (1) có tính đẳng cấp. Ngoài ra (1) còn mang tính chất đối xứng với 2 biến x, y nên ta có thể dự đoán được $x=y$. Hiển nhiên cũng giải được bằng phương pháp đánh giá bởi bất đẳng thức với điểm rơi $x=y$. Còn nếu sử dụng tính chất đẳng cấp cũng được giá trị $x=y$ và có các lời giải sau:*

Điều kiện: $\begin{cases}2xy+5x+3\geq 0\\ x+y\geq 0\end{cases}$. Do $x=y=0$ không là nghiệm của hệ nên ta chỉ xét trong điều kiện: $\begin{cases}2xy+5x+3\geq 0\\ x+y>0\end{cases}$.

Lời giải 1. Sử dụng bất đẳng thức với điểm rơi $x=y$.

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{4}} = \dfrac{1}{2}(x+y) \\ \bullet\ \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{(x+y)^2-x.y}{3}} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} \sqrt{\dfrac{(x+y)^2-\dfrac{(x+y)^2}{4}}{3}} = \dfrac{1}{2}(x+y) \end{cases}$.

Suy ra: $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq x+y$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y>0$.

Thế $x=y$ vào (2) $\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+5x+3} = 4x^2-5x-3$ (3)

Hướng 1. Ghép hằng số để liên hợp.

$(3) \Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+5x+3} = 4x^2-5x-3 \Leftrightarrow x.(\sqrt{2x^2+5x+3}-6) = 4x^2-11x-3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(2x^2+5x-33)}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6} = 4x^2-11x-3 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-3)(2x+11)}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6} = (x-3)(4x+1)$

$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left[\dfrac{2x^2+11x}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6} - (4x+1)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=6 \\ \dfrac{2x^2+11x}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6} = 4x+1 \quad (4) \end{array}\right.$

Do với điều kiện: $\begin{cases} 4x^2-5x-3\geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5+\sqrt{73}}{8} > 1,$ thì:

$(4) \Leftrightarrow 2x^2+11x = (4x+1)(\sqrt{2x^2+5x+3}+6) = (4x+1)\left[\sqrt{2(x+1)^2+x+1}+6\right]$

$> (4x+1)\left[(x+1)+6\right] = (4x+1)(x+7) = 4x^2+29x+7 > 2x^2+11x.$

Suy ra phương trình (4) vô nghiệm.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Hướng 2. Lũy thừa trực tiếp.

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x-3\geq 0,\ x>0 \\ x^2(2x^2+5x+3) = (4x-5x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x-3\geq 0,\ x>0 \\ 14x^4-45x^3-2x^2+30x+9=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{5+\sqrt{73}}{8} \\ (x-3)(14x^3-3x^2-11x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}.$

Do $f(x)=14x^3-3x^2-11x+3>0,$ (xét hàm $f(x)$, thấy $f(x)>0$)

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Hướng 3. Chia hai vế cho $x^2>0$ và đặt ẩn phụ.

$(3) \Leftrightarrow \sqrt{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = 4-\left(\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$ và đặt $t=\sqrt{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}} \geq 0$ nên phương trình

$\Leftrightarrow \begin{cases} t=4-(t^2-2) \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+t-6=0 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2,$ suy ra: $\sqrt{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x}-2=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Hướng 4. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp.

$(3) \Leftrightarrow 2x^2+5x+3+x\sqrt{2x^2+5x+3}-6x^2=0$ và đặt $a=\sqrt{2x^2+5x+3},\ b=x$ thì:

$\Leftrightarrow a^2+ab-6b^2=0 \Leftrightarrow (a-2b)(a+3b)=0 \Leftrightarrow a=2b$ hoặc $a=-3b.$

Với $a=2b,$ suy ra: $\sqrt{2x^2+5x+3}=2x \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Lời giải 2. Sử dụng tính đẳng cấp của phương trình (1).

Chia 2 vế của phương trình (1) cho lượng $x+y>0,$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}+\sqrt{\frac{(x^2+y^2)+(x+y)^2}{6(x+y)^2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{6(x+y)^2}+\frac{1}{6}}=1$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}>0$ thì phương trình $\Leftrightarrow t+\sqrt{\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{1}{6}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{1}{6}}=1-t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\le 1 \\ 4t^2-12t+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\cdot$$

Với $t=\dfrac{1}{2},$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2(x+y)^2}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2(x^2+y^2)=(x+y)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2=x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y>0.$

Thế $x=y$ vào $(2) \Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3$

$\Leftrightarrow 2x^2+5x+3+x\sqrt{2x^2+5x+3}-6x^2=0$ và đặt $a=\sqrt{2x^2+5x+3},\ b=x$ thì:

$\Leftrightarrow a^2+ab-6b^2=0 \Leftrightarrow (a-2b)(a+3b)=0 \Leftrightarrow a=2b$ hoặc $a=-3b.$

Với $a=2b,$ suy ra: $\sqrt{2x^2+5x+3}=2x \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3.$

Với $a=-3b,$ suy ra: $\sqrt{2x^2+5x+3}=-3x:$ vô nghiệm do $x>0.$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Ví dụ 505. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (1) \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2y-5}=2y^2-5x & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Phương trình (1) có dạng đẳng cấp bậc ba và đối xứng nên dự đoán (1) luôn đúng khi* $x=y$. *Ngoài ra, hoàn toàn có thể đưa được về dạng tổng tích nên sử dụng Cauchy, kết hợp với Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu số để đánh giá phương trình* $(1) \Leftrightarrow 0=x^3+y^3-xy\sqrt{2(x^2+y^2)}=(x+y)^3-3xy(x+y)-xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$

$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\overset{\text{Cauchy}}{\geq}} (x+y)^3 - \dfrac{(x+y)^2}{4}\left[3(x+y)+\sqrt{2.\dfrac{(x+y)^2}{2}}\right]=0.$ *Từ đó suy ra dấu đẳng thức xảy ra khi* $x=y,$ *rồi thế vào phương trình còn lại và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $2\le x\le 4,\ y\ge \dfrac{5}{2}\cdot$

$$(1)\Leftrightarrow 0=x^3+y^3-xy\sqrt{2(x^2+y^2)}=(x+y)^3-3xy(x+y)-xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\overset{\text{Cauchy}}{\geq}} (x+y)^3-\frac{(x+y)^2}{4}\left[3(x+y)+\sqrt{2.\frac{(x+y)^2}{2}}\right]=0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y.$ Thế vào phương trình (2), được:

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x \qquad (3)$$

Sử dụng casio, nhập $\sqrt{X-2}+\sqrt{4-X}+\sqrt{2X-5}-2X^2+5X$ *và bấm shift solve 3 trong khoảng điều kiện được nghiệm* $x=3$ *nên ghép hằng số và sử dụng kỹ thuật truy ngược dấu để nhân liên hợp đưa về dạng* $(x-3).f(x)=0$ *với* $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[2;4]\cdot$

$$(3)\Leftrightarrow 2x^2-5x-\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}-\sqrt{2x-5}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-1)+(1-\sqrt{4-x})+\sqrt{2x-5}(\sqrt{2x-5}-1)+2x^2-8x+6=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{2(x-3)\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}+2(x-3)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{2\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}+2(x-1)\right]=0\Leftrightarrow x=3$$

do: $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\dfrac{2\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1}+2(x-1)>0,\ \forall x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]\Rightarrow y=3\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(3;3)\}\cdot$

Nhận xét. *Trong lời giải trên, tôi đã sử dụng tính đẳng cấp và tính đối xứng dạng tổng tích để áp dụng đánh giá bằng bất đẳng thức. Để hiểu kỹ hơn, ta xét ví dụ sau:*

Ví dụ 506. Giải hệ PT: $\begin{cases}(2\sqrt{2y-1}-4)x^2+(7-4\sqrt{2y-1})x+\sqrt{2x-1}=3 & (1)\\ x^3+y^3+7(x+y)xy=8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (2)\end{cases}$

Phân tích. *Tương tự ví dụ trên, từ phương trình (2), ta sẽ biến đổi về dạng tổng tích và sử dụng Cauchy với điểm rơi* $x=y$ *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge \dfrac{1}{2};\ y\ge \dfrac{1}{2}\cdot$

Ta có: $VT_{(2)}=(x+y)^3+4xy(x+y)\overset{\text{Cauchy}}{\geq} 4(x+y)^2\sqrt{xy}=4\sqrt{xy}.\left[(x^2+y^2)+2xy\right]$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\geq} 4\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{2(x^2+y^2).xy} = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} = VP_{(2)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Thế vào phương trình (1) được:

$$(1) \Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1}-4)x^2 + (7-4\sqrt{2x-1})x + \sqrt{2x-1} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-4x+1)\sqrt{2x-1} = 4x^2 - 7x + 3$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-4x+1)\sqrt{2x-1} = (4x-3)(x-1) \qquad (3)$$

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ v = \sqrt{2x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 - 2x + 1 \\ v^2 = 2x - 1 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} 2u^2 - 1 = 2x^2 - 4x + 1 \\ 2v^2 - 1 = 4x - 3 \end{cases}$.

$$(3) \Leftrightarrow (2u^2v - 2v^2u) + (u - v) = 0 \Leftrightarrow 2uv(u-v) + (u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)(2uv+1) = 0$$

$\Leftrightarrow u = v$ hoặc $2uv + 1 = 0.$

- Với $u = v$, suy ra: $\sqrt{2x-1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\sqrt{2} \\ y = 2+\sqrt{2} \end{cases}$.
- Với $2uv + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)\sqrt{2x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[(\sqrt{2x-1})^2 - 1\right]\cdot\sqrt{2x-1} + 1 = 0$

  $\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1})^3 - \sqrt{2x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^3 - t + 1 = 0,$ (4) với $t = \sqrt{2x-1} \geq 0.$

  Xét hàm số $f(t) = t^3 - t + 1$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t) = 3t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \forall t \geq 0.$

t	$-\infty$	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(t)$	(hatched)		$-$	0	$+$	
$f(t)$	(hatched)	1	$\searrow$	$\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $VT_{(2)} = f(t) \geq f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{9-2\sqrt{3}}{9} > 0.$

Do đó phương trình (4) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{(2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})\right\}$.

Bình luận: *Nếu nhìn nhận từ góc độ bất đẳng thức, bản chất bài toán xuất phát từ bất đẳng thức phụ quen thuộc:* $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} + 7(a+b) \geq 8.\sqrt{2.(a^2+b^2)}$ (*), $\forall a,b > 0$. *Thật vậy:*

$(*) \Leftrightarrow (a-b)^2 \cdot \left[\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{8}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}\right] \geq 0$ *và bất đẳng thức này luôn đúng vì ta có:* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b} = \dfrac{8}{(a+b)+(a+b)} \geq \dfrac{8}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}$ · *Dấu* " = " *khi* $a = b > 0.$

Ví dụ 507. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+7y)\sqrt{x}+(y+7x)\sqrt{y}=8\sqrt{2xy(x+y)} & (1) \\ 2(1-y)\sqrt{x^2+2x-1}=y^2-2x-1 & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp

Phân tích. *Bài toán tương tự như ví dụ trên khi thế* $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$. *Thật vậy, từ (1), ta có:* $(1)\Leftrightarrow(a^2+7b^2)a+(b^2+7a^2)b=8\sqrt{2a^2b^2(a^2+b^2)}$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+7ab(a+b)=8ab\sqrt{2(a^2+b^2)}$ *và biến đổi tương tự như ví dụ trên thu được* $a=b$ *hay* $x=y$ *và thế vào* $(2)\Leftrightarrow 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$. *Tiếp tục sử dụng casio tìm được nhân tử* x^2+2x-5 *nên ghép để liên hợp hoặc xử lý bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn* $t=\sqrt{x^2+2x-1}\ge 0$ *khi biệt số delta là số chính phương. Hiển nhiên, ta có thể sử dụng bất đẳng thức phụ phần bình luận để tìm được mối liên hệ giữa* x, y *và có lời giải chi tiết như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0,\ y\ge 0$. Đặt $a=\sqrt{x}\ge 0,\ b=\sqrt{y}\ge 0$.

$$(1)\Leftrightarrow(a^2+7b^2)a+(b^2+7a^2)b=8\sqrt{2a^2b^2(a^2+b^2)}$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+7ab(a+b)=8ab\sqrt{2(a^2+b^2)} \qquad (3)$$

Ta có: $VT_{(3)}=(a+b)^3+4ab(a+b)\overset{\text{Cauchy}}{\ge}4(a+b)^2\sqrt{ab}=4\sqrt{ab}.\left[(a^2+b^2)+2ab\right]$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\ge}4\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{2(a^2+b^2).ab}=8ab\sqrt{2(a^2+b^2)}=VP_{(3)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y}\ge 0\Leftrightarrow x=y$.

$$(2)\Leftrightarrow 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$$

$$\Leftrightarrow(x^2+2x-5)+\frac{2(x-1)(x^2+2x-5)}{\sqrt{x^2+2x-1}+2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+2x-5=0 \\ \sqrt{x^2+2x-1}=-2x \end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases} x=\sqrt{6}-1 \\ y=\sqrt{6}-1 \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ cần tìm là $(x;y)=(\sqrt{6}-1;\sqrt{6}-1)$.

Ví dụ 508. Giải hệ PT: $\begin{cases} (x-2)\cdot(\sqrt{y^2-4x+7}+1)+y\cdot(\sqrt{x^2+3}+1)=0 & (1) \\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+y}}\right)=2 & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Nhận thấy phương trình (2) mang tính đẳng cấp và đối xứng nên sẽ sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức với điểm rơi* $x=y$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\ne 0$.

$$(2)\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{x}{x+3y}}+\sqrt{\frac{y}{x+3y}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x}{3x+y}}+\sqrt{\frac{y}{3x+y}}\right)=2.$$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{x+3y}} = \sqrt{\dfrac{x}{x+y}\cdot\dfrac{x+y}{x+3y}} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \dfrac{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x+y}{x+3y}}{2} \\ \sqrt{\dfrac{y}{x+3y}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x+3y}} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2x}{x+3y}}{2} \end{cases}$

Cộng vế theo vế được: $\sqrt{\dfrac{x}{x+3y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+3y}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right)$ (4)

Tương tự: $\sqrt{\dfrac{x}{3x+y}}+\sqrt{\dfrac{y}{3x+y}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right)$ (5)

Cộng (4) với (5) theo vế được: $\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+3y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+3y}}\right)+\left(\sqrt{\dfrac{x}{3x+y}}+\sqrt{\dfrac{y}{3x+y}}\right) \leq 2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y.$ Thế vào (1), ta được:

$(1) \Leftrightarrow (x-2)(\sqrt{x^2-4x+7}+1)+x(\sqrt{x^2+3}+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2).\left[\sqrt{(x-2)^2+3}\right]=(-x).\left[\sqrt{(-x)^2+3}+1\right] \Leftrightarrow f(x-2)=f(-x).$

Xét hàm số $f(t)=t.\sqrt{t^2+3}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\ \forall t.$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(x-2)=f(-x) \Leftrightarrow x-2=-x \Leftrightarrow x=y=1.$

Kết luận: So với điều kiện tập nghiệm của hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(1;1)\}$.

Ví dụ 509. Giải phương trình: $\begin{cases} xy+6y\sqrt{x-1}+12y=4 & (1) \\ \dfrac{xy}{1+y}+\dfrac{1}{xy+y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R}).$

Chọn đội tuyển VMO Tp. Hồ Chí Minh năm 2015

Phân tích. *Nhận thấy rằng (2) luôn đúng với* $y=\dfrac{1}{x}$ *và bài toán có chứa phân thức nên khó cho việc nhân liên hợp. Từ đó sẽ nghĩ đến đánh giá trực tiếp bằng bất đẳng.*

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0,\ y \geq 1.$

Ta có: $VT_{(2)}=\dfrac{xy}{1+y}+\dfrac{1}{xy+y} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{xy}{1+y}\cdot\dfrac{1}{xy+y}}=2\sqrt{\dfrac{x}{1+y}\cdot\dfrac{1}{x+1}}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}.\sqrt{1+y}} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}.1+1.\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=VP_{(2)}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Leftrightarrow \begin{cases} xy(xy+y)=1+y \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{y}}{1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2+xy^2-1-y=0 \\ \sqrt{xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-1)(xy+y+1)=0 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}\cdot$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2}{x}\sqrt{x-1}+\frac{4}{x}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-8x+16=4x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=\dfrac{1}{10} \end{cases}.$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm của hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{\left(10;\dfrac{1}{10}\right)\right\}$.

Ví dụ 510. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y+3}+\dfrac{4.(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1})}{3.(\sqrt{y}+1)^2}=3 & (1) \\ \sqrt{x.(y+2)}+\sqrt{y.(x-2)}=x+y & (2) \end{cases}$

Phân tích. *Bài toán có dáng dấp của bất đẳng thức Cauchy dạng:* $2\sqrt{a\cdot b}\le a+b$ *ở phương trình (2) cho từng căn, rồi cộng lại. Thật vậy, với điều kiện:* $x\ge 2,\ y\ge 0,$ *có:*

$(2) \Leftrightarrow x+y=\sqrt{y(x-2)}+\sqrt{x(y+2)} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{y+x-2}{2}+\dfrac{x+y+2}{2}=x+y.$ *Dấu đẳng thức xảy ra khi* $y=x-2.$ *Khi đó* $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\dfrac{4}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x-2}+1)^2}=3$ *và đặt* $\begin{cases} a=\sqrt{x+1}\ge 0 \\ b=\sqrt{x-2}\ge 0 \end{cases}$ *thì* $(1)\Leftrightarrow a+\dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2}=3.$ *Một bài toán quen thuộc của dạng tách cặp nghịch đảo khi tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức:* $P=a+\dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2}$ *ở lớp 10. Nghĩa là cần tách phần nguyên theo mẫu số để sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy triệt tiêu được biến và còn lại hằng số 3. Với* $x\ge 2$ *thì* $a>b\ge 0$ *nên* $a-b>0$ *và ta sẽ có:* $P=(a-b)+\left(\dfrac{b+1}{2}\right)+\left(\dfrac{b+1}{2}\right)+\dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2}-1 \overset{Cauchy}{\ge} 4-1=3.$ *Khi đó dấu đẳng thức xảy ra khi* $a=b,$ *tức bài toán kết thúc khi thế trở lại tìm x, suy ra y.*

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2,\ y\ge 0.$

$$(2) \Leftrightarrow x+y=\sqrt{y(x-2)}+\sqrt{x(y+2)} \overset{Cauchy}{\le} \frac{y+x-2}{2}+\frac{x+y+2}{2}=x+y.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y=x-2 \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow y=x-2.$ Thế vào (1) ta được:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \dfrac{4.(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})}{3.(\sqrt{x-2}+1)^2} = 3,$ (3) và do: $x \ge 2$ nên $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-2}$ nên liên hợp $(3) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \dfrac{4}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x-2}+1)^2} = 3$ (4)

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+1} \\ b = \sqrt{x-2} \end{cases}, (a > b \ge 0)$ thì $(4) \Leftrightarrow a + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} = 3.$

Ta có: $(4) \Leftrightarrow 3 = \left[(a-b) + \left(\dfrac{b+1}{2}\right) + \left(\dfrac{b+1}{2}\right) + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2}\right] - 1 \overset{Cauchy}{\ge} 4 - 1 = 3.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a - b = \dfrac{b+1}{2} = \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$

Suy ra: $\sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \{(3;1)\}\cdot$

Ví dụ 511. Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt[3]{xy+3x+2y+6+2(x+2)\sqrt{y+2}} - \sqrt[3]{xy+2x+y+2} = 1 & (1) \\ \sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{y-3x+2} + 2x^2y - 7x^3 + 7x^2 - 6x = 0 & (2) \end{cases}$

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Nguyễn Du – Đắk Lắk

Phân tích. *Giữa 2 phương trình trong hệ không có mối liên hệ với nhau. Nhận thấy ở (1) các biểu thức trong căn thức có thể đưa được về dạng tích số. Thật vậy, ta có:* $(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)(\sqrt{y+2}+1)^2} = 1 + \sqrt[3]{(x+1)(y+2)}$ *và để đơn giản, ta có thể đặt ẩn phụ* $u = x+1,\ v = \sqrt{y+2}$ *thì phương trình* $\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+u)(1+v)^2} = 1 + \sqrt[3]{uv^2}$ *và nhận thấy phương trình luôn đúng khi* $u = v$ *nên sử dụng phương pháp đánh giá như sau:*

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2};\ y \ge -2.$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x(y+3)+2(y+3)+2(x+2)\sqrt{y+2}} - \sqrt[3]{x(y+2)+(y+2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(y+3)(x+2)+2(x+2)\sqrt{y+2}} - \sqrt[3]{(y+2)(x+1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)(y+3+2\sqrt{y+2})} - \sqrt[3]{(x+1)(y+2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)(\sqrt{y+2}+1)^2} = 1 + \sqrt[3]{(x+1)(y+2)} \qquad (3)$$

Đặt $u = x+1 \ge \dfrac{3}{2},\ v = \sqrt{y+2} \ge 0.$ Khi đó: $(3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+u)(1+v)^2} = 1 + \sqrt[3]{uv^2}$

$$\xleftrightarrow{\text{Chia: } \sqrt[3]{(1+u)(1+v)^2} > 0} 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{(1+u)(1+v)^2}} + \sqrt[3]{\frac{uv^2}{(1+u)(1+v)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 1=\sqrt[3]{\frac{1}{1+u}\frac{1}{1+v}\frac{1}{1+v}}+\sqrt[3]{\frac{u}{1+u}\frac{v}{1+v}\frac{v}{1+v}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{2}{1+v}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{u}{1+u}+\frac{2v}{1+v}\right)=1$$

(do áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $3\sqrt[3]{a.b.c}\le a+b+c$ rồi cộng lại)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{1+u}=\dfrac{1}{1+v}\\ \dfrac{u}{1+u}=\dfrac{v}{1+v}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v\\ u(1+v)=v(1+u)\end{cases}\Leftrightarrow u=v.$

Suy ra: $x+1=\sqrt{y+2}\Leftrightarrow y=x^2+2x-1.$ Thế vào phương trình (2), ta được:

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x^2-x+1}+2x^4-3x^3+5x^2-6x=0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2x-1}-1)+(\sqrt[3]{x^2-x+1}-1)+2x^4-3x^3+5x^2-6x+2=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{x(x-1)}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}+1}+(x-1)(2x-1)(x^2+2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}+1}+(2x-1)(x^2+2)\right]=0$$

$\Leftrightarrow x=1,$ suy ra: $y=2.$

Do: $\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}+1}+(2x-1)(x^2+2)>0,\forall x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(1;2)\right\}\cdot$

Ví dụ 512. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1)\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} & (2)\end{cases}$

Học sinh giỏi Quốc Gia năm 2009

Phân tích. *Nhận thấy rằng (1) mang hình dáng của bất đẳng thức phụ quen thuộc:*

$\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+uv}},\ \forall\begin{cases}u,\ v\ge 0\\ uv\le 1\end{cases}$ *nếu đặt* $\begin{cases}u=x\sqrt{2}\\ v=y\sqrt{2}\end{cases}$ *và dấu* " = " *khi* $u=v.$

Lời giải. Điều kiện: $0\le x;\ y\le\dfrac{1}{2}\cdot$ Đặt $u=x\sqrt{2};\ v=y\sqrt{2},\ u;\ v\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\cdot$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+uv}},\ \forall\begin{cases}u,\ v\ge 0\\ uv\le 1\end{cases}\qquad(3)$$

Ta có: $1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}+1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le}\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{\dfrac{1}{1+u^2}+\dfrac{1}{1+v^2}}\qquad(4)$

Mặt khác ta luôn có: $\forall u,v\in[0;1]$, thì $\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{1+v^2}\le\frac{2}{1+uv}$ (5)

Thật vậy: $(5)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{1+uv}\right)+\left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{1}{1+uv}\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow\frac{uv-u^2}{(1+u^2)(1+uv)}+\frac{uv-v^2}{(1+v^2)(1+uv)}\le 0\Leftrightarrow\frac{u(v-u)}{(1+u^2)(1+uv)}+\frac{v(u-v)}{(1+v^2)(1+uv)}\le 0$$

$\Leftrightarrow\frac{(v-u)^2(uv-1)}{(1+u^2)(1+v^2)(1+uv)}\le 0$: luôn đúng $\forall\begin{cases}u,\ v\ge 0\\ uv\le 1\end{cases}$.

Từ (3), (4), (5), suy ra: $(3)\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{1+uv}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+uv}}$, $\forall\begin{cases}u,\ v\ge 0\\ uv\le 1\end{cases}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u=v\Rightarrow x\sqrt{2}=y\sqrt{2}\Leftrightarrow x=y$.

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x-2x^2}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 2x^2-x+\frac{1}{81}=0\Leftrightarrow x=y=\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của hệ là $x=y=\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}$.

Ví dụ 513. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{9-(1-x^2y)^2}=x^4+y^4+1 & (1)\\ \sqrt{4+(x-y)^2}=2x^3y^2+x^4-x^6 & (2)\end{cases}$

Học sinh giỏi tỉnh Ninh Thuận năm 2014

Phân tích. *Nhận thấy rằng cả hai phương trình không có dấu hiệu nhận dạng của bất đẳng thức hoặc bất đẳng thức phụ quen thuộc. Khi đó, ta cần có sự kết hợp của 2 phương trình lại với nhau. Nếu lấy (1) trừ đi (2) theo vế sẽ triệt tiêu đi được* x^4 *và thu được vế phải có dạng hằng đẳng thức nên dễ dàng đánh giá. Thật vậy, lấy (1) trừ (2) được* $\sqrt{9-(1-x^2y)^2}=\sqrt{4+(x-y)^2}+(y^2-x^3)^2+1$ *thì ý tưởng quá rõ ràng.*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}9-(1-x^2y)^2\ge 0\\ 2x^3y^2+x^4-x^6\ge 0\end{cases}$.

Lấy $(1)-(2)\Rightarrow\sqrt{9-(1-x^2y)^2}-\sqrt{4+(x-y)^2}=y^4-2x^3y^2+x^6+1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{9-(1-x^2y)^2}=\sqrt{4+(x-y)^2}+(y^2-x^3)^2+1 \quad (3)$$

Ta có: $\begin{cases}VT_{(3)}=\sqrt{9-(1-x^2y)^2}\le 3\\ VP_{(3)}=\sqrt{4+(x-y)^2}+(y^2-x^3)^2+1\ge 3\end{cases}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}(1-x^2y)^2=0\\ (x-y)^2=0\\ (y^2-x^3)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của hệ là $(x;y)=(1;1)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN VỀ PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

BT 644. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+\sqrt{x^2+4})(y+\sqrt{y^2+1})=2\\ 12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1}\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học năm 2014 lần I – Chuyên Amsterdam – Hà Nội

BT 645. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-3)(x+4)=y(y-7)\\ \dfrac{y^2}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{2-y}}\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học năm 2014 – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

BT 646. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2+2y(x+1)+x^2-2x+1=0\\ \sqrt[4]{y+1}-\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y+2}=x\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 647. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}=0\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 648. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^3+3y=x^3+3x^2+6x+4\\ \sqrt{1-x^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 649. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^3-3x+(y-1)\sqrt{2y+1}=0\\ 2x^2+x+\sqrt{-y(2y+1)}=0\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học năm 2014 – Đề số 2 – Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ

BT 650. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0\\ 4x^2-8x+2y^3+y^2=2y-3\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 651. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0\\ \sqrt[3]{x+2}+2\sqrt{y+2}=5\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 652. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2}\\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi cấp trường – Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai 2013

BT 653. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x\sqrt{8x-4}-12y^2-5=4y^3+13y+\sqrt{18x-9}\\ 4x^2-8x+4\sqrt{2x-1}+2y^3+7y^2+2y=0\end{cases}$

Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2014 – Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

BT 654. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13\end{cases}$

BT 655. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2102-3x)\sqrt{4-x}+(6y-2009)\sqrt{3-2y}=0\\ 2\sqrt{7x-8y}+3\sqrt{14x-18y}=x^2+6x+13\end{cases}$

BT 656. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}\\ \sqrt{2y^2+1}-y=2-x\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Triệu Sơn 4 – Thanh Hóa

BT 657. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2x.(1+\sqrt{x^2+1})=y+\sqrt{1+y^2}\\ \dfrac{4y-1}{\sqrt{1+3y}+\sqrt{2-y}}+4\sqrt{\dfrac{1}{xy}+3}=\dfrac{1}{xy}+8\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 658. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+xy^2=y^6+y^4\\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{y^2+3}=4\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Học sinh giỏi tỉnh Quảng Bình vòng 2 năm 2012

BT 659. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2y+y^3=x^6+2x^4\\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 660. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-x^2y=x^2-x+y+1\\ x^3-9y^2+6(x-3y)-15=\sqrt[3]{6x^2+2}\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 661. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y\\ y+1=2x^2+2xy\sqrt{1+x}\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Thuận Thành số 3 – Bắc Ninh

BT 662. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-3)\sqrt{2-x}+y^3+y\\ x^3+3y^2-6=\sqrt{x+2}\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Đề nghị Olympic 30/04/2014 – Chuyên Bắc Quảng Nam – Quảng Nam

BT 663. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-y^2+2\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+y^3=2y\sqrt{y-1}.(x+\sqrt[3]{x})\\ x^4+\sqrt{x^3-x^2+1}=x.(y-1)^3+1\end{cases}$.

Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 448

BT 664. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=(y-x)(xy+2)\\ x^2+y^2=2\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 445

BT 665. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3-2x^2y-x^4y^2}+x^4(1-2x^2)=y^4\\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=x^3(x^3-x+2y^2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 666. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4+\sqrt{x+y-1}=\sqrt{x+1}+\sqrt{3y+6} \\ \sqrt{x^3+x^2+4x+4}=8-\sqrt{x^2+4}.\sqrt{3y+6} \end{cases}$

BT 667. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6\sqrt{x^3-6x+5}=\left(x+2-\dfrac{6}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right) \\ \sqrt{x}+\sqrt{10-x}=y^2 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

BT 668. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy}=4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)\left(x+y\right)-1} \\ \sqrt{\left(x-\sqrt{xy+3x}\right)^2+2\left(x+y+3\right)}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases}$

BT 669. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y+1)(x+y+xy+1)=12xy \\ y\sqrt{3x-2x^2-1}+x\sqrt{1+y-2y^2}+xy=1 \end{cases}$

BT 670. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x}+y}-\dfrac{x}{(y+\sqrt{x})^2}=\dfrac{y^4}{(x+y^2)^2} \\ \sqrt{y+\sqrt{x-1}}=32(x-2y+1)\sqrt{2y-2} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

§5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ



① **Hệ đối xứng loại I**

Biến đổi về tổng – tích và dùng điều kiện có nghiệm: $S^2 \geq 4P$ (rất ít) hoặc dùng khảo sát hàm số.

② **Hệ đối xứng loại II**

Lấy vế trừ vế để chứng minh $y = x$, rồi thế vào một phương trình và lúc này ta thường dùng khảo sát hàm số.

③ **Hệ đẳng cấp**

Đặt $x = t.y$, lập tỉ số và khảo sát hàm số $f(t)$ nếu độc lập được m.

④ **Một số hệ chứa tham số loại khác**

Nếu gặp những hệ phương trình chứa tham số không có dạng chuẩn như trên, ta thường dùng những ý tưởng sau để giải:

— Nếu dễ dàng rút được biến này theo biến kia từ phương trình không chứa tham số và thế vào phương trình còn lại. Lúc đó đưa về bài toán tìm tham số trong phương trình.

— Chọn một phương trình không chứa tham số để giải (đẳng cấp, đặt ẩn phụ, bậc hai, hàm số,…) $\Rightarrow$ mối liên hệ giữa x và y. Thế vào phương trình còn lại, đưa về bài toán tìm tham số trong phương trình.

— Tìm mối liên hệ để đặt ẩn phụ thích hợp và khảo sát hàm số.

— Sử dụng điều kiện cắt nhau, tiếp xúc,… trong hình học nếu hai phương trình trong hệ có dạng đặc biệt (dạng đường thẳng, đường tròn, elip).

✍ **Lưu ý**.

— Cần nắm vững dấu hiệu nhận dạng các loại hệ phương trình cơ bản.

— Cũng giống như phương trình, ta cần tìm điều kiện chính xác cho x, y và biện luận mối tương quan khi đặt ẩn phụ nếu yêu cầu hệ có n cặp nghiệm.

Hệ đối xứng loại I và đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I

Ví dụ 514. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$, (i) có nghiệm thực ?

Lời giải. Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = m \\ S - P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S - 1 \\ S^2 - 2S + 2 - m = 0 \end{cases}$ $(*)$

Để $(*)$ có nghiệm thì $\Delta'_{(*)} = m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$. Khi đó hai nghiệm của phương trình $(*)$ là: $\left[\begin{array}{l} S = 1 - \sqrt{m-1} \Rightarrow P = -\sqrt{m-1} \\ S = 1 + \sqrt{m-1} \Rightarrow P = \sqrt{m-1} \end{array}\right.$.

Để hệ (i) có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 \geq 4P \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + 2\sqrt{m-1} \geq 0 \\ m - 2\sqrt{m-1} \geq 0 \end{array}\right.$ luôn đúng $\forall m \geq 1$.

Kết luận: $m \geq 1$ thì hệ đã cho có nghiệm.

Ví dụ 515. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + y^2x = m + 1 \end{cases}$ (i) có nghiệm thực ?

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = m + 2 \\ SP = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m + 2 - S \\ S^2 - (m+2)S + m + 1 = 0, \ (*) \end{cases}$

Để $(*)$ có nghiệm thì: $\Delta_{(*)} = m^2 \geq 0, \ \forall m \in \mathbb{R}$ và khi đó hai nghiệm của $(*)$ là:

$S = m + 1 \Rightarrow P = 1$ hoặc $S = 1 \Rightarrow P = m + 1.$

Để hệ (i) có nghiệm thì $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)^2 - 4 \geq 0 \\ 1 - 4(m+1) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{4}$ hoặc $m \geq 3.$

Kết luận: Các giá trị m cần tìm là $m \leq -\dfrac{3}{4}$ hoặc $m \geq 3.$

Ví dụ 516. Tìm tham số m để hệ: $\begin{cases} x + xy + y = 2m + 1 \\ xy(x+y) = m^2 + m \end{cases}$ (i) có nghiệm duy nhất ?

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = 2m + 1 \\ SP = m^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2m + 1 - S \\ S^2 - (2m+1)S + m^2 + m = 0, \ (*) \end{cases}$

Để $(*)$ có nghiệm $\Delta_{(*)} = 1 > 0$: luôn đúng và khi đó nghiệm của (i) là:

$S = m \Rightarrow P = m + 1$ hoặc $S = m + 1 \Rightarrow P = m.$

Hệ (i) là hệ đối xứng. Nếu $(x;y)$ là một cặp nghiệm hệ thì $(y;x)$ cũng là một nghiệm của hệ $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow S^2 = 4P \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 2 \pm 2\sqrt{2}.$

- Với $m = 1,$ suy ra: $\begin{cases} S = 1 \\ P = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$ nên có $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ là cặp nghiệm duy nhất nên nhận giá trị $m = 1.$

- Với $m = 2 \pm 2\sqrt{2},$ suy ra các hệ phương trình:

  $\begin{cases} x + y = 2 + 2\sqrt{2} \\ xy = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 2 - 2\sqrt{2} \\ xy = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 + \sqrt{2} \\ x = y = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right..$

  Do đó hệ không có nghiệm duy nhất nên sẽ loại giá trị $m = 2 \pm 2\sqrt{2}.$

Kết luận: $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Nhận xét. *Qua các ví dụ trên, ta rút ra được kinh nghiệm: Hệ đối xứng loại I, nếu độc lập được tham số m thì sử dụng phương pháp hàm số hoặc* $S^2 \geq 4P.$ *Còn nếu không độc lập được nên sử dụng điều kiện có nghiệm* $S^2 \geq 4P.$

Ví dụ 517. Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ xy(x+1)(y+1)=m \end{cases}$ (i) có ít nhất một nghiệm ?

Lời giải. Ta có hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)+(y^2+y)=8 \\ (x^2+x)(y^2+y)=m \end{cases}$ (ii)

Đặt $a=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge -\frac{1}{4}$ và $b=y^2+y=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge -\frac{1}{4}\cdot$

$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ ab=m \end{cases} \Rightarrow a(8-a)=m,\ (*)$. Do $b=8-a\ge -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le a\le \frac{33}{4}\cdot$

Để (i) có ít nhất 1 nghiệm thì $(*)$ phải có ít nhất 1 nghiệm $a\in\left[-\frac{1}{4};\frac{33}{4}\right]\cdot$

Xét hàm số $f(a)=a.(8-a)=8a-a^2$ trên $\left[-\frac{1}{4};\frac{33}{4}\right]$ có $f'(a)=8-2a.$

Cho $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=4$. Suy ra: $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};\frac{33}{4}\right]} f(a)=\min\left\{f\left(-\frac{1}{3}\right);f\left(\frac{33}{4}\right);f\left(4\right)\right\}=-\frac{33}{16}$ và

$\max\limits_{\left[-\frac{1}{4};\frac{33}{4}\right]} f(a)=\max\left\{f\left(-\frac{1}{3}\right);f\left(\frac{33}{4}\right);f\left(4\right)\right\}=16.$

Để $(*)$ có ít nhất một nghiệm $a\in\left[-\frac{1}{4};\frac{33}{4}\right] \Leftrightarrow \min\limits_{\left[-\frac{1}{4};\frac{33}{4}\right]} f(a)\le m\le \max\limits_{\left[-\frac{1}{4};\frac{33}{4}\right]} f(a)$

Suy ra: $-\frac{33}{16}\le m\le 16$. **Kết luận**: $m\in\left[-\frac{33}{16};16\right]$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 518. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y}+\sqrt{x-1}=2 \\ x^2+y^2-2x=3m+2 \end{cases}$ (i) có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1;\ y\ge 0$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y}=2 \\ (x-1)^2+y^2=3m+3 \end{cases}$ (ii)

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x-1}\ge 0 \\ b=\sqrt{y}\ge 0 \end{cases}$ thì $(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 & (1) \\ a^4+b^4=3m+3 & (2) \end{cases}$

Từ (1), suy ra: $b=2-a\ge 0 \Leftrightarrow a\le 2$ và có $a\ge 0$ nên $a\in\left[0;2\right]$.

Thế $b=2-a$ vào $(2) \Leftrightarrow a^4+(2-a)^4=3m+3,\ (*)$ với $a\in\left[0;2\right]$.

Để hệ (i) có nghiệm thì phương trình $(*)$ phải có nghiệm $a\in\left[0;2\right]$.

Xét hàm số $f(a)=a^4+(2-a)^4$ trên $\left[0;2\right]$ có $f'(a)=4a^3-4(2-a)^3$.

Cho $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=1$ và có bảng biến thiên sau:

a	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(a)$	//////		$-$	0	$+$		//////
$f(a)$	//////	16	$\searrow$	2	$\nearrow$	16	//////

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $2 \le 3m+3 \le 16 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le m \le \dfrac{13}{6}\cdot$

Ví dụ 519. Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$ (i) có nghiệm thực ?

Đại học khối D năm 2011

Lời giải. Ta có hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-x)(2x-y)=m \\ (x^2-x)+(2x-y)=1-2m \end{cases}$ (ii). Đặt $\begin{cases} a=x^2-x \\ b=2x-y \end{cases}$.

Do $a=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} \ge -\dfrac{1}{4}$, suy ra: $a \in \left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$ nên $(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} ab=m & (1) \\ a+b=1-2m & (2) \end{cases}$

Từ (2), suy ra: $b=1-2m-a$, và thế vào $(1) \Leftrightarrow a-a^2=m(2a+1) \Leftrightarrow m=\dfrac{-a^2+a}{2a+1}\cdot$

Xét hàm số $f(a)=\dfrac{-a^2+a}{2a+1}$ có $f'(a)=\dfrac{-2a^2-2a+1}{(2a+1)^2}=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\cdot$

a	$-\infty$	$-\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(a)$	//////		$+$	0	$-$	
$f(a)$	//////	$-\dfrac{5}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \le \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot$

Ví dụ 520. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^3+(y+2)x^2+2xy=-2m-3 \\ x^2+3x+y=m \end{cases}$ (i) có nghiệm thực ?

Học sinh giỏi tỉnh Long An (bảng A) năm 2012

Lời giải. Ta có hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+2x)(x+y)=-2m-3 \\ (x^2+2x)+(x+y)=m \end{cases}$ (ii)

Đặt $\begin{cases} a=x^2+2x=(x+1)^2-1 \ge -1 \\ b=x+y \end{cases}$ với $\begin{cases} a \in [-1;+\infty) \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$.

$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -2m - 3 \\ a + b = m \end{cases}$, suy ra: $m = \dfrac{a^2 - 3}{a + 2}$ $(*)$

Xét hàm số $f(a) = \dfrac{a^2 - 3}{a + 2}$ trên $[-1; +\infty)$ có: $f'(a) = \dfrac{a^2 + 4a + 3}{(a+2)^2} \geq 0,\ \forall a \geq -1.$

Do đó hàm số $f(a)$ luôn đồng biến trên $[-1; +\infty)$. Suy ra: $f(a) \geq f(1) \geq -2.$

Kết luận: Để hệ có nghiệm thì $m \geq f(a) \geq -2 \Leftrightarrow m \geq -2.$

Ví dụ 521. Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} x^3 + \dfrac{1}{y^3} + y^3 + \dfrac{1}{x^3} = 15m - 10 \\ x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 5 \end{cases}$ (i) có nghiệm ?

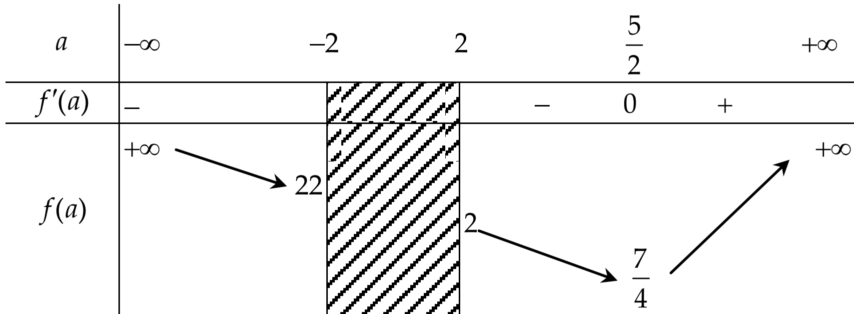
Đại học khối D năm 2007

Lời giải. Điều kiện: $x; y \neq 0$. Đặt $a = x + \dfrac{1}{x};\ b = y + \dfrac{1}{y}$ với $|a| \geq 2;\ |b| \geq 2.$

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 - 3(a+b) = 15m - 10 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 8 - m \end{cases} \Rightarrow m = a^2 - 5a + 8$ $(*)$

Để hệ phương trình (i) có nghiệm thì phương trình $(*)$ có nghiệm $|a| \geq 2.$

Xét $f(a) = a^2 - 5a + 8$ trên $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ có $f'(a) = 2a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{5}{2}\cdot$



Kết luận: Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m \in \left[\dfrac{7}{4}; 2\right] \cup [22; +\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 522. Tìm tham số m để hệ: $\begin{cases} m.(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ m.(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (m-1).\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$ (i)

có nghiệm thực ?

Lời giải.

- Nếu $m = 0$ thì hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ -\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ (α)

- Nếu $m \neq 0,$ đặt $t = \sqrt[3]{x}$ thì hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} m.(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 \\ m.(t^8 + t^6 + t^2 + 1) + (m-1)t^4 = 2yt^4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m.(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 & (1) \\ m.(t^8 + t^6 + t^4 + yt^3 + 1) = (2y+1)t^4 & (2) \end{cases} \quad (ii)$$

- Vì $t = 0$ không là nghiệm của hệ nên chia hai vế (1) cho t^3 và (2) cho t^4:

$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} m\left(t^3 + \dfrac{1}{t^3} + t + \dfrac{1}{t}\right) = y \\ m\left(t^4 + \dfrac{1}{t^4} + t^2 + \dfrac{1}{t^2} + 1\right) = 2y + 1 \end{cases}$ $(*)$ và đặt $a = t + \dfrac{1}{t}$ với $|a| \geq 2$ thì hệ:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m(a^3 - 2a) = y \\ m(a^4 - 3a^2 + 1) = 2y + 1 \end{cases} \Rightarrow m(a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 4a + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} = a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 4a + 1 \qquad (3)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm a thỏa mãn $|a| \geq 2.$

Xét hàm số $f(a) = a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 4a + 1$ trên $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ có:

$f'(a) = 4a^3 - 6a^2 - 6a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ hoặc $a = \dfrac{1}{2}$ hoặc $a = -1.$

a	$-\infty$		-2	//////	2		$+\infty$
$f'(a)$		$-$		//////		$+$	
$f(a)$	$+\infty$	$\searrow$	13	//////	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $\dfrac{1}{m} \geq -3 \Leftrightarrow \dfrac{1+3m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{1}{3}$ hoặc $m > 0$ $\quad (\beta)$

Kết luận: Từ $(\alpha), (\beta),$ suy ra: $m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right] \cup [0; +\infty)$ sẽ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 523. Tìm tham số m để hệ phương trình: $\begin{cases} 49y^2 + x^2 + 4m = 2x - 1 \\ \sqrt{7|y|} = 1 - \sqrt{|x-1|} \end{cases}$ (i) có đúng bốn cặp nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải. Ta có hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7|y|} = 1 - \sqrt{|x-1|} \\ 49y^2 + (x-1)^2 + 4m = 0 \end{cases}$ (ii) và đặt $\begin{cases} a = \sqrt{|x-1|} \geq 0 \\ b = \sqrt{7|y|} \geq 0 \end{cases}.$

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ a^4 + b^4 + 4m = 0 \end{cases} \Rightarrow a^4 + (1-a)^4 = -4m \qquad (*)$$

Do $b \geq 0 \Rightarrow b = 1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$ và có $a \geq 0$ nên $a \in [0; 1]$.

Ứng với mỗi $a,b \in [0;1]$ thì hệ (i) có hai cặp nghiệm $(x;y)$.

Để (i) có đúng bốn cặp nghiệm thực phân biệt thì $(*)$ phải có đúng hai nghiệm thực phân biệt $a \in [0;1]$.

Xét hàm số $f(a) = a^4 + (1-a)^4$ trên $[0;1]$ có $f'(a) = 4a^3 - 4(1-a)^3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\cdot$

a	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(a)$	//////		$-$	0	$+$		//////
$f(a)$	//////	1	↘	$\frac{1}{8}$	↗	1	//////

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $\frac{1}{8} < -4m \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le m < -\frac{1}{32}\cdot$

Hệ đối xứng loại II

Ví dụ 524. Tìm m để hệ: $\begin{cases} y^3 = x^2 + 4y^2 + my & (1) \\ x^3 = y^2 + 4x^2 + mx & (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

Lời giải. Lấy $(1)-(2) \Rightarrow (y-x)\left[x^2 + xy + y^2 - 3(x+y) + m\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = y$ hoặc $f(x) = x^2 + xy + y^2 - 3(x+y) + m = 0 \qquad (i)$

Với $x = y$ thì $(1) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x^2 - 5x - m = 0, \qquad (ii) \end{array}\right.$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì (ii) vô nghiệm và (i) cũng phải vô nghiệm.

Để (ii) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 25 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{25}{4}\cdot$

Với $m > \frac{25}{4}$ thì $f(x) = x^2 + (y-3)x + y^2 - 3y + m = 0$ có

$\Delta'_x = -3(y-1)^2 + 12 - 4m < 0,\ \forall m > \frac{25}{4}$ nên $f(x) > 0 \Rightarrow (i)$: vô nghiệm.

Kết luận: $m > \frac{25}{4}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 525. Tìm tham số m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = m+1 & (1) \\ \sqrt{y} + \sqrt{1-x} = m+1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x; y \le 1$.

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{y} - \sqrt{1-y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}-\sqrt{1-t}$ trên $[0;1]$ có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}>0;\ \forall t\in(0;1)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Suy ra: $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Thế vào $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{1-x}=m+1$ $\quad(*)$

Để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ trên $[-1;0]$ có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	//////		+	0	−		//////
$f(x)$	//////	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	//////

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m+1=\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}-1$.

Ví dụ 526. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x-1}+3y=m\sqrt{2}\\ \sqrt{y-1}+3x=m\sqrt{2}\end{cases}$ (i) có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 1\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x-1}\ge 0\\ b=\sqrt{y-1}\ge 0\end{cases}$ thì $(i)\Leftrightarrow\begin{cases}a+3(b^2+1)=m\sqrt{2}\\ b+3(a^2+1)=m\sqrt{2}\end{cases}$

$\Rightarrow (a-b)(3a+3b-1)=0\Leftrightarrow a=b$ hoặc $3a+3b-1=0$.

- Khi: $a=b$, suy ra: $3a^2+a+1=m\sqrt{2}$ (1) với $a\ge 0$.
- Khi: $b=\dfrac{1}{3}-a\ge 0$, suy ra: $3a^2-a+\dfrac{10}{3}=m\sqrt{2}$ (2) với $0\le a\le\dfrac{1}{3}\cdot$

Hệ (i) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $a\ge 0$ hoặc (2) có nghiệm $a\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right]\cdot$

- Xét hàm số $f(a)=3a^2+a+1$ trên $[0;+\infty)$ có $f'(a)=6a+1>0,\ \forall a\ge 0$.

  Do đó hàm số $f(a)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

  Suy ra (1) có nghiệm trên $[0;+\infty)\Leftrightarrow m\sqrt{2}\ge \min\limits_{[0;+\infty)} f(a)=f(0)=1\Leftrightarrow m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

- Xét hàm số $g(a)=3a^2-a+\dfrac{10}{3}$ trên $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$ có $g'(a)=6a-1=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{6}\cdot$

  Tính $g(0)=\dfrac{10}{3};\ g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{10}{3};\ g\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{13}{4}\Rightarrow \min\limits_{\left[0;\frac{1}{3}\right]} g(a)=\dfrac{13}{4}$ và $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{3}\right]} g(a)=\dfrac{10}{3}\cdot$

  Suy ra (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \min g(a)\le m\sqrt{2}\le\max g(a)\Leftrightarrow\dfrac{13\sqrt{2}}{8}\le m\le\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\cdot$

Kết luận: Hợp hai trường hợp lại, suy ra giá trị m cần tìm là $m \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 527. Tìm m để hệ: $\begin{cases} \sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{3y^2-y+1}=m \\ \sqrt{3x^2-x+1}+\sqrt{3y^2+y+1}=m \end{cases}$ (i) có nghiệm ?

Lời giải. Lấy vế trừ vế, ta được:

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{3y^2-y+1}=m \quad (1) \\ \sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{3x^2-x+1}=\sqrt{3y^2+y+1}-\sqrt{3y^2-y+1} \Leftrightarrow f(x)=f(y) \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{3t^2+t+1}-\sqrt{3t^2-t+1}$ trên $\mathbb{R}$ có:

$$f'(t)=\frac{3\left(t+\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}}}-\frac{3\left(t-\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}}}=g\left(t+\frac{1}{6}\right)-g\left(t-\frac{1}{6}\right).$$

Xét hàm số $g(z)=\frac{3z}{\sqrt{3z^2+\frac{11}{12}}}$ trên $\mathbb{R}$ có: $g'(z)=\frac{11}{\left(12z^2+\frac{11}{3}\right)\sqrt{3z^2+\frac{11}{12}}}>0,\ \forall z\in\mathbb{R}$.

Do đó $g(z)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $t+\frac{1}{6}>t-\frac{1}{6} \Leftrightarrow g\left(t+\frac{1}{6}\right)>g\left(t-\frac{1}{6}\right)$

$\Leftrightarrow f'(t)=g\left(t+\frac{1}{6}\right)-g\left(t-\frac{1}{6}\right)>0$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$ và thế vào $(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{3x^2-x+1}=m$ $(*)$

Để hệ phương trình (i) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{3x^2-x+1}$ trên $\mathbb{R}$ có:

$$f'(x)=\frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x+1}}+\frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \ge 2$.

Ví dụ 528. Tìm tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}-4=m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}-4=m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \end{cases} ?$$

Lời giải. Điều kiện: $-7 \le x; y \le 11$ và $\dfrac{74}{27} \le m \le \dfrac{10}{3}$.

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow \sqrt{7+x} - \sqrt{11-x} = \sqrt{7-y} - \sqrt{11-y} \Leftrightarrow f(x) = f(y).$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{7+t} - \sqrt{11-t}$ trên $\left[-7;11\right]$ có

$f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{7+t}} + \dfrac{1}{\sqrt{11-t}} > 0,\ \forall t \in \left(-7;11\right) \Rightarrow f\left(t\right)$ tăng trên $\left[-7;11\right]$.

Suy ra: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ và thế vào phương trình (1) được:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4 - 3\sqrt{10-3m}}$ (*)

Để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $x \in \left[-7;11\right]$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4$ trên $\left[-7;11\right]$ có:

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{11-x} - \sqrt{7+x}}{2\sqrt{7+x}.\sqrt{11-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-7		2		11	$+\infty$
$f'(x)$	//////		$+$	0	$-$		//////
$f(x)$	//////	$-4+3\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-4+3\sqrt{2}$	//////

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m - \sqrt{4 - 3\sqrt{10-3m}} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{4 - 3\sqrt{10-3m}} = m - 2 \Leftrightarrow m^4 - 8m^3 + 16m^2 + 27m - 90 = 0$

$\Leftrightarrow (m-3)(m+2)(m^2 - 7m + 15) = 0 \Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = -2.$

Kết luận: So với điều kiện, giá trị m cần tìm là $m = 3.$

Hệ đẳng cấp

Ví dụ 529. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 5 & (1) \\ x^2 + xy + 2y^2 = m & (2) \end{cases}$ có nghiệm ?

Lời giải. Từ $(2) \Leftrightarrow x^2 + xy + 2y^2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{7y^2}{4} = m,$ suy ra: $m > 0.$

Khi $x = 0$ thì hệ đã cho vô nghiệm. Xét $x \ne 0$ và đặt $y = tx$ thì

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2.(3 - 2t - t^2) = 5 \\ x^2(1 + t + 2t^2) = m \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3 - 2t - t^2}{1 + t + 2t^2} = \dfrac{5}{m}$ (*)

Ta có: $x^2(3 - 2t - t^2) = 5$ và để phương trình này có nghiệm thì $3 - 2t - t^2 > 0$

$\Leftrightarrow -3 < t < 1.$ Do đó $t \in (-3;1).$

Để hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm t $\in (-3;1).$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{3 - 2t - t^2}{1 + t + 2t^2}$ trên $\left(-3;1\right)$ có $f'(t) = \dfrac{3t^2 - 14t - 5}{(1 + t + 2t)^2}$

Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3t^2-14t-5}{(1+t+2t)^2}=0 \Leftrightarrow t=5$ (loại) hoặc $t=-\dfrac{1}{3}\cdot$

t	$-\infty$	-3		$-\dfrac{1}{3}$		1	$+\infty$
$f'(t)$	//////	//////	$+$	0	$-$	//////	//////
$f(t)$	//////	//////	$\nearrow$	4	$\searrow$	//////	//////

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $0<\dfrac{5}{m}\le 4 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{5}{4}\cdot$

Ví dụ 530. Tìm tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=8 \\ 2x^2+4xy+5y^2=m^4-4m^3+4m^2-12+\sqrt{105} \end{cases} ?$$

Lời giải. Đặt $k=m^4-4m^3+4m^2-12+\sqrt{105}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy-3y^2=8 \\ 2x^2+4xy+5y^2=k \end{cases}$

Từ phương trình hai, suy ra: $2x^2+4xy+5y^2=2(x+y)^2+3y^2=k$ nên $k>0.$

Do $x=0$ không là nghiệm hệ nên với $x\ne 0$ đặt $y=tx$ thì

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-2t-3t^2)=8 \quad (i) \\ x^2(2+4t+5t^2)=k \quad (ii) \end{cases} \overset{\text{chia}}{\Rightarrow} \frac{1-2t-3t^2}{2+4t+5t^2}=\frac{8}{k} \Leftrightarrow \frac{k}{8}=\frac{2+4t+5t^2}{1-2t-3t^2} \qquad (*)$$

Từ phương trình (i), suy ra: $1-2t-3t^2>0 \Leftrightarrow -1<t<\dfrac{1}{3}\cdot$

Để hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)\cdot$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{5t^2+4t+2}{-3t^2-2t+1}$ trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{2t^2+22t+8}{(-3t^2-2t+1)^2}\cdot$

Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow 2t^2+22t+8=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-11-\sqrt{105}}{2}$ (loại) hoặc $t=\dfrac{-11+\sqrt{105}}{2}\cdot$

t	$-\infty$	-1		$\dfrac{-11+\sqrt{105}}{2}$		$\dfrac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(t)$	//////	//////	$-$	0	$+$	//////	//////
$f(t)$	//////	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{105}-3}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$	//////

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \dfrac{k}{8}\ge \min\limits_{\left(-1;\frac{1}{3}\right)} f\left(t\right)=\dfrac{\sqrt{105}-3}{8} \Leftrightarrow k\ge\sqrt{105}-3.$

Do đó $m^4 - 4m^3 + 4m^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-3)(m^2 - 2m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$.

Kết luận: Để hệ có nghiệm thực thì $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

Ví dụ 531. Tìm tham số m để hệ: $\begin{cases} x^2 + 2mxy + (m+1)y^2 = m & (1) \\ x^2 + (m+1)xy + 2y^2 = 2m - 1 & (2) \end{cases}$ (i) có bốn cặp nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải. Lấy $(1) - (2) \Rightarrow (m-1)xy + (m-1)y^2 = 1 - m \qquad (*)$

- Nếu $m = 1$ thì $(*)$ luôn thỏa $\forall x; y \in \mathbb{R}$ và hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$

  Phương trình $(*)$ luôn thỏa $\forall x; y \in \mathbb{R}$ mà hệ (i) chỉ thỏa khi $y \in [-1;1]$ nên ta loại giá trị $m = 1$.

- Nếu $m \neq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow xy + y^2 = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1+y^2}{y}$ (do $y = 0$ không là nghiệm của phương trình $(*)$).

$(2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1+y^2}{y}\right)^2 - (m+1)(1+y^2) + 2y^2 = 2m - 1 \Leftrightarrow (2-m)y^4 + (2-3m)y^2 + 1 = 0$

Đặt $t = y^2 \geq 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow (2-m)t^2 + (2-3m)t + 1 = 0 \qquad (**)$

Hệ (i) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (**)$ có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 8m - 4 > 0 \\ S = \dfrac{1}{2-m} > 0 \\ P = \dfrac{3m-2}{2-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{4 + 2\sqrt{13}}{9} < m < 2 \text{ (thỏa m} \neq 1)$$

Kết luận: $m \in \left(\dfrac{4+2\sqrt{13}}{9}; 2\right)$ thì hệ có 4 cặp nghiệm thực phân biệt.

Một số hệ loại khác

Ví dụ 532. Tìm m để hệ: $\begin{cases} 3(x+1)^2 + y = m & (1) \\ \sqrt{xy} = 1 - x & (2) \end{cases}$ có ba cặp nghiệm phân biệt ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Lục Ngạn số 1 – Bắc Giang

Lời giải. $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ xy = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ y = \dfrac{1}{x} + x - 2 \end{cases}$ (do $x = 0$ không là nghiệm hệ)

$(1) \Leftrightarrow 3\left(x+1\right)^2 + \dfrac{1}{x} + x - 2 = m \qquad (*)$

Xét hàm số $f\left(x\right) = 3\left(x+1\right)^2 + \dfrac{1}{x} + x - 2$ trên $\left(-\infty;1\right]$ có $f'(x) = \dfrac{6x^3+7x^2-1}{x^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ hoặc $x = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	$-\frac{15}{4}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{20}{3}$	↗	12	

Ứng với mỗi giá trị của $x \in \left(-\infty;1\right]$ thì cho ta một giá trị của y.

Để hệ có ba cặp nghiệm thực phân biệt $(x;y)$ thì $(*)$ phải có 3 nghiệm phân biệt $x \in \left(-\infty;1\right]$. Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m \in \left(-4;-\dfrac{15}{4}\right) \cup \left(\dfrac{20}{3};12\right]$.

Kết luận: $m \in \left(-4;-\dfrac{15}{4}\right) \cup \left(\dfrac{20}{3};12\right]$ thì hệ đã cho có 3 cặp nghiệm phân biệt.

Ví dụ 533. Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 = 16 & (1) \\ 5\sqrt{4y-y^2} = 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} + m & (2) \end{cases}$ có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$ thì $(1) \Leftrightarrow x^3 - 12x = (y-2)^3 - 12(y-2)$

$\Leftrightarrow f(x) = f(y-2)$. Ta có: $0 \le y \le 4,$ suy ra: $-2 \le y - 2 \le 2.$

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^3 - 12t$ trên $\left[-2;2\right]$ có $f'(t) = 3(t^2-4) \le 0;\ \forall t \in \left[-2;2\right]$.

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\left[-2;2\right]$. Suy ra: $f(x) = f(y-2) \Leftrightarrow x = y - 2$.

$(2) \Leftrightarrow 3\sqrt{4-x^2} - 4x^2 = m,\ (*)$. Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $x \in \left[-2;2\right]$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = 3\sqrt{4-x^2} - 4x^2$ trên $\left[-2;2\right]$ có $f'(x) = -x\left(\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}} + 8\right)$.

Cho: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ và ta có: $f(-2)=-16;\ f(2)=-16;\ f(0)=6.$

Suy ra: $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-16$ khi $x=\pm 2$ và $\max\limits_{[-2;2]} f\left(x\right)=6$ khi $x=0.$

Kết luận: Để $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[-2;2]} f(x)\le m\le \max\limits_{[-2;2]} f(x)\Leftrightarrow -16\le m\le 6.$

Ví dụ 534. Tìm m để hệ: $\begin{cases} 2y^3+3y=(4y^3-2xy^3).\sqrt{3-2x}+4y^2+1 & (1)\\ \sqrt[4]{y^2+1}-\sqrt{x}=m & (2)\end{cases}$ có duy nhất một cặp nghiệm thực ?

Lời giải. Điều kiện: $0\le x\le \dfrac{3}{2}\cdot$ Do $y=0$ không là nghiệm nên:

$$(1)\Leftrightarrow 2-\frac{4}{y}+\frac{3}{y^2}-\frac{1}{y^3}=\left[1+(3-2x)\right]\sqrt{3-2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{y}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)^3=\sqrt{3-2x}+(3-2x)\sqrt{3-2x}\Leftrightarrow f\left(1-\frac{1}{y}\right)=f(\sqrt{3-2x}).$$

Xét hàm số $f(t)=t+t^3$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=1+3t^2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $\Rightarrow f\left(1-\dfrac{1}{y}\right)=f(\sqrt{3-2x})\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{y}=\sqrt{3-2x}\Leftrightarrow \begin{cases} y<0\ \vee\ y\ge 1\\ x=1+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2y^2}\end{cases}\cdot$

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt[4]{y^2+1}-\sqrt{1+\frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2}}=m \qquad (*)$$

Ứng với mỗi $y\in\left(-\infty;0\right)\cup\left[1;+\infty\right)$ thì phương trình $x=1+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2y^2}$ cho ta mỗi giá trị của x. Để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm $y.$

Xét hàm số $f\left(y\right)=\sqrt[4]{y^2+1}-\sqrt{1+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2y^2}}$ trên $\left(-\infty;0\right)\cup\left[1;+\infty\right)$ có:

$$f'(y)=\frac{y}{2\sqrt[4]{(y^2+1)^3}}+\frac{y-1}{2y^3\sqrt{1+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2y^2}}} \text{ và } \begin{cases} y\in(-\infty;0)\Rightarrow f'(y)<0\\ y\in(1;+\infty)\Rightarrow f'(y)>0\end{cases}.$$

y	$-\infty$		0	(hatched)	1		$+\infty$
$f'(y)$		$-$				$+$	
$f(y)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$\sqrt[4]{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$	0

Kết luận: Từ bảng biến thiên, suy ra: $m<\sqrt[4]{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 535. Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^2 - 3y + 2 + 2\sqrt{x^2y + 2y} = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 + 4x - y + 1} + \sqrt[3]{2x - 1} = m & (2) \end{cases}$ có đúng một cặp nghiệm thực ?

Lời giải. Điều kiện: $y \geq 0$; $x^2 + 4x - y + 1 \geq 0$.

$(1) \Leftrightarrow 3 \cdot \dfrac{y}{x^2 + 2} - 2\sqrt{\dfrac{y}{x^2 + 2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{y}{x^2 + 2}} = 1 \Leftrightarrow y = x^2 + 2.$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{4x - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} = m \qquad (*)$

Ứng với mỗi giá trị của x thì phương trình $y = x^2 + 2$ cho một nghiệm y. Để hệ có đúng (1) cặp nghiệm thực $\Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm $x \geq \dfrac{1}{4}\cdot$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x - 1} + \sqrt[3]{2x - 1}$ trên $\left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$ có:

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x - 1}} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^2}} > 0,\ \forall x > \dfrac{1}{4}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right)\cdot$

Kết luận: Để $(*)$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \min\limits_{\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)} f\left(x\right) = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot$

Ví dụ 536. Tìm tham số m để hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy + x - y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 2mx - m^2 \end{cases}$ $(*)$ có bốn cặp nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải. Ta có hệ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y + 2)(x - y - 1) = 0 \\ (x - m)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ (x - m)^2 + y^2 = 1 \end{cases} & (i) \\ \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x - m)^2 + y^2 = 1 \end{cases} & (ii) \end{array}\right.$

Hệ có bốn cặp nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow (i)$ có hai cặp nghiệm và (ii) có hai cặp nghiệm không trùng với (i).

Thấy (i) là mối liên hệ tương giao giữa đường thẳng $\Delta_1 : x - y + 2 = 0$ và đường tròn (C) tâm $I(m;0)$, bán kính $R = 1$. Để (i) có hai cặp nghiệm

$\Leftrightarrow$ đường thẳng Δ_1 cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow d(I;\Delta_1) < R$

$\Leftrightarrow \left|m + 1\right| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} - 1 < m < \sqrt{2} - 1.$

Tương tự: $d\left(I;\Delta_2\right) < R \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{2}} < 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}.$

Kết luận: $m \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}-1\right)$ thì hệ đã cho có bốn cặp nghiệm thực phân biệt.

Ví dụ 537. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ (2m+1)x + my + m - 1 = 0 & (2) \end{cases}$. Xác định m để hệ phương trình trên có hai nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải.

Ta có (2) là phương trình đường thẳng $\Delta: (2m+1)x + my + m - 1 = 0$ và phương trình (1) có dạng phương trình đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ có tâm là $O(0;0)$ và bán kính $R = 3$.

Hệ có 2 nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2) \Leftrightarrow \Delta$ cắt (C) tại 2 điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.

Khi đó: $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Leftrightarrow A = MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất khi Δ đi qua tâm O của đường tròn, tức là: $O(0;0) \in \Delta \Leftrightarrow m = 1$.

Kết luận: $m = 1$ sẽ thỏa yêu cầu của bài toán.

Phần 3. GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP RÈN LUYỆN

☆☆☆

BT 1. Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$ (*)

Điều kiện: $4x+5\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{5}{4}\cdot$

Lời giải 1. Lũy thừa sau khi sử dụng casio tìm được nhân tử x^2-2x-1.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-6x-1\ge 0\\(2x^2-6x-1)^2=4x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-6x-1\ge 0\\x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-6x-1\ge 0\\(x^2-2x-1)(x^2-4x+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}\ \vee\ x\le\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}\\x=1\pm\sqrt{2}\ \vee\ x=2\pm\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2}\\x=2+\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1-\sqrt{2},\ x=2+\sqrt{3}.$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ dạng $(ax+b)^n=p\cdot\sqrt[n]{cx+d}+q.x+r$ đưa về hệ.

Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5}\Rightarrow\begin{cases}4y^2-12y+9=4x+5\\2x^2-6x-1=2y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-3y-x+1=0\\x^2-3x-y+1=0\end{cases}$

$$\Rightarrow (y-x)(y+x)-2(y-x)=0\Leftrightarrow(y-x)(y+x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\y=2-x\end{array}\right..$$

- Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{4x+5}=2x-3\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3\ge 0\\x^2-4x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}.$
- Với $y=2-x,$ suy ra: $\sqrt{4x+5}=1-2x\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x\ge 0\\x^2-2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1-\sqrt{2},\ x=2+\sqrt{3}.$

BT 2. Giải phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ (*)

Điều kiện: $x^3-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1.$

Lời giải 1. Lũy thừa sau khi sử dụng casio tìm được nhân tử $x^2-8x+10.$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+5x-1\ge 0\\(2x^2+5x-1)^2=49(x^3-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+5x-1\ge 0\\4x^4-29x^3+21x^2-10x+50=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+5x-1\ge 0\\(4x^2+3x+5)\cdot(x^2-8x+10)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4+\sqrt{6}\\x=4-\sqrt{6}\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=4\pm\sqrt{6}.$

Lời giải 2. Biến đổi về dạng đẳng cấp: $a.f(x)+b.g(x)=c.\sqrt{f(x)\cdot g(x)}.$

$(*) \Leftrightarrow 3\cdot(x-1)+2\cdot(x^2+x+1)=7\cdot\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$ và chia cho $x^2+x+1>0$

$\Leftrightarrow 3.\dfrac{x-1}{x^2+x+1}-7.\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}}+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}}=2$ hoặc $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}}=\dfrac{1}{3}\cdot$

- Với $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}}=2 \Leftrightarrow x-1=4(x^2+x+1) \Leftrightarrow 4x^2+3x+5=0:$ vô nghiệm.
- Với $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 9(x-1)=x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2-8x+10=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{6}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=4\pm\sqrt{6}.$

BT 3. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2-42x+49}-1=3\sqrt{x^2-6x+6}$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{9x^2-42x+49}=3\sqrt{x^2-6x+6}+1 \Leftrightarrow 9x^2-42x+49=(3\sqrt{x^2-6x+6}+1)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-6x+6}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1\geq 0\\3x^2+2x-5=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 4. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+10x+8}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+10x+8\geq 0\\x^2-1\geq 0\\2x+2\geq 0 \quad ?!\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x\geq 1\end{array}\right.$.

Nhận thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình $(*)$.

Với $x\geq 1,$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{2(x+1)(x+4)}+\sqrt{(x-1)(x+1)}=2(x+1)$ và do $x\geq 1$ nên

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+8}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+6x-8}=x-3:$ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1.$

BT 5. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x^2-4x+1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}2x^2-3x+1\geq 0\\x^2+x-2\geq 0\\3x^2-4x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -2\\x\geq 1\end{array}\right.$.

$(*) \Leftrightarrow 3x^2-2x-1+2\sqrt{(x-1)^2(2x-1)(x+2)}=3x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2(2x-1)(x+2)}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases}1-x\geq 0\\(x-1)^2(2x-1)(x+2)=(x-1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 1\\(x-1)^2\cdot(2x^2+3x-3)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}$.

BT 6. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0 \qquad (*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=-\sqrt[3]{x+3}\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2})^3=-(\sqrt[3]{x+3})^3$

$\Leftrightarrow 2x+3+3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}.(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2})=-(x+3) \qquad (**)$

Thế $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=-\sqrt[3]{x+3}$ vào $(**)$, suy ra: $3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}=3(x+2)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)^3\Leftrightarrow (x+2)\left[(x+1)(x+3)-(x+2)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+2).(-1)=0\Leftrightarrow x=-2.$

Kết luận: Thế $x=-2$ vào $(*)$ thỏa nên nghiệm phương trình là $x=-2.$

BT 7. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}.$

Lời giải. Điều kiện: $x\le-\dfrac{\sqrt2}{2}$ hoặc $x\ge\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-3x-2}$

$\Rightarrow(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2})^2=(\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-3x-2})^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{(2x^2-1)(x^2-x+2)}=\sqrt{(2x^2+2x+3)(x^2-3x-2)}$

$\Leftrightarrow(2x^2-1)(x^2-x+2)=(2x^2+2x+3)(x^2-3x-2)\Leftrightarrow x^3+5x^2+7x+2=0$

$\Leftrightarrow(x+2)(x^2+3x+1)=0\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=\dfrac{-3\pm\sqrt5}{2}$.

Kết luận: So điều kiện và thế vào $(*)$, suy ra nghiệm là $x=-2,\ x=\dfrac{-3-\sqrt5}{2}$.

BT 8. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2} \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge0.$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}\Rightarrow(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2})^2=(\sqrt{4x}-\sqrt{x+3})^2$

$\Leftrightarrow 5x+3-2\sqrt{(3x+1)(2x+2)}=5x+3-2\sqrt{4x(x+3)}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(3x+1)(2x+2)}=\sqrt{4x(x+3)}\Leftrightarrow 6x^2+8x+2=4x^2+12x\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So điều kiện và thế vào $(*)$, suy ra nghiệm là $x=1.$

BT 9. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-4x+3} \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}-1\le x\le1\\ x\ge3\end{array}\right.$.

$$(*) \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{x^3-3x^2-x+3}{x+3}} - \sqrt{x+3}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{x+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x+3} + x + 3 = (x-1)(x-3) + (x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x^2-1)}{x+3} = x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Kết luận: So điều kiện và thế vào $(*)$ thì không thỏa nên $(*)$ vô nghiệm.

BT 10. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{8x^3-1}{2x+3}} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{4x^2+2x+1} - \sqrt{2x+3}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*) \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{8x^3-1}{2x+3}} + \sqrt{2x+3}\right)^2 = \left(\sqrt{4x^2+2x+1} + \sqrt{2x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x^3-1}{2x+3} + 2x + 3 + 2\sqrt{8x^3-1} = 4x^2 + 2x + 1 + 2x - 1 + 2\sqrt{8x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x^3-1}{2x+3} = 4x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow 16x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$$

Kết luận: So điều kiện và thế vào $(*)$ thì nghiệm phương trình là $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

BT 11. Giải phương trình: $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$ $\ (*)\quad (x, y \in \square)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{5}{3}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{10x+1} - \sqrt{9x+4}) + (\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \frac{x-3}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ 0 < \dfrac{1}{\sqrt{10x+1} + \sqrt{9x+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x-2}} = 0 :\ \text{VN}_o,\ \forall x \ge \dfrac{5}{3}\cdot \end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

BT 12. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3(x^2-x-1)} - \sqrt{x^2-3x+4}$

Lời giải. Điều kiện: $x \le -\sqrt{2}$ hoặc $x \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{3(x^2-x-1)} = \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2-3x+4}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}-\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2,\ \text{do}\ \frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}>0.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 13. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-3}$ $\quad(*)\quad(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{3}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4-x}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}}+\frac{4-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}}=0$$

$$\Leftrightarrow(4-x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=4,\ \text{do}\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}}>0,\ \forall x\ge\frac{3}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=4.$

BT 14. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2+5}+x=x^2+1$ $\quad(*)$

Lời giải. Ta có: $(*)\Leftrightarrow(x-1)\sqrt{x^2+5}=x^2-x+1$ $\quad(1)$

Do $x^2-x+1>0$ và $x^2+5>0,$ nên để phương trình có nghiệm thì cần điều kiện kéo theo là $x-1>0\Leftrightarrow x>1.$ Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5}=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5}=x+\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow(\sqrt{x^2+5}-x)=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow\frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}=\frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+5}+x}{5}=x-1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5}=4x-5\Leftrightarrow\begin{cases}4x-5\ge0\\x^2+5=(4x-5)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{5}{4}\\15x^2-40x+20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{5}{4}\\x=2\ \vee\ x=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2.$

BT 15. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+2x-10=\sqrt{2x-3}$ $\quad(*)\quad(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x-3\ge0\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x+2} + 2(5-x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}} - 2(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ 2(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+2}) = 1 \qquad (i) \end{array}\right.$

$(i) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sqrt{(2x-3)(x+2)} = -\dfrac{3}{4} - 3x:$ vô nghiệm $\forall x \geq \dfrac{3}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 5$.

BT 16. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6 \qquad (*) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} = 2(x-3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ 2(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}) = 1 \qquad (i) \end{array}\right.$

Ta có $x \geq \dfrac{3}{2}$, thì $VT_{(i)} = 2(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}) \geq \sqrt{6} > 1 = VP_{(i)}$, nên (i) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

BT 17. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x - 3 \quad (*) \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \leq -1$ hoặc $x \geq -\dfrac{1}{4}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+5x+1} - \sqrt{4x^2-4x+4} = 9x - 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{9x-3}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}} = 9x - 3$

$\Leftrightarrow (9x-3)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ hoặc $\sqrt{4x^2+5x+1} + \sqrt{4x^2-4x+4} = 1 \qquad (**)$

$(**) \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+5x+1} + \sqrt{(2x-1)^2+3} \geq \sqrt{3} > 1$ nên $(**)$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \dfrac{1}{3}\cdot$

BT 18. Giải phương trình: $x + \sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{x+2} \qquad (*) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (x-1) + (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}) = 0 \Leftrightarrow (x-1) + \dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$ do: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} > 0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

BT 19. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+x^2=\sqrt{3x-2}+x+2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}=x^2-x-2\Leftrightarrow\frac{2x-4}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}=(x-2)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}-x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \dfrac{2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}=x+1\quad(i)\end{array}\right.$$

Với $x\ge\dfrac{2}{3}$, suy ra: $\begin{cases}VT_{(1)}=\dfrac{2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}\le\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ VP_{(1)}=x+1\ge\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}>1\end{cases}$ nên (i) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2$.

BT 20. Giải phương trình: $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{x+3}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}}=\frac{x+3}{5}\Leftrightarrow(x+3)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}}-\frac{1}{5}\right)=0$$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}}-\dfrac{1}{5}=0$, do $x\ge\dfrac{2}{3}$ thì $x+3>0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5\Leftrightarrow2\sqrt{12x^2-5x-2}=26-7x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}26-7x\ge0\\ 4.(12x^2-5x-2)=(26-7x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{26}{7}\\ x^2-344x+684=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình cần tìm là $x=2$.

BT 21. Giải phương trình: $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+2}=\dfrac{3x-1}{5}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{4}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{3x-1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{3x-1}{5}\Leftrightarrow(3x-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}}-\frac{1}{5}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ hoặc $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}=5\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=\dfrac{1}{3}$, $x=2$.

BT 22. Giải phương trình: $9(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2})=x+3$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{9.(x+3)}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}}=x+3\Leftrightarrow 9=\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow 2.\sqrt{(4x+1)(3x-2)}=82-7x\Leftrightarrow\begin{cases}82-7x\ge 0\\ x^2-1128x+6732=0\end{cases}\Leftrightarrow x=6.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=6.$

BT 23. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$ (*)

Lời giải. Do vế trái luôn dương nên $(*)$ có nghiệm khi $3x>0\Leftrightarrow x>0.$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{6x}{\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}}=3x,\ (\text{do}:\sqrt{2x^2+3x+5}\ne\sqrt{2x^2-3x+5})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2\\ \sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x\end{cases}\overset{\oplus}{\Leftrightarrow}2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$$

$$\Leftrightarrow 4(2x^2+3x+5)=(3x+2)^2\Leftrightarrow x^2-16=0\Leftrightarrow x=\pm4.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trinh có nghiệm duy nhất $x=4.$

BT 24. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$ (*)

Lời giải. Do vế trái luôn dương nên $(*)$ có nghiệm khi $3x>0\Leftrightarrow x>0.$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{x^2+2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}=3x,\ (\text{do}:\sqrt{2x^2+x+1}\ne\sqrt{x^2-x+1})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\dfrac{x+2}{3}\\ \sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x\end{cases}\overset{\oplus}{\Leftrightarrow}2\sqrt{2x^2+x+1}=\frac{10x+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3.\sqrt{2x^2+x+1}=5x+1\Leftrightarrow 9.(2x^2+x+1)=(5x+1)^2\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1.$

BT 25. Giải phương trình: $\dfrac{3x}{\sqrt{3x+10}}=\sqrt{3x+1}-1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3x+10\ge0\\ 3x+1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge-\dfrac{1}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{3x}{\sqrt{3x+10}}=\frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{3x+10}=\sqrt{3x+1}+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=5\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=0,\ x=5.$

BT 26. Giải phương trình: $\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{3}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{2x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{3}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 0;\ x = \frac{2\sqrt{7}-2}{3}\cdot$

BT 27. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2 - 8x + 1} + 3\sqrt{x^2 - x + 1} = 8 - x$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 9x^2 - 8x + 1 \ge 0 \\ 8 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le \frac{4-\sqrt{7}}{8}$ hoặc $\frac{4+\sqrt{7}}{8} \le x < 8.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{9x^2-8x+1} + \sqrt{9x^2-9x+9} = 8 - x \Leftrightarrow \frac{x-8}{\sqrt{9x^2-8x+1} - \sqrt{9x^2-9x+9}} = 8 - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{9x^2-8x+1} - \sqrt{9x^2-9x+9}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{9x^2-8x+1} + \sqrt{9x^2-9x+9} = 1 \\ \sqrt{9x^2-8x+1} + \sqrt{9x^2-9x+9} = 8 - x \end{cases}$$

$$\overset{\oplus}{\Rightarrow} 2\sqrt{9x^2-9x+9} = 9 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 9 \\ 35x^2 - 18x - 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 6\sqrt{46}}{35}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \frac{9 \pm 6\sqrt{46}}{35}\cdot$

BT 28. Giải phương trình: $\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$ $\quad(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D = \left[-\frac{\sqrt{10}}{2};0\right) \cup \left[\frac{\sqrt{10}}{2};+\infty\right)\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{x} - x\right) + \left(\sqrt{x-\frac{1}{x}} - \sqrt{2x - \frac{5}{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{x} - x\right) + \frac{\left(\frac{4}{x} - x\right)}{\sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{2x-\frac{5}{x}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{x} - x\right)\cdot\left(\overbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{2x-\frac{5}{x}}}}^{>0,\ \forall x \in D}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x} - x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 2.$

BT 29. Giải phương trình: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $2 \le x \le 4.$ Khi đó $(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 1 - \sqrt{x-2} - \sqrt{4-x} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-1)+(1-\sqrt{4-x})+2x^2-6x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}+2x(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3,\ \text{do}\ \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+2x>0,\ \forall x\in[2;4]\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

BT 30. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}+x^4-5x^3+12x^2-15x+3=0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 1$.

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt{3x-2}-2)+(\sqrt{x-1}-1)+x^4-5x^3+12x^2-15x+6=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(x^3-3x^2+6x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x^3-3x^2+6x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2\ \text{hoặc}\ \frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x^3-3x^2+6x-3=0 \qquad (i)$$

Ta có: $\forall x\geq 1,$ thì $\begin{cases} x^3-3x^2+6x-3=(x-1)^3+3x-2>0 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0 \end{cases}$ nên (i) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

BT 31. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$ (*)

Lời giải. Do $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}>0$ nên điều kiện là $3x-5>0\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+12}-4=(\sqrt{x^2+5}-3)+3x-6\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}+3(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x=2\ \text{hoặc}\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=3 \qquad (i)$$

Ta có: $VT_{(i)}=(x+2)\left[\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+12}-1}{(\sqrt{x^2+12}+4)(\sqrt{x^2+5}+3)}\right]<0,\ \forall x>\dfrac{5}{3}$ nên (i) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2$.

BT 32. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x^2+7}+\dfrac{10}{3}\cdot x-4$ (*)

Lời giải. Do $\sqrt{x^2+91} > \sqrt{x^2+7}$ nên (*) có nghiệm khi $\frac{10x}{3} - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+91} - 10) = (\sqrt{x^2+7} - 4) + \frac{10}{3}x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10} = \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}+4} + \frac{10(x-3)}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} - \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4} - \frac{10}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } 0 > (x+3)\cdot\left[\frac{\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2+91} - 6}{(\sqrt{x^2+91}+10)(\sqrt{x^2+7}+4)}\right] - \frac{10}{3} = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

BT 33. Giải phương trình: $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} - 2x^2 + 7x + 2 = 0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $3 \le x \le 5$.

$$(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 2 - \sqrt{x-3} - \sqrt{5-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}.(\sqrt{x-3} - 1) + (1 - \sqrt{5-x}) + 2x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}} + 2x.(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\cdot\left(\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{5-x}} + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Do lượng $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{5-x}} + 2x > 0,\ \forall x \in [3;5]\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$.

BT 34. Giải phương trình: $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2} + x^3 - 5x^2 + 10x - 13 = 0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 5x-1 \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{5}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{5x-1} - 3) + (\sqrt{x+2} - 2) + x^3 - 5x^2 + 10x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\cdot(x-2)}{\sqrt{5x-1}+3} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x-2)\cdot(x^2 - 3x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + \underbrace{x^2 - 3x + 4}_{>0}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

BT 35. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} + 2x^3 + x^2 - 5x - 3 = 0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-2)+(\sqrt{2x-1}-1)+(\sqrt{x+3}-2)+(2x^3+x^2-5x+2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3.(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{2.(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+(x-1)(2x-1)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+(2x-1)(x+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow x=1$, do $\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+(2x-1)(x+2)>0, \forall x\geq\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 36. Giải phương trình: $3x^3-17x^2-8x+9+\sqrt{3x-2}-\sqrt{7-x}=0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3x-2\geq 0\\ 7-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\leq x\leq 7.$

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{3x-2}-4)+(1-\sqrt{7-x})+3x^3-17x^2-8x+12=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3.(x-6)}{\sqrt{3x-2}+4}+\dfrac{x-6}{1+\sqrt{7-x}}+(x-6)(x+1)(3x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-6)\cdot\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{7-x}}+(x+1)(3x-2)\right]=0 \Leftrightarrow x=6.$

Do $\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{7-x}}+(x+1)(3x-2>0,\ \forall x\in\left[\dfrac{2}{3};7\right]\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=6.$

BT 37. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}+x^4-2x^3-3x^2+8x-8=0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3x-2\geq 0\\ x+2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq\dfrac{2}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{3x-2}-2)+(\sqrt{x+2}-2)+x^4-2x^3-3x^2+8x-4=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3.(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}+(x-2)(x-1)^2(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}+(x-1)^2(x+2)\right]=0 \Leftrightarrow x=2.$

Do ta có lượng $\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}+(x-1)^2(x+2)>0,\ \forall x\geq\dfrac{2}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 38. Giải phương trình: $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$ (*)

Lời giải. Điều kiện $x\geq\dfrac{-10}{3}\cdot$ Do $x=\dfrac{-10}{3}$ không là nghiệm nên xét $x>\dfrac{-10}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow x^2+9x+18+2.(1-\sqrt{3x+10})=0 \Leftrightarrow (x+3)(x+6)-\dfrac{6.(x+3)}{1+\sqrt{3x+10}}=0$

$\Leftrightarrow (x+3)\cdot\left(x+6-\dfrac{6}{1+\sqrt{3x+10}}\right)=0 \Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x+6-\dfrac{6}{1+\sqrt{3x+10}}=0.$

Xét hàm số $f(x)=x+6-\dfrac{6}{1+\sqrt{3x+10}}$ xác định và liên tục trên $\left(-\dfrac{10}{3};+\infty\right)$ có:

$f'(x)=1+\dfrac{9}{(\sqrt{3x+10}+1)^2.\sqrt{3x+10}}>0,\ \forall x>-\dfrac{10}{3}\cdot$

Do đó $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left(-\dfrac{10}{3};+\infty\right)\cdot$

Khi đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm và có $f(-3)=0 \Rightarrow x=-3.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=-3.$

BT 39. Giải phương trình: $\dfrac{2(x-1)^2}{(3-\sqrt{7+2x})^2}=x+20 \qquad (*)$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{7}{2}$ và $x\ne 1.$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)^2(3+\sqrt{7+2x})^2}{(3-\sqrt{7+2x})^2(3+\sqrt{7+2x})^2}=x+20 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)^2(3+\sqrt{7+2x})^2}{4(x-1)^2}=x+20$

$\Leftrightarrow (3+\sqrt{7+2x})^2=2x+40 \Leftrightarrow \sqrt{2x+7}=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{9}{2}\cdot$

BT 40. Giải phương trình: $\dfrac{6x^2}{(\sqrt{2x+1}+1)^2}=2x+\sqrt{x-1}+1 \qquad (*)$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\ge 1.$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{6x^2(\sqrt{2x+1}-1)^2}{4x^2}=2x+\sqrt{x-1}+1 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}=x+2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}-\dfrac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2}=\sqrt{2x-1}-\dfrac{3}{2}\\ \sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2x-1}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}+2=\sqrt{2x-1}\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\sqrt{x-1}=x-2\\ \sqrt{2x^2-x-1}=1-3x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10+4\sqrt{5}\\ x=10-4\sqrt{5}\end{array}\right..$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=10\pm 4\sqrt{5}.$

BT 41. Giải phương trình: $\dfrac{8x}{\sqrt{8x+1}-1}=3\sqrt{2x-1}+1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $2x-1\ge 0$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{8x\cdot(\sqrt{8x+1}+1)}{8x}=3\sqrt{2x-1}+1\Leftrightarrow \sqrt{8x+1}=3\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=1$.

BT 42. Giải phương trình: $(x-4)(\sqrt{x+1}+1)^2=x^2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 4$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{(x-4)\cdot\left[(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)\right]^2}{(\sqrt{x+1}-1)^2}=x^2,\ \left(\text{do}: \sqrt{x+1}-1\ne 0,\ \forall x\ge 4\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-4)x^2=x^2(\sqrt{x+1}-1)^2\Leftrightarrow x-4=x+2-2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=3\Leftrightarrow x=8.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=8$.

BT 43. Giải phương trình: $(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+3})(1+\sqrt{x^2+10x+21})=4$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -3$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+3}}\cdot\left[1+\sqrt{(x+3)(x+7)}\right]=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+7}+\sqrt{x+3}=1+\sqrt{(x+3)(x+7)}\Leftrightarrow (\sqrt{x+7}-1)-\sqrt{x+3}(\sqrt{x+7}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+7}-1)(1-\sqrt{x+3})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=1\\ \sqrt{x+7}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-6\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-2$.

BT 44. Giải phương trình: $(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})\cdot(1+\sqrt{x^2+7x+10})=3$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -2$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}}\cdot\left[1+\sqrt{(x+2)(x+5)}\right]=3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}=1+\sqrt{(x+2)(x+5)}\Leftrightarrow (\sqrt{x+5}-1)-\sqrt{x+2}(\sqrt{x+5}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5}-1)\cdot(1-\sqrt{x+2})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=1\\ \sqrt{x+5}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-4\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-1$.

BT 45. Giải phương trình: $(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{1+x}+2x-5)=x$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\cdot(\sqrt{1+x}+2x-5)=x,\ (\text{do } x=0 \text{ không là nghiệm phương trình})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{1+x}-1\Leftrightarrow 2x-5=-1\Leftrightarrow 2x=4\Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

BT 46. Giải phương trình: $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $a=\sqrt[3]{4x-4}$.

$(*)\Leftrightarrow 3.(\sqrt[3]{4x-4}-2)-(2x^2-11x+15)=0\Leftrightarrow \dfrac{12.(x-3)}{a^2+2a+4}-(2x-5)(x-3)=0$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left(\frac{12}{a^2+2a+4}-2x-5\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x-5-\dfrac{12}{a^2+2a+4}=0 \quad (i)\end{array}\right.$$

Với $x>3\Rightarrow a=\sqrt[3]{4x-4}>2$ nên $\begin{cases}2x-5>1\\ \dfrac{12}{a^2+2a+4}<1\end{cases}\Rightarrow 2x-5-\dfrac{12}{a^2+2a+4}>0.$

Với $x<3\Rightarrow a=\sqrt[3]{4x-4}<2$ nên $\begin{cases}2x-5<1\\ \dfrac{12}{a^2+2a+4}>1\end{cases}\Rightarrow 2x-5-\dfrac{12}{a^2+2a+4}<0.$

Do đó phương trình (i) sẽ vô nghiệm khi $x>3$ hoặc $x<3$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

BT 47. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-4}+x+2\sqrt{5x-4}=16$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $5x-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{4}{5}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{3x-4}$.

$(*)\Leftrightarrow 2.(\sqrt[3]{3x-4}-2)+(x-4)+2.(\sqrt{5x-4}-4)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6.(x-4)}{a^2+2a+4}+x-4+\dfrac{10.(x-4)}{\sqrt{5x-4}+4}=0\Leftrightarrow x-4=0\Leftrightarrow x=4.$

Do $\dfrac{6}{(a+1)^2+3}+1+\dfrac{10}{\sqrt{5x-4}+4}>0,\ \forall x\ge\dfrac{4}{5},\ a\in\mathbb{R}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=4$.

BT 48. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$. Đặt $a=\sqrt[3]{x^2+4}$.

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x^2+4}-2)-(\sqrt{x-1}-1)-2x+4=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{a^2+2a+4}-\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-2(x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{a^2+2a+4}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-2=0 \quad (i)\end{array}\right.$$

Với $x\ge 1$, thì $a^2+2a+4=\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+2\sqrt[3]{x^2+4}+4>\sqrt[3]{x^4}+4>x+2$ nên lượng:

$\dfrac{x+2}{a^2+2a+4}<1$, suy ra: $\dfrac{x+2}{a^2+2a+4}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-2<1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-2<0.$

Do đó phương trình (i) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2$.

BT 49. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow 4x^2-4-4\sqrt[3]{x+6}-4\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6}.\left[\sqrt[3]{(x+6)^2}-4\right]+4\sqrt{x-1}.(\sqrt{x-1}-1)+4x^2-5x-6=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+14).\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+4.\sqrt[3]{(x+6)^2}+16}+\frac{4.(x-2)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(4x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[\frac{(x+14).\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+4.\sqrt[3]{(x+6)^2}+16}+\frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}+4x+3\right]=0\Leftrightarrow x=2.$$

Do lượng: $\dfrac{(x+14).\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+4.\sqrt[3]{(x+6)^2}+16}+\dfrac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}+4x+3>0,\ \forall x\ge 1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=2$.

BT 50. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2}-2.\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 7$.

$$(*)\Leftrightarrow 6x-56-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+2(x-4)\sqrt{x-7}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}.(\sqrt[3]{x}-2)+4.(\sqrt[3]{x}-2)+2.(x-4).(\sqrt{x-7}-1)+7x-56=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-8).\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}+\frac{4.(x-8)}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}+\frac{2(x-4)(x-8)}{\sqrt{x-7}+1}+7.(x-8)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-8)\cdot\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}+\frac{2.(x-4)}{\sqrt{x-7}+1}+7\right]=0\Leftrightarrow x=8.$$

Do lượng: $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}+\dfrac{2.(x-4)}{\sqrt{x-7}+1}+7>0,\ \forall x\ge 7.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=8$.

BT 51. Giải phương trình: $3.\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow 3.(\sqrt[3]{x^2}-1)+(\sqrt{x^2+8}-3)-(\sqrt{x^2+15}-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3.(x^2-1)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

$$\text{Do}\ \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}=\dfrac{1+\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}}{(\sqrt{x^2+8}+3)\cdot(\sqrt{x^2+15}+4)}>0\\ \sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1=\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0\end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết luận: Nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-1,\ x=1.$

BT 52. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$ Đặt $a=\sqrt[3]{x+6}.$

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+6}-2)+(x^2-4)+(\sqrt{x-1}-1)=0\Leftrightarrow\frac{x-2}{a^2+2a+4}+x^2-4+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left(\frac{1}{a^2+2a+4}+x+2+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0\Leftrightarrow x=2.$$

Do: $a^2+2a+4=(a+1)^2+3>0\Rightarrow\dfrac{1}{a^2+2a+4}+x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0,\ \forall x\ge 1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=2.$

BT 53. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x+3\ge 0\Leftrightarrow x\ge -3.$ Đặt $a=\sqrt[3]{5x+3}.$

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt{x+3}-2)+(\sqrt[3]{5x+3}-2)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+1}+\frac{5.(x-1)}{a^2+2a+4}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{x+3}+1}+\frac{5}{(a+1)^2+3}\right]=0\Leftrightarrow x=1,\ \text{do}:\frac{1}{\sqrt{x+3}+1}+\frac{5}{(a+1)^2+3}>0.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 54. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt{3x+1}=2-x$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $3x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{3}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{2x-3}.$

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{2x-3}+1)+(\sqrt{3x+1}-2)+x-1=0\Leftrightarrow\frac{2.(x-1)}{a^2-a+1}+\frac{3.(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left(\frac{2}{a^2-a+1}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1\right)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Do: $a^2-a+1=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0\Rightarrow\dfrac{2}{a^2-a+1}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1>0,\ \forall x\ge-\dfrac{1}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 55. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2}+6=\sqrt[3]{5-x}-x$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $a=\sqrt[3]{x+2}$ và $b=\sqrt[3]{5-x}.$

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+2}+1)+(2-\sqrt[3]{5-x})+(x+3)=0\Leftrightarrow\frac{x+3}{a^2-a+1}+\frac{x+3}{b^2+2b+4}+x+3=0$$

$$\Leftrightarrow(x+3)\cdot\left(\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2+2b+4}+1\right)=0\Leftrightarrow x+3=0\Leftrightarrow x=-3.$$

Do ta luôn có: $a^2 - a + 1 = \left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ và $b^2 + 2b + 4 = (b+1)^2 + 3 > 0.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -3.$

BT 56. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+2} + 3x^3 + x^2 + 3x = 0$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $a = \sqrt[3]{3x+2}.$

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+2} - 1) + 3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{a^2+a+1} + (3x+1)(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow (3x+1)\cdot\left(\dfrac{1}{a^2+a+1} + x^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3},$ do: $\dfrac{1}{a^2+a+1} + x^2 + 1 > 0, \ \forall a, x.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{1}{3}\cdot$

BT 57. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+4} + \sqrt{2x+7} + x^2 + 8x + 13 = 0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $2x + 7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{7}{2}\cdot$ Đặt $a = \sqrt[3]{x+4}.$

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+4} - 1) + (\sqrt{2x+7} - 1) + (x^2 + 8x + 15) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{a^2+a+1} + \dfrac{2\cdot(x+3)}{\sqrt{2x+7}+1} + (x+3)\cdot(x+5) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)\cdot\left(\dfrac{1}{a^2+a+1} + \dfrac{2}{\sqrt{2x+7}+1} + x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$

Do ta luôn có lượng: $\dfrac{1}{a^2+a+1} + \dfrac{2}{\sqrt{2x+7}+1} + x + 5 > 0, \ \forall x \ge -\dfrac{7}{2}, \ a \in \mathbb{R}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3.$

BT 58. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt{2x+13} + 4x^2 + 44x + 117 = 0$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $2x + 13 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{13}{2}\cdot$ Đặt $a = \sqrt[3]{2x+1}.$

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+1} + 2) + (\sqrt{2x+13} - 2) + 4x^2 + 44x + 117 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+9}{a^2-2a+4} + \dfrac{2x+9}{\sqrt{2x+13}+2} + (2x+9)(2x+13) = 0$

$\Leftrightarrow (2x+9)\cdot\left[\dfrac{1}{(a-1)^2+3} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+13}+2} + 2x + 13\right] = 0 \Leftrightarrow 2x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{2}\cdot$

Do ta luôn có lượng: $\dfrac{1}{(a-1)^2+3} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+13}+2} + 2x + 13 > 0, \ \forall x \ge -\dfrac{13}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{9}{2}\cdot$

BT 59. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+3} + (x+2)\sqrt{x+3} = \sqrt[3]{6-x} - 3$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x = -2$. Đặt $a = \sqrt[3]{2x+3}$ và $b = \sqrt[3]{6-x}$.

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+3}+1) + (x+2)\cdot(\sqrt{x+3}-1) + (2-\sqrt[3]{6-x}) + (x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2.(x+2)}{a^2+a+1} + \dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{x+3}+1} + \dfrac{x+2}{b^2+2b+4} + (x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)\cdot\left[\dfrac{2}{a^2+a+1} + \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}+1} + \dfrac{1}{b^2+2b+4} + 1\right] = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2.$

Do ta luôn có: $\dfrac{2}{a^2+a+1} + \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}+1} + \dfrac{1}{b^2+2b+4} + 1 > 0,\ \forall x \ge -2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -2$.

BT 60. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-5} + \sqrt[3]{2x-3} + x^3 + x = 2(x^2+1)$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $a = \sqrt[3]{2x-5}$ và $b = \sqrt[3]{2x-3}$.

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-5}+1) + (\sqrt[3]{2x-3}-1) + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2.(x-2)}{a^2-a+1} + \dfrac{2.(x-2)}{b^2+b+1} + (x-2).(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\dfrac{2}{a^2-a+1} + \dfrac{2}{b^2+b+1} + x^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$

Do ta luôn có lượng: $\dfrac{2}{a^2-a+1} + \dfrac{2}{b^2+b+1} + x^2 + 1 > 0,\ \forall a,\ b,\ x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

BT 61. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{x^2-4x-4} + x = 2\sqrt{x-1} - 4$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$. Đặt $a = \sqrt[3]{x^2-4x-4}$.

$(*) \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{x-1}) + 2.(\sqrt[3]{x^2-4x-4}+2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+4}{x+2\sqrt{x+1}} + \dfrac{2.(x^2-4x+4)}{a^2-2a+4} = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)\cdot\left[\dfrac{1}{x+2\sqrt{x+1}} + \dfrac{2}{(a-1)^2+3}\right] = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2.$

Do ta luôn có lượng $\dfrac{1}{x+2\sqrt{x+1}} + \dfrac{2}{(a-1)^2+3} > 0,\ \forall x \ge 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Kết luận: So với điều kiên, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

BT 62. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^3+x^2-4} + \sqrt{2x} = x+2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0$. Đặt $a = \sqrt[3]{x^3+x^2-4}$.

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^3+x^2-4} - x) + (\sqrt{2x}-2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{a^2+ax+x^2} + \dfrac{2.(x-2)}{\sqrt{2x}+2} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\dfrac{x+2}{a^2+ax+x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{2x}+2}\right) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$

Do ta luôn có: $\dfrac{x+2}{a^2+ax+x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x}+2}=\dfrac{x+2}{\left(a+\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{3x^2}{4}}+\dfrac{2}{\sqrt{2x}+2}>0,\ \forall x\ge 0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 63. Giải phương trình: $\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt{2x-1}+x^2+x=2$ $\qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{2}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{-x^2+x-1}.$

$(*)\Leftrightarrow (\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x)+(\sqrt{2x-1}-1)+(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)\cdot(x^2+1)}{a^2-ax+x^2}+\dfrac{2\cdot(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)\cdot(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\dfrac{x^2+1}{a^2-ax+x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x+1\right)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$ Do có:

$\dfrac{x^2+1}{a^2-ax+x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x+1=\dfrac{x^2+1}{\left(a-\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{3x^2}{4}}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x+1>0,\forall x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 64. Giải phương trình: $x^3+2x-(x^2+1)\sqrt{2x-1}=\sqrt[3]{2x^2-x}$ $\qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{2}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{2x^2-x}.$

$(*)\Leftrightarrow \left[x.(x^2+1)-(x^2+1).\sqrt{2x-1}\right]+(x-\sqrt[3]{2x^2-x})=0$

$\Leftrightarrow (x^2+1)(x-\sqrt{2x-1})+(x-\sqrt[3]{2x^2-x})=0\Leftrightarrow \dfrac{(x^2+1)(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{x.(x-1)^2}{x^2+x.a+a^2}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\cdot\left(\dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{x}{x^2+xa+a^2}\right)=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1.$

Do: $x^2+xa+a^2=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2}{4}>0\Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{x}{x^2+xa+a^2}>0,\ \forall x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 65. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+\sqrt{x}+x^2=3$ $\qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0.$ Đặt $a=\sqrt[3]{x^3+x^2-1}.$

$(*)\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-1)+(\sqrt{x}-1)+x^2-1=0\Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2-2}{a^2+a+1}+\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}+x^2-1=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)\cdot(x^2+2x+2)}{a^2+a+1}+\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}+(x-1)\cdot(x+1)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{(x+1)^2+1}{a^2+a+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+x+1\right]=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Do: $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2+1}{a^2+a+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+x+1>0,\ \forall x\ge 0,\ a\in\mathbb{R}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

BT 66. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-10}+\sqrt{x-1}+x^2=x+1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$. Đặt $a=\sqrt[3]{x-10}$.

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x-10}+2)+(\sqrt{x-1}-1)+(x^2-x-2)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{a^2+2a+4}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)\cdot(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[\frac{1}{(a+1)^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+1\right]=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Do lượng $\frac{1}{(a+1)^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+1>0,\ \forall x\ge 1,\ a\in\mathbb{R}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=2$.

BT 67. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt{3-x}=2x+2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 3$. Đặt $a=\sqrt[3]{3x-5}$.

$$(*)\Leftrightarrow(\sqrt[3]{3x-5}+2)+(\sqrt{3-x}-2)=2x+2 \Leftrightarrow \frac{3.(x+1)}{a^2-2a+4}-\frac{x+1}{\sqrt{3-x}+2}-2(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot\left[\frac{3}{(a-1)^2+3}-\frac{1}{\sqrt{3-x}+2}-2\right]=0 \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{3}{(a-1)^2+3}=2+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+2} \quad (i)\end{array}\right.$$

Ta có: $VT_{(i)}=\frac{3}{(a-1)^2+3}\le\frac{3}{3}=1,\ VP_{(i)}=2+\frac{1}{\sqrt{3-x}+2}>2$ nên (i) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

BT 68. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-\frac{4}{3}}+4x=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt{3x}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$. Đặt $a=\sqrt[3]{x-\frac{4}{3}}$ và $b=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}$.

Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên xét $x>0$.

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-\frac{4}{3}}+3x\right)+(4x-\sqrt[3]{x^3+3x^2+2})+(\sqrt{3x}-3x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{81x^3+3x-4}{a^2-3ax+9x^2}+\frac{63x^3-3x^2-2}{16x^2+4xb+b^2}+\frac{3x-9x^2}{\sqrt{3x}+3x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)\cdot(27x^2+9x+4)}{a^2-3ax+9x^2}+\frac{(3x-1)\cdot(21x^2+6x+2)}{16x^2+4xb+b^2}-\frac{3x\cdot(3x-1)}{\sqrt{3x}+3x}=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{27x^2+9x+4}{a^2-3ax+9x^2}+\frac{21x^2+6x+2}{16x^2+4xb+b^2}-\frac{3x}{\sqrt{3x}+3x}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\cdot$$

Do: $\dfrac{3x}{\sqrt{3x}+3x}<\dfrac{3x}{3x}=1$ nên $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{27x^2+9x+4}{a^2-3ax+9x^2}+\dfrac{21x^2+6x+2}{16x^2+4xb+b^2}-\dfrac{3x}{\sqrt{3x}+3x}>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{3}\cdot$

BT 69. Giải phương trình: $x^2+2x=x\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{3x+2}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $4x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{4}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{3x+2}.$

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2+8x-4x\sqrt{4x+1}-4\sqrt[3]{3x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x\cdot\left[(x+1)-\sqrt{4x+1}\right]+\sqrt[3]{3x+2}\cdot\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-4\right]+(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2\cdot(x-2)}{x+1+\sqrt{4x+1}}+\frac{(x-2)\cdot(9x+30)\cdot\sqrt[3]{3x+2}}{a^4+4a^2+16}+(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[\frac{4x^2}{x+1+\sqrt{4x+1}}+\frac{(9x+30)\cdot\sqrt[3]{3x+2}}{(a^2+2)^2+12}+1\right]=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Do ta luôn có: $\dfrac{4x^2}{x+1+\sqrt{4x+1}}+\dfrac{(9x+30)\cdot\sqrt[3]{3x+2}}{(a^2+2)^2+12}+1>0,\ \forall x\ge -\dfrac{1}{4},\ a\in\mathbb{R}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 70. Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x^2+5x+5}=\sqrt{x+2}-3x-2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2+5x+5\ge 0 \\ x+2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{\sqrt{5}-5}{2}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow x^2+3x+2+\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(x+2)+\frac{(x+1)\cdot(x+3)}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot\left(x+2+\frac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}\right)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Do ta luôn có lượng: $x+2+\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}>0,\ \forall x\ge \dfrac{\sqrt{5}-5}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1.$

BT 71. Giải phương trình: $(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)(1+\sqrt{1+x})=x\sqrt{x}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0.$

$(*) \Leftrightarrow (1+\sqrt{1+x})\cdot(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)=(1+\sqrt{1+x})\cdot(\sqrt{1+x}-1)\cdot\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x})=1-\sqrt{x}-x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}=1-\sqrt{x}-x \Leftrightarrow \dfrac{\left[(x-1)^2-\sqrt{x}\right]^2}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}=1-\sqrt{x}-x$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1+\sqrt{x})\cdot(x-1-\sqrt{x})}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+(x-1+\sqrt{x})=0$

$\Leftrightarrow (x-1+\sqrt{x})\cdot\left(\dfrac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ (\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)+(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x})=0 \end{array}\right.$ $(**)$

$(**) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x}$ $(***)$

Ta có: $\begin{cases} VT_{(***)}=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+x-1\ge\sqrt{(1-x)^2}+x-1\ge 1-x+x-1=0 \\ VP_{(***)}=\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x}\le\sqrt{x}-\sqrt{x}=0 \end{cases}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0,$ đó là nghiệm của $(***)$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm là $x=0,\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

BT 72. Giải phương trình: $(x+1)\cdot(2\sqrt{x^2+3}-x^2)+\sqrt[3]{3x^2+5}=5x+3$ $(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $a=\sqrt[3]{3x^2+5}>0$.

$(*) \Leftrightarrow 5x+3-(x+1).(2\sqrt{x^2+3}-x^2)-\sqrt[3]{3x^2+5}=0$

$\Leftrightarrow (x+1).\sqrt{x^2+3}.(\sqrt{x^2+3}-2)+(x+1-\sqrt[3]{3x^2+5})+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x^2-1)\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}+2}+\dfrac{x^3+3x-4}{(x+1)^2+(x+1).a+a^2}+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}+2}+\dfrac{x^2+x+4}{(x+1)^2+(x+1).a+a^2}+1\right]=0 \Leftrightarrow x=1.$

Do có ta luôn có: $\begin{cases} (x+1)^2+(x+1).a+a^2=\left(x+1+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2}{4}>0 \\ x^2+x+4>0 \end{cases}$, $\forall x,\ a\in\mathbb{R}$.

Suy ra: $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}+2}+\dfrac{x^2+x+4}{(x+1)^2+(x+1).a+a^2}+1>0.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bình luận. *Với mọi* $x \in \mathbb{R}$ *thì dấu của nhị thức* $x+1$ *chưa xác định, do đó khi liên hợp và truy ngược dấu cần tạo ra lượng* $(x+1)^2$. *Nghĩa là cụm* $(x+1).\sqrt{x^2+3}$ *cần ghép với bậc nhất khi có 2 nghiệm* $x=\pm 1$ *và sẽ tìm* $ax+b$ *có* $a=0,\ b=2$. *Khi đó ta sẽ cố định lượng* $x-1$ *và thêm bớt để giống với đề bài sẽ viết được* $x+1-\sqrt[3]{3x^2+5}$. *Rõ ràng để thành thạo điều này, ta cần đến kỹ năng truy ngược dấu cũng như việc ghép hằng số hay ghép bậc nhất khi biết trước được nghiệm.*

BT 73. Giải phương trình: $(2+\sqrt{x^2-2x+5})(x+1)+4x\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{x^2-2x+5}$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Phương trình $\Leftrightarrow (x+1)\cdot(2+\sqrt{x^2-2x+5})+2x\cdot(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5})=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(2+\sqrt{x^2-2x+5})+\frac{2x\cdot(3x^2+2x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(2+\sqrt{x^2-2x+5})+\frac{2x\cdot(x+1)\cdot(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+5)}+7x^2-4x+5\right]=0$$

$\Leftrightarrow x=-1$, do: $7x^2-4x+5>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Với $f(x)=4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+5)}+7x^2-4x+5$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

BT 74. Giải phương trình: $3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}=2x+2\sqrt{4x^2-x+1}$ $\quad(*)$

Lời giải. Có: $(*)\Leftrightarrow \sqrt{16x^2-4x+4}-\sqrt{9x^2-4x+4}=3\sqrt[3]{2x^2-x^3}-2x\ge 0$ $\quad(1)$

Do ta luôn có: $\sqrt{16x^2-4x+4}\ge\sqrt{9x^2-4x+4}$ nên $3\sqrt[3]{2x^2-x^3}-2x\ge 0$

Suy ra điều kiện là: $35x^3-54x^2\le 0\Leftrightarrow x^2\cdot(35x-54)\le 0\Leftrightarrow x\le 0$ hoặc $x\le\dfrac{54}{35}\cdot$

- Với $x=0$ thì phương trình luôn thỏa nên $(*)$ có 1 nghiệm là $x=0$.
- Với $x\in\left(0;\dfrac{54}{35}\right]$, chia hai vế của phương trình (1) cho $x>0$, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{16-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{9-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=3\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}-2 \qquad (2)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}-1}$, suy ra: $t^3=\dfrac{2}{x}-1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{t^3+1}{2}\cdot$ Khi đó ta được:

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{t^6+15}-\sqrt{t^6+8}=3t-2>0 \qquad \left(\text{ĐK}: 3t-2>0\Leftrightarrow t>\dfrac{2}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{t^6+15}-4)+(3-\sqrt{t^6+8})=3t-3 \Leftrightarrow \frac{t^6-1}{\sqrt{t^6+15}+4}-\frac{t^6-1}{\sqrt{t^6+8}+3}=3(t-1)$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left[\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}-\frac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}-3\right]=0 \Leftrightarrow t=1, \text{ suy ra: } x=1.$$

Do: $\sqrt{t^6+15}+4>\sqrt{t^6+8}+3 \Rightarrow \dfrac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}<\dfrac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}$.

Suy ra: $\dfrac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+15}+4}-\dfrac{(t^3+1)(t^2+t+1)}{\sqrt{t^6+8}+3}-3<0,\ \forall t>\dfrac{2}{3}$.

- Với $x\in(-\infty;0)$, chia hai vế cho $x<0$, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{16x^2-4x+4}+\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{9x^2-4x+4}=\frac{1}{x}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{2x^2-x^3}-2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{16-4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=3\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}-2 \qquad (3)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}-1}$, suy ra: $t^3=\dfrac{2}{x}-1\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{t^3+1}{2}$. Do $x<0\Rightarrow t^3<-1\Leftrightarrow t<-1$.

$$(3)\Leftrightarrow \sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2=0 \qquad (4)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2$ trên $(-\infty;-1)$, có:

$f'(t)=-3+3t^5\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^6+8}}-\dfrac{1}{\sqrt{t^6+15}}\right)<0,\ \forall t<-1$. Do đó hàm số f (t) nghịch biến trên $(-\infty;-1)$, suy ra: $f(t)=\sqrt{t^6+8}-\sqrt{t^6+15}-3t+2>f(-1)=2$ (5)

Từ (4), (5), suy ra phương trình (4) vô nghiệm.

Hay $x\in(-\infty;0)$, thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0,\ x=1$.

BT 75. Giải phương trình: $\sqrt{2x-11}-\sqrt{2x^2-16x+28}=5-x$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}2x-11\ge 0\\ 2x^2-16x+28\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{11}{2}$.

$$(*)\Leftrightarrow\left[\sqrt{2x-11}-(x-5)\right]+\left[(2x-10)-\sqrt{2x^2-16x+28}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-11-(x-5)^2}{\sqrt{2x-11}+x-5}+\frac{(2x-10)^2-(2x^2-16x+28)}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}}=0$$

(do: $\sqrt{2x-11}+x-5>0$ và $2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}>0,\ \forall x\ge\dfrac{11}{2}$).

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+12x-36}{\sqrt{2x-11}+x-5}+\frac{2x^2-24x+72}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-6)^2}{\sqrt{2x-11}+x-5}+\frac{2(x-6)^2}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2\cdot\left(\frac{2}{2x-10+\sqrt{2x^2-16x+28}}-\frac{1}{\sqrt{2x-11}+x-5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=6 \text{ hoặc } 2\sqrt{2x-11}=\sqrt{2x^2-16x+28}\Leftrightarrow x=6.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=6.$

BT 76. Giải phương trình: $\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}}+6=2\sqrt{\dfrac{x^2+3x-3}{3x+2}}+x^2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}\le x<-\dfrac{2}{3}$ hoặc $x\ge\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow (x^2-5)+2\left(\sqrt{\frac{x^2+3x-3}{3x+2}}-1\right)+\left(1-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5)+\frac{2.(x^2-5)}{3x+2+\sqrt{(3x+2)(x^2+3x-3)}}+\frac{x^2-5}{x^2+4+3\sqrt{x^2+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5)\left[1+\frac{2}{3x+2+\sqrt{(3x+2)(x^2+3x-3)}}+\frac{1}{x^2+4+3\sqrt{x^2+4}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5},\ \text{do: } 1+\frac{2}{3x+2+\sqrt{(3x+2)(x^2+3x-3)}}+\frac{1}{x^2+4+3\sqrt{x^2+4}}>0.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\pm\sqrt{5}.$

BT 77. Giải phương trình: $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}}+1=\dfrac{x^2}{2}+\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+3}}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x>-3.$

$$(*)\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{2}-1\right)+\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+3}}-1\right)+\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{x^2+x+1}{x+3}-1}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+3}}+1}+\frac{x^2-2}{2}+\frac{1-\dfrac{4}{x^2+2}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{(x+3)(x^2+x+1)}+x+3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2+2+\sqrt{x^2+2}}\right]=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

Do ta luôn có: $\dfrac{1}{\sqrt{(x+3)(x^2+x+1)}+x+3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x^2+2+\sqrt{x^2+2}}>0,\ \forall x>-3.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}.$

BT 78. Giải phương trình: $2\sqrt{3x-2}-2(x+1)\sqrt{x+2}=3x^2-8x-4 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $3x-2\ge 0.$

$(*)\Leftrightarrow 3x^2-8x-4+2(x+1)\sqrt{x+2}-2\sqrt{3x-2}=0$

$\Leftrightarrow 2(x+1)\cdot(\sqrt{x+2}-2)+\sqrt{3x-2}\cdot(\sqrt{3x-2}-2)+3x^2-7x+2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cdot(x+1)\cdot(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3\cdot(x-2)\cdot\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+2}+(x-2)\cdot(3x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(\frac{2x+2}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+2}+3x-1\right)=0\Leftrightarrow x=2.$$

Do ta luôn có: $\dfrac{2x+2}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{3\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+2}+3x-1>0,\ \forall x\ge\dfrac{2}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 79. Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{x+1}-(4x+5)\sqrt{2x+3}+6x+23=0 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1.$ Đặt $t=\sqrt{x+1}\ge 0,$ suy ra: $x=t^2-1.$

$(*)\Leftrightarrow t^3+6t^2+t+17-(4t^2+1).\sqrt{2t^2+1}=0$

$\Leftrightarrow (4t^2+1)\cdot\left[\sqrt{2t^2+1}-(t+1)\right]+(t-2)\cdot(3t^2+4t+8)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(4t^2+1)\cdot(t^2-2t)}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+(t-2)\cdot(3t^2+4t+8)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\cdot\left(\frac{4t^3+t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+3t^2+4t+8\right)\Leftrightarrow t=2,\ \text{suy ra: } x=3.$$

Kếtl uận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=3.$

BT 80. Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{3x+6}-2\sqrt{x^2+x-1}+3x^2-10=0 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3x+6\ge 0\\ x^2+x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x\ge\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{3x+6}-3)+2\sqrt{x^2+x-1}(\sqrt{x^2+x-1}-1)+x^2+x-2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{3\cdot(x+2)\cdot(x-1)}{\sqrt{3x+6}+3}+\frac{2\cdot(x^2+x-2)}{\sqrt{x^2+x-1}+1}+(x^2+x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3x+6}+3}+\frac{2}{\sqrt{x^2+x-1}+1}+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right..$$

Do ta luôn có: $\dfrac{3}{\sqrt{3x+6}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+x-1}+1}+1>0,\ \forall x\in$ điều kiện.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=-2,\ x=1.$

BT 81. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}=3x^2+14x+13 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}4x+5\ge 0\\ x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{5}{4}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow (x+1)\cdot(\sqrt{4x+5}-3)+2\cdot(x+5)\cdot(\sqrt{x+3}-2)=3x^2+7x-10$

$\Leftrightarrow \dfrac{4\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\dfrac{2\cdot(x+5)\cdot(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}=(x-1)\cdot(3x+10)$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\dfrac{4\cdot(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\dfrac{2\cdot(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-3x-10\right]=0\Leftrightarrow x=1.$

Do: $\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+3}+\dfrac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-3x-10>\dfrac{4(x+1)}{3}+x+5-3x-10=-\dfrac{2x+11}{6}<0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

BT 82. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{2x+3}+2(3x+1)\sqrt{4x+2}=16x^2+14x+2 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $4x+2\ge 0$.

$(*)\Leftrightarrow (x+1)\cdot(\sqrt{2x+3}-2)+2\cdot(3x+1)\cdot(\sqrt{4x+2}-2)=16x^2-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\cdot(2x-1)}{\sqrt{2x+3}+2}+\dfrac{4\cdot(3x+1)\cdot(2x-1)}{\sqrt{4x+2}+2}-4\cdot(2x-1)\cdot(2x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2x-1)\cdot\left[\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+3}+2}+\dfrac{4\cdot(3x+1)}{\sqrt{4x+2}+2}-8x-4\right]=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Do $\forall x\ge -\dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+3}+2}+\dfrac{4(3x+1)}{\sqrt{4x+2}+2}-8x-4<\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{4(3x+1)}{2}-8x-4<0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

BT 83. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\ 5x+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{3}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow \left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]+\left[\sqrt{5x+4}-(x+2)\right]-3\cdot(x^2-x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-x^2}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\dfrac{x-x^2}{\sqrt{5x+4}+x+2}+3\cdot(x-x^2)=0$

$\Leftrightarrow (x-x^2)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5x+4}+x+2}+3\right)=0\Leftrightarrow x-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Do $\forall x\ge -\dfrac{1}{3}$ thì ta luôn có: $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5x+4}+x+2}+3>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=0,\ x=1$.

BT 84. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+7}-\sqrt{5x+6}+x^2-x-3=0 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2+5x+7\ge 0 \\ 5x+6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{6}{5}$.

$$(*)\Leftrightarrow\left[\sqrt{2x^2+5x+7}-(x+3)\right]+\left[(x+2)-\sqrt{5x+6}\right]+x^2-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{\sqrt{2x^2+5x+7}+x+3}+\frac{x^2-x-2}{\sqrt{5x+6}+x+2}+x^2-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+5x+7}+x+3}+\frac{1}{\sqrt{5x+6}+x+2}+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-1\end{array}\right.$$

Do $\forall x\ge -\dfrac{6}{5}$ thì ta luôn có: $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+5x+7}+x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{5x+6}+x+2}+1>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=-1,\ x=2.$

BT 85. Giải phương trình: $(x^2+3)\cdot\sqrt{x^2-x+1}=x^3+3x^2-4x+1$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x^3+3x^2-4x+1>0.$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=\frac{x^3+3x^2-4x+1}{x^2+3}\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2-x+1}-(x+3)\right]+\frac{7x+8}{x^2+3}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-(7x+8)}{\sqrt{x^2-x+1}+x+3}+\frac{7x+8}{x^2+3}=0 \text{ (do: } \sqrt{x^2-x+1}+x+3=0 \text{ vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow(7x+8)\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+x+3}+\frac{1}{x^2+3}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{8}{7}\ \vee\ \sqrt{x^2-x+1}=x^2-x$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{8}{7}\ \vee\ x^2-x=\frac{1+\sqrt5}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{8}{7}\ \vee\ x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt5}}{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=-\dfrac{8}{7},\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt5}}{2}$.

BT 86. Giải phương trình: $x^2+x-\sqrt{2x-1}=3-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $2x-1\ge 0$. Đặt $a=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5}.$

$$(*)\Leftrightarrow(x^2+x-2)+(1-\sqrt{2x-1})=(2-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5})$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\cdot(x+2)-\frac{2\cdot(x-1)}{1+\sqrt{2x-1}}=\frac{-x^3-x^2-x+3}{4+2a+a^2}$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\cdot(x+2)-\frac{2\cdot(x-1)}{1+\sqrt{2x-1}}+\frac{(x-1)\cdot(x^2+2x+3)}{(a+1)^2+3}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left[x+2-\frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}+\frac{(x+1)^2+2}{(a+1)^2+3}\right]=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Do $\forall x>\dfrac{1}{2}$ thì $x+2+\dfrac{(x+1)^2+3}{(a+1)^2+3}>2>\dfrac{2}{1+\sqrt{2x-1}}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

BT 87. Giải phương trình: $5\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{7x-8}+2=x\sqrt{2x-1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$. Đặt $a=x-2,\ b=\sqrt[3]{7x-8}$.

- Trường hợp 1. Với $x=1$ thì $(*)\Leftrightarrow 1=1$: đúng, nên $x=1$ là nghiệm (*)
- Trường hợp 2. Với $x>1$, ta có:

$(*)\Leftrightarrow x.(x+1-2\sqrt{2x-1})=5.(x-1-2\sqrt{x-1})+(x^2-6x+5)+2.(x-2-\sqrt[3]{7x-8})$

$$\Leftrightarrow \frac{x\cdot(x^2-6x+5)}{x+1+2\sqrt{2x-1}}=\frac{5\cdot(x^2-6x+5)}{x-1+2\sqrt{x-1}}+(x^2-6x+5)+\frac{2x\cdot(x^2-6x+5)}{a^2+ab+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0\Leftrightarrow x=1 \vee x=5 \\ \dfrac{5}{x-1+2\sqrt{x-1}}+\dfrac{2x}{a^2+ab+b^2}+1-\dfrac{x}{x+1+2\sqrt{2x-1}}=0 \end{array}\right. \quad (1)$$

$(1)\Leftrightarrow 0<\dfrac{5}{x-1+2\sqrt{x-1}}+\dfrac{2x}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{1+2\sqrt{2x-1}}{x+1+2\sqrt{2x-1}}=0$: vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1,\ x=5$.

BT 88. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}=2(x+1)$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow 2\cdot(x+1)+(1-x)\cdot\sqrt{x^2-2x+5}+4x\cdot\sqrt{x^2+1}=0$

$\Leftrightarrow 2\cdot(x+1)+(x+1-2x)\cdot\sqrt{x^2-2x+5}+4x\cdot\sqrt{x^2+1}=0$

$\Leftrightarrow 2\cdot(x+1)+(x+1)\cdot\sqrt{x^2-2x+5}+4x\cdot\sqrt{x^2+1}-2x\cdot\sqrt{x^2-2x+5}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(2+\sqrt{x^2-2x+5})+2x\cdot(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5})=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(2+\sqrt{x^2-2x+5})+\frac{2x\cdot(3x^2+2x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(2+\sqrt{x^2-2x+5})+\frac{2x\cdot(x+1)\cdot(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)=0\Leftrightarrow x=-1.$$

Do: $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+5)}+7x^2-4x+5}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+5)}+6x^2+(x-2)^2+1}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}>0,\ \forall x.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

BT 89. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt[3]{x+5}=x^2+x-6$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x+3 \ge 0 \\ x^2+x-6 \ge 0 \text{ ?!} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$

$$(*) \Leftrightarrow 2\cdot(x-3)+\sqrt[3]{x+5}\cdot(x-\sqrt{2x+3})+x\cdot(x-1-\sqrt[3]{x+5})=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot(x-3)+\frac{2\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot\sqrt[3]{x+5}}{x+\sqrt{2x+3}}+\frac{x\cdot(x-3)\cdot(x^2+2)}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{(x+5)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[2+\frac{2(x+1)\sqrt[3]{x+5}}{x+\sqrt{2x}+3}+\frac{x(x^2+2)}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{(x+5)^2}}\right]=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Do $\forall x \ge 2$ thì $f(x)=2+\dfrac{2(x+1)\sqrt[3]{x+5}}{x+\sqrt{2x}+3}+\dfrac{x(x^2+2)}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{(x+5)^2}}>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bình luận. *Rõ ràng, nếu ta chỉ tìm điều kiện là $x \ge -\dfrac{3}{2}$ thì sẽ rất khó khăn cho việc đánh giá $f(x)$ luôn dương. Vì vậy, khi giải phương trình vô tỷ, nếu ta tìm điều kiện càng chặt chẽ thì sẽ giúp cho việc giải càng đơn giản. Có điều kiện $x \ge 2$ do vế trái là dương khi $2x+3 \ge 0$, nên để phương trình có nghiệm thì cần thêm $x^2+x-6 \ge 0$.*

BT 90. Giải phương trình: $(5x-1)\sqrt{x^3+3}=x^3+6x^2-2x+3$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -\sqrt[3]{3}$. Do $x=\dfrac{1}{5}$ không là nghiệm của $(*)$ nên:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^3+3}=\frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x^3+3}-2x=\frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1}-2x \quad (1)$$

- **Trường hợp 1**: Nếu $\sqrt{x^3+3}+2x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+3}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^3-4x^2+3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x-3)=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}\cdot$

Thế vào $(*)$, thấy $x=1$, $x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ là các nghiệm của phương trình.

- **Trường hợp 2**: Nếu $\sqrt{x^3+3}+2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1$, $x \ne \dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ thì phương trình:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3-4x^2+3}{\sqrt{x^3+3}+2x}=\frac{x^3-4x^2+3}{5x-1} \Leftrightarrow (x^3-4x^2+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+3}+2x}-\frac{1}{5x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-4x^2+3=0 \\ \sqrt{x^3+3}+2x=5x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1,\ x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2} \text{ (loại) hoặc } x=4+3\sqrt{2} \text{ (nhận).}$$

Kết luận: Các nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$, $x=4+3\sqrt{2}$.

BT 91. Giải phương trình: $6x\sqrt{x^2-x}-18\sqrt{x^3-9x}=x^3-10x^2+81 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x\ge 0 \\ x^3-9x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ -3\le x\le 0\end{array}\right.$.

Do $x=0$ không là nghiệm nên xét $x\in[-3;0)\cup[3;+\infty)$.

Đặt $\begin{cases} a=x\sqrt{x^2-x} \\ b=3\sqrt{x^3-9x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=x^2\cdot(x^2-x)=x^4-x^3 \\ b^2=9\cdot(x^3-9x)=9x^3-81x\end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=x\cdot(x^3-10x^2+81).$

$$(*)\Leftrightarrow 6a-6b=\frac{a^2-b^2}{x}\Leftrightarrow 6\cdot(a-b)-\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{x}=0\Leftrightarrow (a-b)\cdot\left(6-\frac{a+b}{x}\right)=0$$

- Với $a=b$, suy ra: $x\sqrt{x^2-x}=3\sqrt{x^3-9x} \qquad (1)$

  Nếu $-3\le x<0$ thì $x\sqrt{x^2-x}<0$ và $3\sqrt{x^3-9x}>0$ nên (1) vô nghiệm.

  Nếu $x\ge 3$, thì $(1)\Leftrightarrow x\sqrt{x^2-x}=3\sqrt{x^3-9x}\Leftrightarrow x^2(x^2-x)=9(x^3-9x)$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-10x^3+81x=0 \\ x\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-9)(x^2-x-9)=0 \\ x\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow x=9$ hoặc $x=\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}$.

- Với $a+b=6x$, suy ra: $x\sqrt{x^2-x}+3\sqrt{x^3-9x}=6x$

  $\Leftrightarrow x\cdot(\sqrt{x^2-x}-3)+3.(\sqrt{x^3-9x}-x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x\cdot(x^2-x-9)}{\sqrt{x^2-x}+3}+\dfrac{3x.(x^2-x-9)}{\sqrt{x^3-9x}+x}=0$

  $\Leftrightarrow (x^2-x-9)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}+3}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2-9x}+x}\right)=0\Leftrightarrow (x^2-x-9).f(x)=0 \qquad (2)$

  Nếu $x\ge 3$ thì $f(x)>0$ nên $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-9=0 \\ x\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}$.

  Nếu $-3\le x<0$ thì $f(x)\le \dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{x}<0$ nên $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-9=0 \\ -3\le x<0\end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=\dfrac{1+\sqrt{37}}{2};\ x=9.$

BT 92. Giải phương trình: $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{1+x}+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{1-x}=x \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1.$

$$(*)\Leftrightarrow x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}=x$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-\frac{x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=x\Leftrightarrow x=0\ \vee\ \begin{cases} t^2-t-1=0 \\ t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Leftrightarrow 1-x^2=\frac{3-\sqrt{5}}{8}\Leftrightarrow x^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=0;\ x=\pm\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

BT 93. Giải phương trình: $2x+\frac{6}{x}-1=\sqrt{4x^2+9}+\sqrt{2x-3}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ 2x-3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow \frac{2x^2-x+6}{x}=\frac{2\cdot(2x^2-x+6)}{\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{2x-3}}\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{2x-3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+9}-\sqrt{2x-3}=2x\Leftrightarrow\left[\sqrt{4x^2+9}-(2x+1)\right]+(1-\sqrt{2x-3})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x+8}{\sqrt{4x^2+9}}+\frac{-2x+4}{1+\sqrt{2x-3}}=0\Leftrightarrow (2-x)\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2+9}}+\frac{1}{1+\sqrt{2x-3}}\right)=0\Leftrightarrow x=2.$$

Do $\forall x\geq\frac{3}{2}$ thì ta luôn có lượng: $\frac{2}{\sqrt{4x^2+9}}+\frac{1}{1+\sqrt{2x-3}}>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 94. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2}+1)^2}=3$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 2.$ Đặt $a=\sqrt{x+1},\ b=\sqrt{x-2}.$ Suy ra: $a-b>0.$

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\frac{4}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})\cdot(\sqrt{x-2}+1)^2}=3 \qquad (**)$$

Đặt $a=\sqrt{x+1},\ b=\sqrt{x-2}.$ Suy ra: $a-b>0.$ Khi đó viết phương trình:

$$(**)\Leftrightarrow a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}=3\Leftrightarrow (a-b)+\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}=4 \qquad (***)$$

Ta có: $a-b+\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\overset{\text{Cauchy}}{\geq} 4\cdot\sqrt[4]{(a-b)\frac{(b+1)^2}{4}\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}}=4.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2a-2b=b+1\Leftrightarrow 2a=3b+1.$

Suy ra: $2\sqrt{x+1}=3\sqrt{x-2}+1\Leftrightarrow 4x+4=9x-17+6\sqrt{x-2}\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2}=21-5x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq x\leq\frac{21}{5}\\ 36.(x-2)=(21-5x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq x\leq\frac{21}{5}\\ 25x^2-246x+513=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

BT 95. Giải phương trình: $3\sqrt{6x^2-x-1}+\dfrac{46x+17}{\sqrt{2x-1}-4\sqrt{3x+1}}=5-8x \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $2x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{2}\cdot$ Suy ra: $\sqrt{2x-1}-4\sqrt{3x+1}\ne 0.$

Ta có: $46x+17=16\cdot(3x+1)-(2x-1)=(4\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1})\cdot(4\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}).$

$(*)\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{6x^2-x-1}-(4\cdot\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1})=5-8x$

$\Leftrightarrow 3\cdot(\sqrt{6x^2-x-1}-2)+(1-\sqrt{2x-1})+4\cdot(2-\sqrt{3x+1})+8x-8=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)\cdot(18x+15)}{\sqrt{6x^2-x-1}+2}-\dfrac{2\cdot(x-1)}{1+\sqrt{2x-1}}-\dfrac{12\cdot(x-1)}{2+\sqrt{3x+1}}+8\cdot(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\dfrac{18x+15}{\sqrt{6x^2-x-1}+2}-\dfrac{2}{1+\sqrt{2x-1}}-\dfrac{12}{2+\sqrt{3x+1}}+8\right)=0\Leftrightarrow x=1.$ Vì:

$\dfrac{18x+15}{\sqrt{6x^2-x-1}+2}-\dfrac{2}{1+\sqrt{2x-1}}-\dfrac{12}{2+\sqrt{3x+1}}+8\ge \dfrac{18x+15}{\sqrt{6x^2-x-1}+2}-\dfrac{2}{1}-\dfrac{12}{2}+8>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

BT 96. Giải PT: $(x^2-10x+26)\sqrt{4-x}-(x^2-2x+2)\sqrt{x-2}=x^2+3x-18 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $2\le x\le 4$.

$\Leftrightarrow (x^2-2x+2)\sqrt{4-x}-(x^2-2x+2)\sqrt{x-2}-(8x-24)\sqrt{4-x}=x^2+3x-18$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+2)(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x})+8(x-3)\sqrt{4-x}+x^2+3x-18=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x^2-2x+2)(x-3)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}+8(x-3)\sqrt{4-x}+(x-3)(x+6)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left[\dfrac{2(x-1)^2+2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}+8\sqrt{4-x}+x+6\right]=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3.$

Do $\forall x\in[2;4]$ thì $\dfrac{2(x-1)^2+2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}+8\sqrt{4-x}+x+6>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

BT 97. Giải phương trình: $(x+3)(2+\sqrt{x+2})=\sqrt{2x+5}+\sqrt[3]{3x+7} \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -2$. Đặt $t=\sqrt{x+2}\ge 0$, suy ra $t^2=x+2\Rightarrow x=t^2-2$.

$(*)\Leftrightarrow (t^2+1)(2+t)=\sqrt{2t^2+1}+\sqrt[3]{3t^2+1}\Leftrightarrow t^3+2t^2+t+2=\sqrt{2t^2+1}+\sqrt[3]{3t^2+1}$

$\Leftrightarrow t^3+\sqrt{2t^2+1}\cdot(\sqrt{2t^2+1}-1)+\left[(t+1)-\sqrt[3]{3t^2+1}\right]=0$ và đặt $a=\sqrt[3]{3t^2+1}.$

$$\Leftrightarrow t^3 + \frac{2t^2 \cdot \sqrt{2t^2+1}}{\sqrt{2t^2+1}+1} + \frac{t^3+3t^2}{(t+1)^2+(t+1)\cdot a + a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \left[t^2 + \frac{2t\sqrt{2t^2+1}}{\sqrt{2t^2+1}+1} + \frac{t^2+3}{(t+1)^2+(t+1)\cdot a+a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow x = -2.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -2$.

BT 98. Giải phương trình: $\sqrt{6-x} + \sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-5} = x^2 - 2x - 5$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\frac{5}{6} \le x \le 6$.

$$(*) \Leftrightarrow 20x^2 - 74x - 130 + 20(1-\sqrt{6-x}) + 5\sqrt{2x+6}(\sqrt{2x+6}-4)$$
$$= 4\sqrt{6x-5}(5-\sqrt{6x-5})$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(13x+10) + \frac{20(x-5)}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{10(x-5)\sqrt{2x+6}}{\sqrt{2x+6}+4} + \frac{24(x-5)\sqrt{6x-5}}{\sqrt{6x-5}+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(13x+10 + \frac{20}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{10\sqrt{2x+6}}{\sqrt{2x+6}+4} + \frac{24\sqrt{6x-5}}{\sqrt{6x-5}+5} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Do $\forall x \in \left[\frac{5}{6};6\right]$ thì $13x+10 + \frac{20}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{10\sqrt{2x+6}}{\sqrt{2x+6}+4} + \frac{24\sqrt{6x-5}}{\sqrt{6x-5}+5} > 0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 5$.

BT 99. Giải phương trình: $x^2\sqrt{x+3} + 2\sqrt{5x-6} = x\cdot(\sqrt{5x^2+9x-18}+2)$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \frac{6}{5}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow x\cdot(x\sqrt{x+3} - \sqrt{5x^2+9x-18}) + 2\cdot(\sqrt{5x-6}-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\cdot(x^3-2x^2-9x+18)}{x\cdot\sqrt{x+3}+\sqrt{5x^2+9x-18}} - \frac{2\cdot(x^2-5x+6)}{\sqrt{5x-6}+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-3)\cdot\left[\frac{x\cdot(x+3)}{x\cdot\sqrt{x+3}+\sqrt{5x^2+9x-18}} - \frac{2}{\sqrt{5x-6}+x} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 3 \text{ hoặc } \frac{x\cdot(x+3)}{x\cdot\sqrt{x+3}+\sqrt{5x^2+9x-18}} = \frac{2}{\sqrt{5x-6}+x} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x\cdot(x+3)\cdot(\sqrt{5x-6}+x) = 2\sqrt{x+3}\cdot(x+\sqrt{5x-6}) \Leftrightarrow x\cdot(x+3) = 2\sqrt{x+3}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\cdot(x\cdot\sqrt{x+3}-2) = 0$: vô nghiệm với mọi $x \ge \frac{6}{5}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2,\ x = 3.$

<u>***BT 100.***</u> Giải phương trình: $x^3 + 4x^2 + x + 3 = 2x^2\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+13}$ (*)

<u>***Lời giải***</u>. Điều kiện: $x \geq -5.$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 \cdot \left[(x+4) - 2\sqrt{x+5}\right] + \left[(x+3) - \sqrt{2x+13}\right] = 0 \qquad (1)$$

Có: $x + 4 + 2\sqrt{x+5} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5} = -x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq -4 \\ x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{2}.$

Thế vào phương trình (1), không thỏa nên nó không là nghiệm của (1).

Có: $x + 3 + \sqrt{2x+13} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+13} = -x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq -3 \\ x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{2}.$

Thế vào phương trình (1), không thỏa nên nó không là nghiệm của (1).

Xét $x \neq -2 - 2\sqrt{2}$ hay có $x + 3 + \sqrt{2x+13} \neq 0$ và $x + 4 + 2\sqrt{x+5} \neq 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 \cdot (x^2 + 4x - 4)}{x + 4 + 2\sqrt{x+5}} + \frac{x^2 + 4x - 4}{x + 3 + \sqrt{2x+13}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 4) \cdot \left(\frac{x^2}{x + 4 + 2\sqrt{x+5}} + \frac{1}{x + 3 + \sqrt{2x+13}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 4) \cdot \left[x^2.(x+3) + x^2.\sqrt{2x+13} + x + 4 + 2.\sqrt{x+5}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 4) \cdot (x^3 + 3x^2 + x + 4 + x^2.\sqrt{2x+13} + 2.\sqrt{x+5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 4x - 4 = 0 \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} - 2 \\ x^3 + 3x^2 + x + 4 + x^2\sqrt{2x+13} + 2\sqrt{x+5} = 0 \qquad (2) \end{array}\right.$$

Kết hợp (2), (*), suy ra hệ: $\begin{cases} x^3 + 4x^2 + x + 3 = 2x^2\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+13} \\ x^3 + 3x^2 + x + 4 = -x^2\sqrt{2x+13} - 2\sqrt{x+5} \end{cases}$

Trừ vế theo vế được: $x^2 - 1 = 2x^2\sqrt{x+5} + 2\sqrt{x+5} + x^2\sqrt{2x+13} + \sqrt{2x+13}$

$$> x^2.\sqrt{2.(-5) + 13} > x^2 - 1: \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2\sqrt{2} - 2.$

BT 101. Giải phương trình: $x^3+3x^2+x+2=2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\ge -4$.

$$(*)\Leftrightarrow x^2\cdot\left[(x+3)-2\sqrt{x+4}\right]+\left[(x+2)-\sqrt{2x+1}\right]=0 \qquad (1)$$

Ta có: $\left[(x+3)-2\sqrt{x+4}\right]\left[(x+2)-\sqrt{2x+1}\right]=0\Leftrightarrow x=-1-2\sqrt{2}$: không thỏa (1).

Với $x\ne -1-2\sqrt{2}$, thì $\left[(x+3)-2\sqrt{x+4}\right]\left[(x+2)-\sqrt{2x+1}\right]\ne 0$, lúc đó:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x^2\cdot(x^2+2x-7)}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{x^2+2x-7}{x+2+\sqrt{2x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-7)\cdot\left(\frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{2x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2x-7=0\\ x\ge -4\end{cases}\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}-1.\\ x^2(x+2+\sqrt{2x+1})+x+3+2\sqrt{x+4}=0 \qquad (2)\end{array}\right.$$

Từ (2) và $(*)$, suy ra hệ: $\begin{cases}x^3+3x^2+x+2=2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}\\ x^3+2x^2+x+3=-x^2\sqrt{2x+11}-2\sqrt{x+4}\end{cases}$ và trừ theo vế được: $x^2-1=2x^2\sqrt{x+4}+x^2\sqrt{2x+11}+\sqrt{2x+11}+2\sqrt{x+4}>x^2\sqrt{2.(-4)+11}$

$=x^2\sqrt{3}>x^2-1$: nên hệ vô nghiệm. Suy ra (2) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2\sqrt{2}-1$.

BT 102. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-2x+1}-\sqrt{2x^2+3x-3}=2-x-\sqrt{x}$ $(*)$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $\begin{cases}3x^2-2x+1\ge 0\\ 2x^2+3x-3\ge 0;\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{\sqrt{33}-3}{4}$.

$$(*)\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2+3x-3}}+x+\sqrt{x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{\sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2+3x-3}}+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)\cdot\left[\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2+3x-3}}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2+3x-3}=(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})=\sqrt{x}-x+2 \qquad (2)\end{array}\right.$$

Từ $(*),(2)\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3x^2-2x+1}-\sqrt{2x^2+3x-3}=2-x-\sqrt{x}\\ \sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2+3x-3}=\sqrt{x}-x+2\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}\sqrt{3x^2-2x+1}=2-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 3x^2 - 2x + 1 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}-1}{2}.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1,\ x = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$.

BT 103. Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = x^2 - x - 2$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Phân tích. *Sử dụng chức năng table, tìm được nhân tử* $x^2 - 3x + 1$ *nên sẽ liên hợp.*

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - x - 2 > 0 \ ?! \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3.$

$$(*) \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) + \left[(x-1) - \sqrt{x}\right] + \left[(x-2) - \sqrt{3-x}\right] = 0 \quad (1)$$

- Với: $\begin{cases} x - 1 + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x - 2 + \sqrt{3-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 2 - x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$

Thế vào (1), thấy $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ thì (1) thỏa, tức $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ là 1 nghiệm của (1).

- Với $x \neq \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \neq 0,$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) + \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1 + \sqrt{x}} + \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2 + \sqrt{3-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x - 1 + \sqrt{x}} + \frac{1}{x - 2 + \sqrt{3-x}} = 0 : \text{vô nghiệm.}$$

Do ta luôn có lượng vế trái là $1 + \frac{1}{x - 1 + \sqrt{x}} + \frac{1}{x - 2 + \sqrt{3-x}} > 0,\ \forall x \in \left(2;3\right].$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

BT 104. Giải phương trình: $2\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{3x^2 - 2x} = \sqrt{6x^3 - 7x^2 + 2x}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$. Nhận thấy $x = 1$ là 1 nghiệm nên xét $x > 1$.

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{3x^2 - 2x} - \sqrt{(3x^2 - 2x)(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{3x^2 - 2x} \cdot (1 - \sqrt{2x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) \cdot \sqrt{x-1} - \frac{2(x-1) \cdot \sqrt{3x^2 - 2x}}{1 + \sqrt{2x-1}} = 0 \text{ và do } x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0, \text{ nên:}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - \frac{\sqrt{3x^2 - 2x}}{1 + \sqrt{2x-1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)(2x-1)} = \sqrt{3x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + (x-1)(2x-1) + 2\sqrt{(x-1)^2(2x-1)} = 3x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 = 2(x-1)\sqrt{2x-1}$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 2\cdot(x-1)\cdot\sqrt{2x-1} + (2x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1-\sqrt{2x-1})^2 = 0$

$\Leftrightarrow x-1-\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2+\sqrt{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = 1,\ x = 2+\sqrt{2}.$

BT 105. Giải phương trình: $x+4-\sqrt{x(x+8)} = (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^4 \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x \ge 1$.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{16}{x+4+\sqrt{x^2+8x}} = \dfrac{16}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^4} \Leftrightarrow x+4+\sqrt{x^2+8x} = (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^4$

Kết hợp đề bài, suy ra hệ phương trình: $\begin{cases} x+4-\sqrt{x(x+8)} = (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^4 \\ x+4+\sqrt{x^2+8x} = (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^4 \end{cases}$

Cộng vế theo vế, suy ra: $2x+8 = (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^4 + (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^4$

$\Leftrightarrow 2x+8 = (2x-2\sqrt{x^2-1})^2 + (2x+2\sqrt{x^2-1})^2$

$\Leftrightarrow 2x+8 = 4x^2 - 8x\sqrt{x^2-1} + 4x^2 - 4 + 4x^2 + 8x\sqrt{x^2-1} + 4x^2 - 4$

$\Leftrightarrow 2x+8 = 16x^2 - 8 \Leftrightarrow 8x^2 - x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1\pm\sqrt{257}}{16}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{1+\sqrt{257}}{16}\cdot$

BT 106. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt[3]{x+6}}{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = x+1 \qquad (*) \qquad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x > 1$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x-1} = x+1 \qquad (1)$

$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+6}-2) + (\sqrt{x-1}-1) = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = (x-2)\cdot(x+2)$

$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} - (x+2)\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} = x+2 \qquad (2)$

Có $x > 1$ thì $\begin{cases} \circ\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} < \dfrac{1}{4} + 1 < 2 \\ \circ\ x+2 > 2 \end{cases}$ nên (2) vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

BT 107. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $0<x\le 1.$

$(*)\Leftrightarrow(1+x^2)\sqrt{1-x}=(2x+x^2)\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})+(\sqrt{1-x}-2x\sqrt{x})=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\dfrac{1-x-4x^3}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\dfrac{(1-2x)(2x^2+x+1)}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}=0$

$\Leftrightarrow(1-2x)\cdot\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow 1-2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Do với mọi $x\in(0;1]$ thì $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

BT 108. Giải phương trình: $(3x^2-5x-6)\sqrt{2-x}=\sqrt{3x^2-6x-5}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}2-x\ge 0\\3x^2-6x-5\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}\cdot\\3x^2-5x-6\ge 0\end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow(3x^2-5x-7)\sqrt{2-x}=\sqrt{3x^2-6x-5}-\sqrt{2-x}=\dfrac{3x^2-5x-7}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}$

$\Leftrightarrow(3x^2-5x-7)\cdot\left(\sqrt{2-x}-\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-5x-7=0\\\sqrt{2-x}=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-5x-7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5-\sqrt{109}}{6}\\\sqrt{(2-x)(3x^2-6x-5)}=x-1:\text{ VN}_o\end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5-\sqrt{109}}{6}\cdot$

BT 109. Giải phương trình: $\dfrac{2-x}{4}=\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{3}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow(x-2)+4.(\sqrt{2x-3}-1)+4.(1-\sqrt[3]{x-1})=0$

$\Leftrightarrow(x-2)+\dfrac{8\cdot(x-2)}{\sqrt{2x-3}+1}-\dfrac{4\cdot(x-2)}{1+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}=0$

$\Leftrightarrow(x-2)\cdot\left[1+\dfrac{8}{\sqrt{2x-3}+1}-\dfrac{4}{1+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right]=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=2.$

BT 110. Giải phương trình: $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2=2 \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $0\le x\le 4.$

$(*)\Leftrightarrow (x^2-4x)\sqrt{-x^2+4x}+x^2-4x+2=0$ và đặt $t=\sqrt{-x^2+4x}\ge 0,$ thì:

$\Leftrightarrow -t^3-t^2+2=0\Leftrightarrow (t-1)(t^2+2t+2)=0\Leftrightarrow t=1.$

Với $t=1,$ suy ra: $\sqrt{-x^2+4x}=1\Leftrightarrow x^2-4x+1=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=2\pm\sqrt{3}.$

BT 111. Giải phương trình: $(x+1)(x-3)\sqrt{2x-x^2+3}=2-(x-1)^2 \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 3.$ Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+3}\ge 0.$

$(*)\Leftrightarrow (x^2-2x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}+x^2-2x-1=0\Rightarrow t^3+t^2-2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\cdot(t^2+2t+2)=0\Leftrightarrow t=1.$ Suy ra: $\sqrt{-x^2+2x+3}=1\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1\pm\sqrt{3}.$

BT 112. Giải phương trình: $(x^2+1)^2=5-x\sqrt{2x^2+4} \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=x.\sqrt{2x^2+4}\Leftrightarrow t^2=2x^2.(x^2+2).$

$(*)\Leftrightarrow x^2.(x^2+2x)=4-x.\sqrt{2x^2+4}\Rightarrow \dfrac{t^2}{2}=4-t\Leftrightarrow t^2+2t-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\\ t=-4\end{array}\right..$

- Với $t=2,$ suy ra: $x.\sqrt{2x^2+4}=2\Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ 2x^4+4x^2-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{3}-1}.$
- Với $t=-4,$ suy ra: $x.\sqrt{2x^2+4}=-4\Leftrightarrow \begin{cases} x<0\\ 2x^4+4x^2-16=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}.$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\sqrt{\sqrt{3}-1},\ x=-\sqrt{2}.$

BT 113. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+2}-2\sqrt{2x^2+5x-6}=1 \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\le \dfrac{-5-\sqrt{73}}{4}$ hoặc $x\ge \dfrac{-5+\sqrt{73}}{4}.$

Đặt $t=2x^2+5x-6\ge 0,$ thì $(*)\Leftrightarrow \sqrt{t+8}-2\sqrt{t}=1\Leftrightarrow \sqrt{t+8}=2\sqrt{t}+1$

$\Leftrightarrow t+8=4t+1+4\sqrt{t}\Leftrightarrow 4\sqrt{t}=7-3t\Rightarrow t=1.$

Suy ra: $2x^2+5x-6=1\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-\dfrac{7}{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=-\dfrac{7}{2}.$

BT 114. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+4x+3}=\sqrt{(x+2)^3} \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)-1}+\sqrt{\left[(x+2)-1\right]\cdot\left[(x+2)+1\right]}=\sqrt{(x+2)^3} \qquad (1)$

Đặt $t=x+2\geq 1$ thì $(1)\Leftrightarrow \sqrt{t-1}+\sqrt{(t-1)(t+1)}=t\sqrt{t}\Leftrightarrow \sqrt{t^2-1}=t\sqrt{t}-\sqrt{t-1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\sqrt{t}-\sqrt{t-1}\geq 0 \\ t^2-1=t^3+t-1-2t\sqrt{t.(t-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\sqrt{t}\geq\sqrt{t-1} \\ t^2-t-2.\sqrt{t^2-t}+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^3\geq t-1 \\ (\sqrt{t^2-t}-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 1 \\ t^2-t-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}.$

BT 115. Giải phương trình: $3\sqrt{2x^2+2x+12}-2\sqrt{16x-x^2-6}=6\sqrt{x}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $8-\sqrt{58}\leq x\leq 8+\sqrt{58}$. Chia hai vế cho $\sqrt{x}>0$, được:

$(*)\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{2.\left(x+\dfrac{6}{x}+1\right)}-2\cdot\sqrt{-x-\dfrac{6}{x}+16}=6$ và đặt $t=x+\dfrac{6}{x}\overset{\text{Cauchy}}{\geq}2\sqrt{6}.$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{2t+2}=6+2\sqrt{16-t}\Leftrightarrow 9.(2t+2)=36+24\sqrt{16-t}+4.(16-t)$

$\Leftrightarrow 12\sqrt{16-t}=11t-41\Leftrightarrow 121t^2-758t-623=0\Leftrightarrow t=7.$

Suy ra: $x+\dfrac{6}{x}=7\Leftrightarrow x^2-7x+6=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=6.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=1,\ x=6.$

BT 116. Giải phương trình: $\dfrac{3x^2}{3+\sqrt{x}}+6+2\sqrt{x}=5x$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 0.$

$(*)\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{3+\sqrt{x}}+2.(3+\sqrt{x})=5x \xleftrightarrow{\text{Chia: } 3+\sqrt{x}} 3\cdot\dfrac{x^2}{(3+\sqrt{x})^2}+2=5\cdot\dfrac{x}{3+\sqrt{x}} \qquad (**)$

Đặt $t=\dfrac{x}{3+\sqrt{x}}\geq 0,$ thì $(**)\Leftrightarrow 3t^2+2=5t\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=\dfrac{2}{3}.$

Suy ra: $x=3+\sqrt{x}$ hoặc $3x=6+2\sqrt{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{20+2\sqrt{19}}{9}.$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2},\ x=\dfrac{20+2\sqrt{19}}{9}.$

BT 117. Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{4-3\sqrt{x}}+8=3\cdot(x+2\sqrt{x})$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 4-3x\neq 0 \\ \sqrt{x}\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\neq\dfrac{16}{9}.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^2}{4-3\sqrt{x}} = 3x - 2.(4-3\sqrt{x}) \xleftrightarrow{\text{Chia: } 4-3\sqrt{x}} \frac{x^2}{(4-3\sqrt{x})^2} = 3\cdot\frac{x}{4-3\sqrt{x}} - 2 \quad (**)$$

Đặt $t = \dfrac{x}{4-3\sqrt{x}}$ thì $(**) \Leftrightarrow t^2 = 3t - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4-3\sqrt{x} \\ x = 8-6\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x = 26-6\sqrt{17} \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=26-6\sqrt{17}$.

BT 118. Giải phương trình: $10\sqrt{x+3} + \dfrac{3x}{\sqrt{x+3}} - 13\sqrt{x} = 0 \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0$. Do $x=0$ không là nghiệm nên xét $x>0$.

$$(*) \xleftrightarrow{\text{Chia: } \sqrt{x}} 10\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x}} + 3\cdot\sqrt{\frac{x}{x+3}} - 13 = 0 \qquad (**)$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x+3}{x}} > 0$ thì $(**) \Leftrightarrow 10t + \dfrac{3}{t} - 13 = 0 \Leftrightarrow 10t^2 - 13t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{3}{10} \end{array}\right.$.

- Với $t=1$, suy ra: $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}} = 1 \Leftrightarrow x+3 = x$: vô nghiệm.
- Với $t=\dfrac{3}{10}$, suy ra: $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}} = \dfrac{3}{10} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x} = \dfrac{9}{100} \Leftrightarrow x = -\dfrac{300}{91}$: loại.

Kết luận: Vậy phương trình đã cho vô nghiệm $x \in \varnothing$.

BT 119. Giải phương trình: $5\sqrt{x} + \dfrac{5}{2\sqrt{x}} = 2x + \dfrac{1}{2x} + 4 \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x>0$. Đặt $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} \sqrt{2} \Rightarrow t^2 - 1 = x + \dfrac{1}{4x}$.

$$(*) \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) - 5\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 4 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Suy ra: $x + \dfrac{1}{4x} = 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$.

BT 120. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1 \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Do $x=0$ không là nghiệm nên chia hai vế cho $x \neq 0$, được:

$$(*) \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

BT 121. Giải phương trình: $x^2-6x+x\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-6}{x}}-6=0\qquad(*)\qquad(x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $-\sqrt{6}\le x<0$ hoặc $x\ge\sqrt{6}$. Chia 2 vế cho x, ta được:

$$(*)\Leftrightarrow\frac{x^2-6}{x}+\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}-6=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}=2\Leftrightarrow x^2-4x-6=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{10}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=2\pm\sqrt{10}$.

BT 122. Giải phương trình: $\sqrt{4x-\sqrt{16x^2-9}}+\sqrt{4x+\sqrt{16x^2-9}}=4\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $16x^2-9\ge0;\ 4x-\sqrt{16x^2-9}\ge0$.

Do $\sqrt{4x-\sqrt{16x^2-9}}\cdot\sqrt{4x+\sqrt{16x^2-9}}=3$ nên sẽ đặt $t=\sqrt{4x-\sqrt{16x^2-9}}>0$ và sẽ được $\sqrt{4x+\sqrt{16x^2-9}}={}^{3}\!/_{t}\cdot$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=3$.

- Với $t=1$, suy ra: $\sqrt{16x^2-9}=4x-1\Leftrightarrow\begin{cases}4x-1\ge0\\8x=10\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}\cdot$
- Với $t=3$, suy ra: $\sqrt{16x^2-9}=4x-9$: vô nghiệm.

Kết luận: Thế vào điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{5}{4}\cdot$

BT 123. Giải phương trình: $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}-1=0\qquad(*)\qquad(x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\ne0$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow\dfrac{9+2x^2}{x^2}+2\cdot\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}}-3=0$

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}}\ne0\Rightarrow\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{2x^2+9}{x}$ thì phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{1}{t^2}+2t-3=0$

$\Leftrightarrow2t^3-3t^2+1=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-{}^{1}\!/_{2}\cdot$

Với $t=1$, suy ra: $\sqrt{2x^2+9}=x$: vô nghiệm.

Với $t=-\dfrac{1}{2}$, suy ra: $\sqrt{2x^2+9}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\2x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot$

BT 124. Giải phương trình: $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0\qquad(*)\qquad(x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=\sqrt[3]{4x-4}$.

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{8}(4x-4)^2-\frac{7}{4}(4x-4)-3\sqrt[3]{4x-4}+12=0$$

Suy ra: $t^6 - 14t^3 - 12t + 96 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2(t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24) = 0 \quad (**)$

- Nếu $t \le 0$ thì $t^6 - 14t^3 - 24t + 96 > 0.$
- Nếu $t > 0$ thì $t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24 > 0.$

Do đó: $(**) \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2,$ suy ra: $\sqrt[3]{4x-4} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 3.$

BT 125. Giải phương trình: $4.(2x^2+1) + 3.(x^2-2x)\sqrt{2x-1} = 2.(x^3+5x) \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 3x.(x-2)\sqrt{2x-1} - 2.(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x.(x-2)\sqrt{2x-1} - 2.(x-2).(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\cdot(3x\sqrt{2x-1} - 2x^2 + 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2.(2x-1) + 3.x.\sqrt{2x-1} = 2x^2 \quad (i) \end{array}\right.$

$(i) \xleftrightarrow{\text{chia: } x^2} 2\cdot\dfrac{2x-1}{x^2} + 3\cdot\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2x-1}{x}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{3}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = 2,\ x = 4 \pm 2\sqrt{3}.$

BT 126. Giải phương trình: $5.(8x^2 + 11x) = 27.(2x+1)\sqrt{3x-2} \quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{2}{3}\cdot$ Do $x = \dfrac{2}{3}$ không là nghiệm nên xét $x > \dfrac{2}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 2.(2x+1)^2 + (3x-2) = \dfrac{27}{5}\cdot(2x+1)\sqrt{3x-2}$ và chia cho $(2x+1)\sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{2x+1}{\sqrt{3x-2}} + \dfrac{\sqrt{3x-2}}{2x+1} = \dfrac{27}{5}$ và đặt $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3x-2}} > 0$ thì:

$\Leftrightarrow 2t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{27}{5} \Leftrightarrow 2t^2 - \dfrac{27}{5}t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{2}$ hoặc $t = \dfrac{1}{5}\cdot$

- Với $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3x-2}} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 5\sqrt{3x-2} = 4x + 2 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \dfrac{27}{16}\cdot$
- Với $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3x-2}} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = 10x + 5:$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 2,\ x = \dfrac{27}{16}\cdot$

BT 127. Giải phương trình: $(x^2+x)^2 + (x-1)^2 = (x^2+1)\sqrt{x - x^3} \quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x - x^3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right.\cdot$ Đặt $\begin{cases} a = x^2 + x \\ b = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = x^2 + 1 \\ ab = x^3 - x \end{cases}.$

$(*) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (a-b)\sqrt{-ab} \Leftrightarrow (a-b)^2 + 2ab - (a-b)\sqrt{-ab} = 0 \quad (**)$

Đặt $\begin{cases} u = a - b > 0 \\ v = \sqrt{-ab} \ge 0 \end{cases}$ thì $(**) \Leftrightarrow v^2 - uv - 2u^2 = 0 \Leftrightarrow (u+v)(u-2v) = 0 \Leftrightarrow u = 2v.$

Do đó: $a - b = 2\sqrt{-ab} \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = -4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow a + b = 0.$

Suy ra: $x^2 + x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x = -1 \pm \sqrt{2}.$

BT 128. Giải phương trình: $\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} = 4 - x - \dfrac{1}{x}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2 - x^2 \ge 0;\ x \ne 0 \\ 2 - \dfrac{1}{x^2} \ge 0;\ 4 - x - \dfrac{1}{x} \ge 0 \end{cases}.$

$$(*) \Leftrightarrow 4 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 \cdot \sqrt{5 - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \left[4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^2 \qquad (**)$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2.$ Khi đó: $2 \le |t| \le \dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

$$(**) \Leftrightarrow 4 - (t^2 - 2) + 2\sqrt{5 - 2.(t^2 - 2)} = (4 - t)^2 \Leftrightarrow \sqrt{9 - 2t^2} = t^2 - 4t + 5$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2 + (1 - \sqrt{9 - 2t^2}) = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 + \frac{2(t^2 - 4)}{1 + \sqrt{9 - 2t^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(t - 2 + \frac{2t + 4}{1 + \sqrt{9 - 2t^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1. \\ t - 2 + \dfrac{2t + 4}{1 + \sqrt{9 - 2t^2}} = 0 \quad (***) \end{array}\right.$$

Với $2 \le |t| \le \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ thì $t - 2$ và $2t + 4$ cùng dấu nên $(***)$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1.$

BT 129. Giải phương trình: $\dfrac{5}{2x\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^2(1 - x^2)} + 2 = 0$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1 < x < 1$ và $x \ne 0.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{5}{2x\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{x^2(1 - x^2)} - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2(1 - x^2)} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} + 1 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = x\sqrt{1 - x^2}$, suy ra: $t^2 = x^2(1 - x^2).$ Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } t = -2.$$

Với $t = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x\sqrt{1 - x^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 4x^2(1 - x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Với $t=-2 \Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=-2 \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<0\\ x^2(1-x^2)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<0\\ x^4-x^2+4=0\end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

BT 130. Giải phương trình: $x^3-3x^2-6x+2(x+2)\sqrt{x+2}=0$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Điều kiện: $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2.$

Lời giải 1. Chia và đặt một ẩn phụ.

$$(*) \Leftrightarrow x^3-3x(x+2)+2\sqrt{(x+2)^3}=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{(\sqrt{x+2})^3}-3\cdot\frac{x}{\sqrt{x+2}}+2=0$$

(do: $x=-2$ không là nghiệm của phương trình nên chia cho $\sqrt{(x+2)^3}>0$).

Đặt $\mathrm{t}=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow t^3=\dfrac{x^3}{(\sqrt{x+2})^3}$ thì phương trình $\Leftrightarrow t^3-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-2\end{array}\right.$.

- Với $t=1$, suy ra: $\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x^2-x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$
- Với $\mathrm{t}=-2$, suy ra:

$$\frac{x}{\sqrt{x+2}}=-2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=-x \Leftrightarrow \begin{cases}-2<x\leq 0\\ 4x+8=x^2\end{cases} \Leftrightarrow x=2-2\sqrt{3}.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2,\ x=2-2\sqrt{3}.$

Lời giải 2. Đặt một ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc ba.

$(*) \Leftrightarrow x^3-3x(x+2)+2\sqrt{(x+2)^3}=0$, (1). Đặt $t=\sqrt{x+2}\geq 0$, khi đó:

(1) $\Leftrightarrow x^3-3x.t^2+2t^3=0$, (2) và chia hai vế cho $t^3\neq 0$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{t}\right)^3-3\cdot\left(\frac{t}{x}\right)^2+2=0 \Leftrightarrow \frac{x}{t}=1 \text{ hoặc } \frac{x}{t}=-2 \Leftrightarrow t=x \text{ hoặc } 2t=-x.$$

Thế $t=\sqrt{x+2}$ và giải tương tự, ta được kết quả như trên.

BT 131. Giải phương trình: $\sqrt{2x-x^2+8}+\dfrac{6}{x-3}=x^2-x$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Tập xác định: $D=\left[-2;4\right]\backslash\left\{3\right\}$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2+8}+\left(\frac{6}{x-3}-6\right)=x^2-x-6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2+8}+6\cdot\frac{1-(x-3)}{x-3}=x^2-x-6$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(4-x)}+6\cdot\dfrac{4-x}{x-3}=(x-3)\cdot(x+2)$ và do: $x=-2$ không là nghiệm

$$\xleftrightarrow{\text{Chia: }(x-3)(x+2)} 6\cdot\frac{1}{x-3}\cdot\frac{4-x}{x+2}+\frac{1}{x-3}\cdot\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}-1=0 \qquad (**)$$

Đặt $t=\frac{1}{x-3}\cdot\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}$ thì $(**)\Leftrightarrow 6t^2+t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ hoặc $t=-\frac{1}{2}\cdot$

- Với $t=\frac{1}{3}$, suy ra: $\frac{1}{x-3}\cdot\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}3<x\le 4\\ x^3-4x^2+6x-18=0\end{cases}.$
- Với $t=-\frac{1}{2}$, suy ra: $\frac{1}{x-3}\cdot\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x^3-3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right..$

BT 132. Giải phương trình: $2x+\frac{x-1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+3\cdot\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ $\quad(*)\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x<0$ hoặc $x\ge 1$.

$(*)\Leftrightarrow 2x+\frac{x-1}{x}=\sqrt{\frac{x-1}{x}}+3\sqrt{(x+1)\cdot\frac{x-1}{x}}$ $(**)$ và đặt $a=\sqrt{\frac{x-1}{x}}\ge 0\Rightarrow\frac{x-1}{x}=a^2.$

$(**)\Leftrightarrow a^2-(1+3\sqrt{x+1})\cdot a+2x=0$ và có $\Delta_a=(\sqrt{x+1}+3)^2$, nên phương trình có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l}a=2.(\sqrt{x+1}-1)\\ a=\sqrt{x+1}-1\end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{ll}\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\sqrt{x+1}-1 & (1)\\ \sqrt{\frac{x-1}{x}}=2.(\sqrt{x+1}-1) & (2)\end{array}\right..$

Nhận thấy rằng, nếu $x\in[-1;0)$ thì cả (1) và (2) đều vô nghiệm, nên xét $x\ge 1$:

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{x.(x+1)}\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{x^2-x}=x^2+x$

$\Leftrightarrow(x^2-x)-2.\sqrt{x^2-x}+1=0\Leftrightarrow(\sqrt{x^2-x}-1)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}=2\sqrt{x^2+x}$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-4\sqrt{x^2-x}+1=0\Leftrightarrow\left[4.(x^2-x)-2.2.\sqrt{x^2-x}+1\right]+3x=0$

$\Leftrightarrow(2\sqrt{x^2-x}-1)^2+3x=0$: vô nghiệm với mọi $x\ge 1$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

BT 133. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{(x+2)(5-x)}=4$ $\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-2\le x\le 5$.

Đặt $t=\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le}\sqrt{14};\ (0<t\le\sqrt{14})\Rightarrow\sqrt{(x+2)(5-x)}=\frac{t^2-7}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow t^2+2t-15=0\Leftrightarrow t=3$ hoặc $t=5$ (loại).

Suy ra: $\sqrt{(x+2)(5-x)}=1 \Leftrightarrow x^2-3x+9=0$: vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho vô nghiệm $x \in \varnothing$.

BT 134. Giải phương trình: $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2 \quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 2$. Đặt $t=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2} \Rightarrow t^2=2x-2\sqrt{x^2-4}$.

$(*) \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-2$.

Với $t=1$, suy ra: $\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=-5$: vô nghiệm.

Với $t=-2$, suy ra: $\sqrt{x-2}+2=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x+2+4\sqrt{x-2}=x+2 \Leftrightarrow x=2$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

BT 135. Giải phương trình: $2(\sqrt{x+3}+\sqrt{10-x})-\sqrt{30+7x-x^2}=4 \quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-3 \leq x \leq 10$.

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{10-x} \geq 0$, suy ra: $t^2=13+2\sqrt{30+7x-x^2}$.

$(*) \Leftrightarrow t^2-4t-5=0 \Leftrightarrow t=-1$ (loại) hoặc $t=5$.

Với $t=5$, suy ra: $\sqrt{30+7x-x^2}=6 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=6$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=1$, $x=6$.

BT 136. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=3x+6\sqrt{5x-2x^2+12}-23 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq 4$.

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x} \geq 0$, suy ra: $t^2=x+2\sqrt{5x-2x^2+12}+7$.

$(*) \Leftrightarrow 3t^2-t-44=0 \Leftrightarrow t=4$ (nhận) hoặc $t=-\dfrac{11}{3}$ (loại).

Với $t=4$, suy ra: $2\sqrt{5x-2x^2+12}=9-x \Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=\dfrac{11}{9}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=3$, $x=\dfrac{11}{9}\cdot$

BT 137. Giải phương trình: $\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x}+5=3\sqrt{25-4x^2} \quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{5}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}\cdot$

Đặt $t=\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x} \geq 0$, suy ra: $t^2=10+2\sqrt{5-4x^2}$.

$(*) \Leftrightarrow 3t^2-2t-40=0 \Leftrightarrow t=4$ (nhận) hoặc $t=-\dfrac{10}{3}$ (loại).

Với $t=4$, suy ra: $\sqrt{25-4x^2}=3 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-2$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=-2$ hoặc $x=2$.

BT 138. Giải phương trình: $3(\sqrt{x+7}+\sqrt{6-x})-2\sqrt{-x^2-x+42}-3=0 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $-7 \leq x \leq 6$.

Đặt $t=\sqrt{7+x}+\sqrt{6-x}\ge 0,$ suy ra: $t^2=13+2\sqrt{-x^2-x+42}.$

$(*)\Leftrightarrow t^2-3t-10=0\Leftrightarrow t=5$ (nhận) hoặc $t=-2$ (loại).

Với $t=5,$ suy ra: $\sqrt{-x^2-x+42}=6\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-3.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=2,\ x=-3.$

BT 139. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$

Đặt $t=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}\ge 0,$ suy ra: $t^2=4x-3+2\sqrt{3x^2-5x+2}.$

$(*)\Leftrightarrow t^2-t-6=0\Leftrightarrow t=-2$ hoặc $t=3.$

Với $t=3,$ suy ra: $\sqrt{3x^2-5x+2}=6-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x^2-19x+34=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 140. Giải: $(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow 7\cdot(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x})-2\cdot\left[(2x-3)\cdot\sqrt{2x-3}+(5-2x)\cdot\sqrt{5-2x}\right]=2+8\sqrt{(5-2x)(2x-3)}\quad(1)$$

Đặt $t=\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x},$ $\left(t\in\left[\sqrt{2};2\right]\right)\Rightarrow\begin{cases}t^2=2+2\sqrt{(5-2x)(2x-3)}\\ t^3=(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x})^3\end{cases}.$

$(1)\Leftrightarrow t^3-4t^2+t+6=0\Leftrightarrow t=2,$ suy ra: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=2\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=2.$

BT 141. Giải phương trình: $7\sqrt{3x-7}+(4x-7)\sqrt{7-x}=32$ $\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{7}{3}\le x\le 7.$

$$(*)\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}(3x-7)+\frac{3}{2}(7-x)\right]\sqrt{3x-7}+\left[\frac{1}{2}(7-x)+\frac{3}{2}(3x-7)\right]\sqrt{7-x}=32$$

$$\Leftrightarrow\left[(3x-7)+(7-x)\right]\sqrt{3x-7}+\left[(7-x)+(3x-7)\right]\sqrt{7-x}=64$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{3x-7})^3+(\sqrt{7-x})^3+\sqrt{(3x-7)(7-x)}\cdot\left[\sqrt{3x-7}+\sqrt{7-x}\right]=64$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{3x-7}+\sqrt{7-x})^3=64\Leftrightarrow\sqrt{3x-7}+\sqrt{7-x}=4$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(3x-7)(7-x)}=8-x\Leftrightarrow 4x^2-44x+113=0\Leftrightarrow x=\frac{11\pm 2\sqrt{2}}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{11\pm 2\sqrt{2}}{2}\cdot$

Bình luận. *Bài toán:* $(ax+b)\sqrt{cx+d}+(ex+h)\sqrt{gx+k}+r\sqrt{(cx+d)(gx+k)}+s=0,$ *ta có thể xử lý theo 2 hướng sau: Một là phân tích* $ax+b=m.(cx+d)+n.(gx+k)$ *bằng đồng nhất thức, rồi đưa về dạng hằng đẳng thức như lời giải trên. Hai là có thể đặt 2 ẩn phụ và đưa về hệ phương trình đối xứng loại I (dành cho đọc giả).*

BT 142. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+(4-3x)\cdot\sqrt{\dfrac{3x+1}{4-3x}}+\sqrt{4-3x}=5 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{4}{3}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}+\sqrt{4-3x}+\sqrt{(3x+1)(4-3x)}=5$ và đặt $t=\sqrt{3x+1}+\sqrt{4-3x}\ge0$

$\Leftrightarrow t^2+2t-15=0\Leftrightarrow t=3$ (nhận) hoặc $t=-5$ (loại).

Với $t=3,$ suy ra: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4-3x}=3\Leftrightarrow\sqrt{(3x+1)(4-3x)}=9\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=0,\ x=1.$

BT 143. Giải phương trình: $13x-20\sqrt{5x-3x^2+2}+4\sqrt{3x+1}+10\sqrt{2-x}-9\ \ (*)$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le2.$ Đặt $t=2\sqrt{3x+1}+5\sqrt{2-x}\ge0.$

$(*)\Leftrightarrow2\cdot(2\sqrt{3x+1}+5\sqrt{2-x})+20\sqrt{-3x^2+5x+2}-13x-9=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t-63=0\Leftrightarrow t=7$ (nhận) hoặc $t=-9$ (loại).

Với $t=7,$ suy ra: $20\sqrt{-3x^2+5x+2}=13x-5\Leftrightarrow x=\dfrac{1065\pm\sqrt{2195200}}{1369}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1065\pm\sqrt{2195200}}{1369}\cdot$

BT 144. Giải phương trình: $(2+\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})=4\sqrt{1-x^2}-2x^2+2.$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le1.$ Đặt $t=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\ge0.$

Suy ra: $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-2}{2}$ và $1-x^2=\dfrac{(t^2-2)^2}{4}\cdot$ Khi đó phương trình đã cho:

$\Leftrightarrow t^4-t^3-2t-4=0\Leftrightarrow(t+1)(t-2)(t^2+2)=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow x=0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=0.$

BT 145. Giải phương trình: $x+\sqrt{5-x^2}=5x\sqrt{5-x^2}-7 \qquad (*) \qquad (x\in\mathbb{R})$

Điều kiện: $-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}.$

Lời giải 1. Đặt một ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai

Đặt: $t=x+\sqrt{5-x^2},$ suy ra: $t^2=5+2x\sqrt{5-x^2}\Leftrightarrow x\sqrt{5-x^2}=\dfrac{t^2-5}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow5t^2-2t-39=0\Leftrightarrow t=3$ hoặc $t=-\dfrac{13}{5}\cdot$

Với $t=3,$ suy ra: $\sqrt{5-x^2}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ 2x^2-6x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Với $t=-\dfrac{13}{5},$ suy ra: $\sqrt{5-x^2}=-\dfrac{13}{5}-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{13}{5} \\ 25x^2+65x+22=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1,\ x=2.$

Lời giải 2. Đặt một ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Đặt $y=\sqrt{5-x^2}\ge 0,$ suy ra: $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=5xy-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=5 \\ x+y=5xy-7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25(xy)^2-72xy+44=0 \\ x+y=5xy-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} xy=\dfrac{22}{5} \\ x+y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1,\ x=2.$

BT 146. Giải phương trình: $x+\sqrt{26-x^2}+x\sqrt{26-x^2}=11$ (*) $(x\in \mathbb{R})$

Điều kiện: $-\sqrt{26}\le x\le \sqrt{26}.$

Lời giải 1. Đặt một ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai

Đặt $t=x+\sqrt{26-x^2}$, suy ra: $t^2=26+2x\sqrt{26-x^2} \Leftrightarrow x\sqrt{26-x^2}=\dfrac{t^2-26}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow t^2+2t-48=0 \Leftrightarrow t=6$ hoặc $t=-8.$

Với $t=-8,$ suy ra: $\sqrt{26-x^2}=-8-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -8 \\ x^2+8x+19=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Với $t=6,$ suy ra: $\sqrt{26-x^2}=6-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 6 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=5.$

Lời giải 2. Đặt một ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Đặt $y=\sqrt{26-x^2}\ge 0,$ suy ra: $\begin{cases} x^2+y^2=26 \\ x+y+xy=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=26 \\ xy=11-(x+y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+2(x+y)-48=0 \\ xy=11-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+y=-8 \\ xy=19 \end{cases}$ (loại do $S^2\ge 4P$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=5.$

BT 147. Giải phương trình: $2x+\sqrt{5-4x^2}=x\sqrt{5-4x^2}+2$ (*) $(x\in \mathbb{R})$

Điều kiện: $-\frac{\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải 1. Đặt một ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai

Đặt $t = 2x + \sqrt{5-4x^2}$, suy ra: $t^2 = 5 + 4x\sqrt{5-4x^2} \Leftrightarrow x\sqrt{5-4x^2} = \frac{t^2-5}{4}$.

$(*) \Leftrightarrow t = \frac{t^2-5}{4} + 2 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$.

Với $t = 1$, suy ra: $\sqrt{5-4x^2} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \ge 0 \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Với $t = 3$, suy ra: $\sqrt{5-4x^2} = 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \ge 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$.

Lời giải 2. Đặt một ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Đặt $y = \sqrt{5-4x^2}$, suy ra: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5 \\ 2x + y = xy + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^2 - 4xy = 5 \\ xy = (2x+y) - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^2 - 4(2x+y) + 3 = 0 \\ xy = (2x+y) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x.y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x.y = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x = 2 \\ y = -1 \text{ (loại vì y} \ge 0) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Suy ra: $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$.

BT 148. Giải phương trình: $3x + \sqrt{10-9x^2} = 5 - x\sqrt{10-9x^2}$ $(*)$ $(x \in \mathbb{R})$

Điều kiện: $-\frac{\sqrt{10}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải 1. Đặt một ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai

Đặt $t = 3x + \sqrt{10-9x^2}$, suy ra: $t^2 = 10 + 6x\sqrt{10-9x^2} \Leftrightarrow x\sqrt{10-9x^2} = \frac{t^2-10}{6}$.

$(*) \Leftrightarrow t = 5 - \frac{t^2-10}{6} \Leftrightarrow t^2 + 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ hoặc $t = -10$.

Với $t = 4$, suy ra: $\sqrt{10-9x^2} = 4 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \ge 0 \\ 9x^2 - 12x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{3}$.

Với $t = -10$, suy ra: $\sqrt{10-9x^2} = -10 - 3x$: vô nghiệm $\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{10}}{3}; \frac{\sqrt{10}}{3}\right]$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{1}{3}\cdot$

☙ ***Lời giải 2***. Đặt một ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Đặt $y=\sqrt{10-9x^2}\ge 0,$ suy ra: $\begin{cases}9x^2+y^2=10\\3x+y=5-xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3x+y)^2-6xy=10\\xy=5-(3x+y)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(3x+y)^2+6.(3x+y)-40=0\\xy=5-(3x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y=4\\3x.y=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}3x+y=-10\\3x.y=45\end{cases}$ (loại)

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x=1\\y=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}3x=3\\y=1\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{1}{3},\ x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{1}{3}\cdot$

BT 149. Giải phương trình: $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9.$ $\quad(x\in\mathbb{R})$

Điều kiện: $-\sqrt{17}\le x\le\sqrt{17}.$

☙ ***Lời giải 1***. Đặt một ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai

Đặt $t=x+\sqrt{17-x^2},$ suy ra: $t^2=17+2x\sqrt{17-x^2}\Leftrightarrow x\sqrt{17-x^2}=\dfrac{t^2-17}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow t+\dfrac{t^2-17}{2}=9\Leftrightarrow t^2+2t-35=0\Leftrightarrow t=5$ hoặc $t=-7.$

Với $t=-7,$ suy ra: $\sqrt{17-x^2}=-7-x:$ vô nghiệm $\forall x\in\left[-\sqrt{17};\sqrt{17}\right]\cdot$

Với $t=5,$ suy ra: $\sqrt{17-x^2}=5-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5\\x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right..$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=4.$

☙ ***Lời giải 2***. Đặt một ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Đặt $y=\sqrt{17-x^2}\ge 0,$ suy ra: $\begin{cases}x^2+y^2=17\\x+y+xy=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=17\\xy=9-(x+y)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2+2.(x+y)-35=0\\xy=9-(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\xy=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x+y=-7\\xy=16\end{cases}$ (loại)

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=4.$

BT 150. Giải phương trình: $2x^2+x+\sqrt{x^2+3}+2x\sqrt{x^2+3}=9$ $\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

☙ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+3}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\ge 0,$ suy ra: $t^2=2x^2+2x\sqrt{x^2+3}+3.$

$(*)\Leftrightarrow t^2+t-12=0\Leftrightarrow t=-4$ (loại) hoặc $t=3.$

Suy ra: $\sqrt{x^2+3}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x^2-6x+9=x^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

BT 151. Giải phương trình: $x\cdot\sqrt[3]{35-x^3}\cdot(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}$, suy ra hệ: $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ xy.(x+y)=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy.(x+y)=35 \\ xy.(x+y)=30 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=125=5^3 \\ xy.(x+y)=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Kết luận: Nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2,\ x=3$.

BT 152. Giải phương trình: $\dfrac{3-x}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{3+x}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{4}{3}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-5<x<5$.

Ta có: $(*)\Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{5-x})^2-2}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{(\sqrt{5+x})^2-2}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})-2\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{5+x}}\right)=\dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})-\dfrac{2.(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{\sqrt{25-x^2}}=\dfrac{4}{3}$ (**)

Đặt $t=\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}>0,\ t\in\left(\sqrt{10};\sqrt{20}\right]\cdot$ Suy ra: $\sqrt{25-x^2}=\dfrac{t^2-10}{2}\cdot$

$(**)\Leftrightarrow t-\dfrac{4t}{t^2-10}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 3t^3-4t^2-42t+40=0\Leftrightarrow (t-4)\cdot(3t^2-8t-10)=0$

$\Leftrightarrow t=4$ (nhận) hoặc $t=\dfrac{-4-\sqrt{46}}{3}$ (loại) hoặc $t=\dfrac{-4+\sqrt{46}}{3}$ (loại).

Suy ra: $\sqrt{25-x^2}=3\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm 4$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-4,\ x=4$.

BT 153. Giải phương trình: $\dfrac{1+x}{\sqrt{17-4x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{17+4x}}=\dfrac{4}{5}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{17}{4}<x<\dfrac{17}{4}\cdot$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{17-4x}>0 \\ b=\sqrt{17+4x}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=17-4x \\ b^2=17+4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=17-a^2 \\ 4x=17+b^2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=34$ (**)

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1+\dfrac{17-a^2}{4}}{a}+\frac{1-\dfrac{17+b^2}{4}}{b}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{21-a^2}{a}+\frac{21-b^2}{b}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{21}{a}+\frac{21}{b}=a+b+\frac{16}{5}$$

Kết hợp $(**)$ được hệ: $\begin{cases} \dfrac{21}{a}+\dfrac{21}{b}=a+b+\dfrac{16}{5} \\ a^2+b^2=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{21.(a+b)}{ab}=a+b+\dfrac{16}{5} \\ (a+b)^2-2ab=34 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{42.(a+b)}{ab}=2.(a+b)+\dfrac{32}{5} \\ 2ab=(a+b)^2-34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 210.(a+b)=\left[5.(a+b)+16\right]\cdot\left[(a+b)^2-34\right] \\ 2ab=(a+b)^2-34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5.(a+b)^3+16.(a+b)^2-380.(a+b)-544=0 \\ 2ab=(a+b)^2-34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ ab=15 \end{cases}$$

Suy ra: $\sqrt{(17-4x)(17+4x)}=15 \Leftrightarrow 17^2-16x^2=15^2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-1,\ x=1.$

BT 154. Giải phương trình: $2\sqrt{3x+7}-5.\sqrt[3]{x-6}=4$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{7}{3}\cdot$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{3x+7}\ge 0 \\ b=\sqrt[3]{x-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=3x+7 \\ b^3=x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=3x+7 \\ -3b^2-3x+18 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} a^2-3b^3=25.$

Kết hợp với $(*)$ được hệ:

$$\begin{cases} a^2-3b^3=25 \\ 2a-5b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4+5b}{2} \\ 12b^3-25b^2-40b+84=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=\dfrac{1\pm\sqrt{2017}}{2} \end{array}\right.\cdot$$

Với $b=2,$ suy ra: $\sqrt[3]{x-6}=2 \Leftrightarrow x-6=8 \Leftrightarrow x=14.$

Với $b=\dfrac{1\pm\sqrt{2017}}{2},$ suy ra: $\sqrt[3]{x-6}=\dfrac{1\pm\sqrt{2017}}{2} \Leftrightarrow x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{2017}}{2}\right)^3+6.$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x=14,\ x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{2017}}{2}\right)^3+6.$

BT 155. Giải phương trình: $2\sqrt{6-5x}+3\sqrt[3]{7-6x}=5$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $6-5x\ge 0 \Leftrightarrow x\le \dfrac{6}{5}\cdot$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{6-5x}\ge 0 \\ b=\sqrt[3]{7-6x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=6-5x \\ b^3=7-6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a^2=36-30x \\ 5b^3=35-30x \end{cases} \Rightarrow 6a^2-5b^3=1.$

Kết hợp với $(*)$ được hệ:

$$\begin{cases} 6a^2 - 5b^3 = 1 \\ 2a + 3b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5-3b}{2} \\ 10b^3 - 27b^2 + 90b - 73 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1.$

_BT 156._ Giải phương trình: $4.\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt{7x+2} = 1 \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $7x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{2}{7}\cdot$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{2x-1} \\ b = \sqrt{7x+2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 2x - 1 \\ b^2 = 7x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a^3 = 14x - 7 \\ 2b^2 = 14x + 4 \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} 7a^3 - 2b^2 = -11.$

Kết hợp với $(*)$ được hệ: $\begin{cases} 7a^3 - 2b^2 = -11 \\ 4a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a - 1 \\ 7a^3 - 32a^2 + 16a + 9 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a - 1 \\ (a-1)(7a^2 - 25a - 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = \dfrac{25 + \sqrt{877}}{14}$ hoặc $a = \dfrac{25 - \sqrt{877}}{14}\cdot$

Do $b \geq 0,$ suy ra: $b = 4a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \dfrac{1}{4}$ nên loại $a = \dfrac{25 - \sqrt{877}}{14} < 0.$

Với $a = 1,$ suy ra: $\sqrt[3]{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Với $a = \dfrac{25 + \sqrt{877}}{14},$ suy ra: $\sqrt[3]{2x-1} = \dfrac{25 + \sqrt{877}}{14} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{25 + \sqrt{877}}{14}\right)^3 + \dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = 1,\ x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{25 + \sqrt{877}}{14}\right)^3 + \dfrac{1}{2}\cdot$

_BT 157._ Giải phương trình: $4\sqrt[3]{5x-4} + \sqrt[3]{10-9x} = 5 \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{5x-4} \\ b = \sqrt[3]{10-9x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 5x - 4 \\ b^3 = 10 - 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^3 = 45x - 36 \\ 5b^3 = 50 - 45x \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 9a^3 + 5b^3 = 14.$ Kết hợp với $(*)$ suy ra hệ: $\begin{cases} 9a^3 + 5b^3 = 14 \\ 4a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 4a \\ -311a^3 + 1200a^2 - 1500a + 611 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 4a \\ (a-1)\cdot(311a^2 - 889a + 611) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ hoặc $a = \dfrac{889 \pm \sqrt{30237}}{622}\cdot$

Với $a = 1,$ suy ra: $\sqrt[5]{5x-4} = 1 \Leftrightarrow 5x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Với $a = \dfrac{889 \pm \sqrt{30237}}{622},$ suy ra: $x = \dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{889 \pm \sqrt{30237}}{622}\right)^3 + \dfrac{4}{5}\cdot$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{889\pm\sqrt{30237}}{622}\right)^3+\dfrac{4}{5}\cdot$

BT 158. Giải phương trình: $\sqrt{5-4x}+\sqrt[3]{x+7}=3$ $\quad(*)\quad$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $5-4x\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{5}{4}\cdot$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{5-4x}\ge 0\\ b=\sqrt[3]{x+7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=5-4x\\ b^3=x+7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=5-4x\\ 4b^3=4x+28\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow} a^2+4b^3=33.$

Kết hợp $(*)$ được hệ $\begin{cases}a^2+4b^3=33\\ a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-b\\ 4b^3+b^2-6b-24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ a=1\end{cases}\Rightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1.$

BT 159. Giải phương trình: $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$ $\quad(*)\quad$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\le 12.$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[3]{24+x}\\ b=\sqrt{12-x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3=24+x\\ b^2=12-x\end{cases}\Rightarrow a^3+b^2=36.$ Kết hợp với $(*)$ được hệ

phương trình: $\begin{cases}a+b=6\\ a^3+b^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=6-a\\ a^3+a^2-12a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=6\end{cases}\vee\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}\vee\begin{cases}a=-4\\ b=10\end{cases}.$

Với $a=0,$ suy ra: $\sqrt[3]{24+x}=0\Leftrightarrow x+24=0\Leftrightarrow x=-24.$

Với $a=3,$ suy ra: $\sqrt[3]{24+x}=3\Leftrightarrow x+24=27\Leftrightarrow x=3.$

Với $a=-4,$ suy ra: $\sqrt[3]{24+x}=-4\Leftrightarrow x+24=-64\Leftrightarrow x=-88.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-24,\ x=3,\ x=-88.$

BT 160. Giải phương trình: $\sqrt{3-2x}+\sqrt[3]{5+3x}=3$ $\quad(*)\quad$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $3-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{3}{2}\cdot$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{3-2x}\ge 0\\ b=\sqrt[3]{5+3x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=3-2x\\ b^3=5+3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2=9-6x\\ 2b^3=10+6x\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow} 3a^2+2b^3=19.$

Kết hợp với $(*)$ được hệ: $\begin{cases}3a^2+2b^3=19\\ a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-b\\ 3.(3-b)^2+2b^3=19\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-b\\ 2b^3+3b^2-18b+8=0\end{cases}\Leftrightarrow(a;b)=\left\{(-4;7);(2;1);\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)\right\}.$

Với $a=7,$ suy ra: $\sqrt{3-2x}=7\Leftrightarrow 3-2x=49\Leftrightarrow x=-23.$

Với $a=1,$ suy ra: $\sqrt{3-2x}=1\Leftrightarrow 3-2x=1\Leftrightarrow x=1.$

Với $a=\frac{5}{2}$, suy ra: $\sqrt{3-2x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 3-2x=\frac{25}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{13}{8}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-23,\ x=-\frac{13}{8},\ x=1.$

BT 161. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}=3$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1.$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{1-x^2}\ge 0\\ b=\sqrt[3]{1-x^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=1-x\\ b^3=1-x\end{cases}\overset{-}{\Rightarrow} a^2-b^3=0\Leftrightarrow a^2=b^3.$ Kết hợp với (*)

được hệ $\begin{cases}a+2b=3\\ a^2=b^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-2b\\ (3-2b)^2=b^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-2b\\ b^3-4b^2+12b-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=1\end{cases}.$

Với $a=1$, suy ra: $\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow 1-x^2=1\Leftrightarrow x=0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=0.$

BT 162. Giải phương trình: $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=2$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[3]{1-x}\\ b=\sqrt[3]{1+x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3=1-x\\ b^3=1+x\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow} a^3+b^3=2.$ Kết hợp với (*) được hệ

phương trình: $\begin{cases}a+b=2\\ a^3+b^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\ a^2-2a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\cdot$ Suy ra: $\sqrt[3]{1-x}=1\Leftrightarrow x=0.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0.$

BT 163. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{5x-8}+3\sqrt[3]{22-2x}=12$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[3]{5x-8}\\ b=\sqrt[3]{22-2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3=5x-8\\ b^3=22-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a^3=10x-16\\ 5b^3=110-10x\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow} 2a^2+5b^3=94.$

Suy ra: $\begin{cases}2a+3b=12\\ 2a^3+5b^3=94\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{12-3b}{2}\\ 2.\left(\dfrac{12-3b}{2}\right)^3+5b^3=94\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{12-3b}{2}\\ 7b^3-324b^2+1296b=1352\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{12-3b}{2}\\ (b-2)\cdot(7b^2-310b+676)=0\end{cases}\Rightarrow b=2$ hoặc $b=\frac{155\pm\sqrt{19293}}{7}\cdot$

Với $b=2$, suy ra: $\sqrt[3]{22-2x}=2\Leftrightarrow 22-2x=8\Leftrightarrow x=7.$

Với $b=\frac{155\pm\sqrt{19293}}{7}$, suy ra: $x=11-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{155\pm\sqrt{19293}}{7}\right)^3\cdot$

Kết luận: Các nghiệm của phương trình là $x=7,\ x=11-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{155\pm\sqrt{19293}}{7}\right)^3$.

BT 164. Giải phương trình: $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{2}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $1\le x\le 5$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[4]{5-x}\ge 0\\ b=\sqrt[4]{x-1}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^4=5-x\\ b^4=x-1\end{cases}\Leftrightarrow a^4+b^2=4.$ Kết hợp với (*) được hệ phương trình $\begin{cases}a+b=\sqrt{2}\\ a^4+b^4=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{2}\\ \left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2.(ab)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{2}\\ (2-2ab)^2-2(ab)^2=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{2}\\ 2(ab)^2-8ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{2}\\ ab=0\end{cases}\vee\begin{cases}a+b=\sqrt{2}\\ ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=0\end{cases}\vee\begin{cases}a=0\\ b=\sqrt{2}\end{cases}.$

Với $a=\sqrt{2}$, suy ra: $\sqrt[4]{5-x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow 5-x=4\Leftrightarrow x=1.$

Với $a=0$, suy ra: $\sqrt[4]{5-x}=0\Leftrightarrow 5-x=0\Leftrightarrow x=5.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1,\ x=5.$

BT 165. Giải phương trình: $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{12+x}=3$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-12\le x\le 5$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[4]{5-x}\ge 0\\ b=\sqrt[4]{12+x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^4=5-x\\ b^4=12+x\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}a^4+b^4=17.$

Kết hợp với phương trình (*) được hệ: $\begin{cases}a+b=3\\ a^4+b^4=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ (a^2+b^2)^2-2a^2b^2=17\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ \left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ (9-2ab)^2-2a^2b^2=17\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ a^2b^2-18ab+64=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ ab=2\end{cases}\vee\begin{cases}a+b=3\\ ab=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}.$

Với $a=1$, suy ra: $\sqrt[4]{5-x}=1\Leftrightarrow 5-x=1\Leftrightarrow x=4.$

Với $a=2$, suy ra: $\sqrt[4]{5-x}=2\Leftrightarrow 5-x=16\Leftrightarrow x=-11.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-11,\ x=4.$

BT 166. Giải phương trình: $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}47-2x\ge 0\\ 35+2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{35}{2}\le x\le\frac{47}{2}.$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[4]{47-2x}\ge 0 \\ b=\sqrt[4]{35+2x}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4=47-2x \\ b^4=35+2x \end{cases} \Rightarrow a^4+b^4=82.$ Kết hợp với phương trình $(*)$ được hệ: $\begin{cases} a+b=4 \\ a^4+b^4=82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^4+(4-a)^4=82 \end{cases} \Rightarrow a^4+(a-4)^4=82$ (1)

Đặt $a=t+2,$ thì (1) $\Leftrightarrow (t+2)^4+(t-2)^4=82 \Leftrightarrow t^4+24t^2-25=0 \Leftrightarrow t=\pm 1.$

Với $t=1$ thì $a=3.$ Suy ra: $\sqrt[4]{47-2x}=3 \Leftrightarrow 47-2x=81 \Leftrightarrow x=-17.$

Với $t=-1$ thì $a=1.$ Suy ra: $\sqrt[4]{47-2x}=1 \Leftrightarrow 47-2x=1 \Leftrightarrow x=23.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-17,\ x=23.$

BT 167. Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-2x+5}=2.\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x-1}\ge 0 \\ b=\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4}\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4=(x-1)^2 \\ b^2=(x-1)^2+4 \end{cases} \Rightarrow a^4-b^2=-4.$

Kết hợp với $(*)$, suy ra hệ phương trình: $\begin{cases} a^4-b^2=-4 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-a \\ a^4-(2-a)^2+4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2-a \\ a^4-a^2+4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}\cdot$ Suy ra: $\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 168. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{2x^2+2x-3}=3.\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x^2+2x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\le -\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ hoặc $x\ge \dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\cdot$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+x+2}\ge 0 \\ b=\sqrt{2x^2+2x-3}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2=2x^2+2x+4 \\ b^2=2x^2+2x-3 \end{cases} \Rightarrow 2a^2-b^2=7.$ Kết hợp với $(*)$, được hệ $\begin{cases} a+b=3 \\ 2a^2-b^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ 2.(3-b)^2-b^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-8 \\ b=11 \end{cases}$ (loại).

Với $a=2,$ suy ra: $\sqrt{x^2+x+2}=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-2,\ x=1.$

BT 169. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3-2x}.(2\sqrt{3x-2}+1)=3(4x-3).\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $3x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \dfrac{2}{3}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3-2x}=\frac{\left[(2\sqrt{3x-2}+1)\cdot(2\sqrt{3x-2}-1)\right]}{(2\sqrt{3x-2}+1)} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3-2x}=2\sqrt{3x-2}-1$$

$(**)$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{3-2x} \\ b = \sqrt{3x-2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 3-2x \\ b^2 = 3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^3 = 9-6x \\ 2b^2 = 6x-4 \end{cases} \Rightarrow 3a^3 + 2b^2 = 5.$

Kết hợp với (**) được hệ: $\begin{cases} 3a^3 + 2b^2 = 5 \\ a = 2b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a^3 + (2b)^2 = 10 \\ 2b = a+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a^3 + a^2 + 2a - 9 = 0 \\ 2b = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)\cdot(6a^2+7a+9) = 0 \\ 2b = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$

Với $a = 1,$ suy ra: $\sqrt[3]{3-2x} = 1 \Leftrightarrow 3-2x = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1.$

BT 170. Giải phương trình: $3\sqrt[3]{3x-2}.(7+\sqrt{4x-3}) = 26-2x. \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $4x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{4}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 3.\sqrt[3]{3x-2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(7+\sqrt{4x-3}).(7-\sqrt{4x-3})}{7+\sqrt{4x-3}} \Leftrightarrow 6.\sqrt[3]{3x-2} = 7-\sqrt{4x-3} \quad (**)$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{3x-2} \\ b = \sqrt{4x-3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 3x-2 \\ b^2 = 4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 = 12x-8 \\ 3b^2 = 12x-9 \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} 4\text{a}^3 - 3b^2 = 1.$

Kết hợp với (**) được hệ: $\begin{cases} 4a^3 - 3b^2 = 1 \\ 6a = 7-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7-6a \\ a^3 - 27a^2 + 63a - 37 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7-6a \\ (a-1)\cdot(a^2-26a+37) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 13 \pm 2\sqrt{33} \\ b < 0 \end{cases}$ (loại).

Với $a = 1,$ suy ra: $\sqrt[3]{3x-2} = 1 \Leftrightarrow 3x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1.$

BT 171. Giải phương trình: $\sqrt[3]{4-3x} = \dfrac{8-5x}{2+\sqrt{5x-4}} \quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $5x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{4}{5}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{4-3x} = \dfrac{(2+\sqrt{5x-4})\cdot(2-\sqrt{5x-4})}{2+\sqrt{5x-4}} = 2-\sqrt{5x-4} \quad (**)$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{4-3x} \\ b = \sqrt{5x-4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 4-3x \\ b^2 = 5x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^3 = 20-15x \\ 3b^2 = 15x-12 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 5a^3 + 3b^2 = 8.$

Kết hợp với (**) được hệ: $\begin{cases} 5a^3 + 3b^2 = 8 \\ a = 2-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2-a \\ 5a^3 + 3a^2 - 12a + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ (nhận) hoặc $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$ (nhận) hoặc $a = \dfrac{5}{2} \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} < 0$ (loại).

Với $a = 1,$ suy ra: $\sqrt[3]{4-3x} = 1 \Leftrightarrow 4 - 3x = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Với $a = -2,$ suy ra: $\sqrt[3]{4-3x} = -2 \Leftrightarrow 4 - 3x = -8 \Leftrightarrow x = 4.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1,\ x = 4.$

BT 172. Giải phương trình: $\sqrt[4]{3x+1} + \sqrt[4]{4x+1} = 2\sqrt[4]{x+1}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{4}\cdot$ Ta có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{3x+1}{x+1}} + \sqrt[4]{\dfrac{4x+1}{x+1}} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{(x+1)+2x}{x+1}} + \sqrt[4]{\frac{(x+1)+3x}{x+1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{1+\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[4]{1+\frac{3x}{x+1}} = 2 \qquad (**)$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[4]{1+\dfrac{2x}{x+1}} \geq 0 \\ b = \sqrt[4]{1+\dfrac{3x}{x+1}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = 1 + 2\cdot\dfrac{x}{x+1} \\ b^4 = 1 + 3\cdot\dfrac{x}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^4 = 3 + 6\cdot\dfrac{x}{x+1} \\ 2b^4 = 1 + 6\cdot\dfrac{x}{x+1} \end{cases} \Rightarrow 3a^4 - 2b^4 = 2.$

Kết hợp với $(**)$ được hệ: $\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a^4 - 2b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ a^4 + 16a^3 - 48a^2 + 64a - 33 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ (a-1)\cdot(a^3 + 17a^2 - 31a + 33) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases},\ \text{suy ra: } \sqrt[4]{1+\frac{2x}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Do ta luôn có: $a^3 + 17a^2 - 31a + 33 = a^3 + 17.\left(a - \dfrac{31}{44}\right)^2 + \dfrac{1283}{68} > 0,\ \forall a \geq 0.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 0.$

BT 173. Giải phương trình: $\sqrt[4]{9x+4} + \sqrt[4]{3x-2} = 2\sqrt[4]{1+6x}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \dfrac{2}{3}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{9x+4}{6x+1}} + \sqrt[4]{\frac{3x-2}{6x+1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{4 - \frac{15x}{6x+1}} + \sqrt[4]{\frac{15x}{6x+1} - 2} = 2 \qquad (**)$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[4]{4 - \dfrac{15x}{6x+1}} \geq 0 \\ b = \sqrt[4]{\dfrac{15x}{6x+1} - 2} \geq 0 \end{cases},\ (0 \leq a; b \leq 2) \Rightarrow \begin{cases} a^4 = 4 - \dfrac{15x}{6x+1} \\ b^4 = \dfrac{15x}{6x+1} - 2 \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 2.$

Suy ra hệ: $\begin{cases} a + b = 2 \\ a^4 + b^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = 4 \\ (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 - 2ab \\ (4 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a^2b^2 - 8ab + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} ab = 7 \\ a + b = 2 \end{cases} \text{ (loại do } ab \leq 4)$$

Với $ab = 1,$ suy ra: $\sqrt[4]{\dfrac{9x+4}{6x+1}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{3x-2}{6x+1}} = 1 \Leftrightarrow (9x+4)(3x-2) = (6x+1)^2 \Leftrightarrow x = -1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-1$.

BT 174. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x^2+12x+3}=\sqrt[4]{x^2-3x+3}+\sqrt[4]{x}$ (∗) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$. Do $x=0$ không là nghiệm nên xét $x>0$.

Chia 2 vế cho $x>0$, thì $(*)\Leftrightarrow \sqrt[4]{12+x+\dfrac{3}{x}}=\sqrt[4]{x+\dfrac{3}{x}-3}+1$ (∗∗)

Đặt $t=x+\dfrac{3}{x}\overset{\text{Cauchy}}{\ge}2\sqrt{3}$. Khi đó: $(**)\Leftrightarrow \sqrt[4]{12+t}=\sqrt[4]{t-3}+1$ (∗∗∗)

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[4]{12+t}\ge 0\\ b=\sqrt[4]{t-3}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^4=12+t\\ b^4=t-3\end{cases}\overset{-}{\Rightarrow} a^4-b^4=15.$ Kết hợp với (∗∗∗) được hệ phương trình $\begin{cases}a=b+1\\ a^4-b^4=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b+1)^4-b^4=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ 2b^3+3b^2+2b-7=0\end{cases}\Rightarrow b=1.$

Suy ra: $\sqrt[4]{t-3}=1\Leftrightarrow t=4\Rightarrow x+\dfrac{3}{x}=4\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=3$.

BT 175. Giải phương trình: $\sqrt[4]{7x^2+2x+13}=\sqrt[4]{x+3}+\sqrt[4]{3x-x^2+8}$ (∗)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x+3\ge 0\\ 8+3x-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{41}}{2}\le x\le\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}$.

Với điều kiện đã cho thì $x+3>0$, nên chia 2 vế cho lượng $x+3$, được:

$(*)\Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{7x^2+2x+13}{x+3}}=1+\sqrt[4]{\dfrac{8+3x-x^2}{x+3}}\Leftrightarrow \sqrt[4]{7\cdot\dfrac{x^2+1}{x+3}+2}-\sqrt[4]{3-\dfrac{x^2+1}{x+3}}=1$ (∗∗)

Đặt $t=\dfrac{x^2+1}{x+3}>0$ thì $(**)\Leftrightarrow\sqrt[4]{7t+2}-\sqrt[4]{3-t}=1$ (∗∗∗)

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[4]{7t+2}\ge 0\\ b=\sqrt[4]{3-t}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^4=7t+2\\ b^4=3-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4=7t+2\\ 7b^4=21-7t\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow} a^4+7b^4=23.$

Kết hợp với (∗∗∗) được hệ phương trình

$\begin{cases}a-b=1\\ a^4+7b^4=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b+1)^4+7b^4=23\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ 4a^4+2b^3+3b^2+2b-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b-1)(4b^3+6b^2+9b+11)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}.$

Với $a=2$, thì $\sqrt[4]{7t+2}=2\Leftrightarrow t=2$, suy ra: $x^2+1=2(x+3)\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1\pm\sqrt{6}$.

BT 176. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x-4x^3+6}+\sqrt[4]{x-x^3+3}=2\sqrt[4]{x+2}$ (∗) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x-4x^3+6\ge 0 \\ x-x^3+3\ge 0 \end{cases}\cdot$ Do $x=-2$ không là nghiệm nên:

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{x-4x^3+6}{x+2}}+\sqrt[4]{\frac{x-x^3+3}{x+2}}=2\ (**).$$

Đặt $a=\sqrt[4]{\frac{x-4x^3+6}{x+2}},\ b=\sqrt[4]{\frac{x-x^3+3}{x+2}}$.

Với $a\ge 0,\ b\ge 0.$ Ta có: $a^4-4b^4=\frac{x-4x^3+6}{x+2}-\frac{4.(x-x^3+3)}{x+2}=\frac{-3x-6}{x+2}=-3.$

Kết hợp với $(**)$, suy ra hệ: $\begin{cases} a+b=2 \\ a^4-4b^4=-3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ (2-b)^4-4b^4+3=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ 3b^4+8b^3-24b^2+32b-19=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ (b-1)(3b^3+11b^2-13b+19)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ 3b^3+11b^2-13b+19=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ 0=3b^3+11.\left(b-\frac{13}{22}\right)^2+\frac{667}{44}>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}.$$

Suy ra: $\sqrt[4]{\frac{x-4x^3+6}{x+2}}=1\Leftrightarrow x-4x^3+6=x+2\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=1$.

BT 177. Giải phương trình: $\sqrt[4]{\frac{x^2+4x+17}{x^2-x+7}}=1+\sqrt[4]{\frac{4x^2-5x+26}{x^2-x+7}}$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{(x^2-x+7)+5x+10}{x^2-x+7}}=1+\sqrt[4]{\frac{4.(x^2-x+7)-(x+2)}{x^2-x+7}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{1+5\cdot\frac{x+2}{x^2-x+7}}=1+\sqrt[4]{4-\frac{x+2}{x^2-x+7}}\qquad (**)$$

Đặt $a=\sqrt[4]{1+5\cdot\frac{x+2}{x^2-x+7}}\ge 0,\ b=\sqrt[4]{4-\frac{x+2}{x^2-x+7}}\ge 0.$ Suy ra: $a^4+5b^4=21.$

Kết hợp với $(**)$ được hệ phương trình: $\begin{cases} a=1+b \\ a^4+5b^4=21 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1+b \\ (1+b)^4+5b^4=21 \end{cases}.$

Giải hệ này, suy ra $a,\ b.$ Từ đó tìm được $x.$

BT 178. Giải phương trình: $5\cdot\sqrt[4]{(3-x)^2}-2.\sqrt[4]{9-x^2}-7\cdot\sqrt[4]{(x+3)^2}=0$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $-3\le x\le 3.$ Đặt: $a=\sqrt[4]{3-x}\ge 0,\ b=\sqrt[4]{3+x}\ge 0.$

$(*)\Leftrightarrow 5a^2-2ab-7b^2=0\Leftrightarrow (a+b)(5a-7b)=0\Leftrightarrow a=-b$ (loại) hoặc $5a=7b.$

Suy ra: $5\sqrt[4]{3-x}=7\sqrt[4]{3+x}\Leftrightarrow 625.(3-x)=2401.(3+x)\Leftrightarrow x=-\dfrac{2664}{1513}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{2664}{1513}\cdot$

_BT 179._ Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x+2)^2}+3\sqrt[3]{(x-2)^2}=4\sqrt[3]{x^2-4}$ $\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[3]{x+2}\\ b=\sqrt[3]{x-2}\end{cases}$, suy ra: $ab=\sqrt[3]{x^2-4}.$

$(*)\Leftrightarrow a^2+3a^2=4ab\Leftrightarrow(a-3b)\cdot(a-b)=0\Leftrightarrow a=b$ hoặc $a=3b.$

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{x-2}\Leftrightarrow x+2=x-2:$ vô nghiệm.

Với $a=3b,$ suy ra: $\sqrt[3]{x+2}=3\sqrt[3]{x-2}\Leftrightarrow x+2=27(x-2)\Leftrightarrow x=\dfrac{28}{13}\cdot$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{28}{13}\cdot$

_BT 180._ Giải phương trình: $4\sqrt[3]{(2x+1)^2}+3\sqrt[3]{(1-2x)^2}=8\sqrt[3]{4x^2-1}$ $\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[3]{2x+1}\\ b=\sqrt[3]{2x-1}\end{cases}$, suy ra: $ab=\sqrt[3]{4x^2-1}.$

$(*)\Leftrightarrow 4a^2+3b^2=8ab\Leftrightarrow(2a-b)\cdot(2a-3b)=0\Leftrightarrow 2a=b$ hoặc $2a=3b.$

Với $2a=b,$ suy ra: $2\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow 8.(2x+1)=2x-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{9}{14}\cdot$

Với $2a=3b,$ suy ra: $2\sqrt[3]{2x+1}=3\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow 8.(2x+1)=27.(2x-1)\Leftrightarrow x=\dfrac{35}{38}\cdot$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là $x=-\dfrac{9}{14},\ x=\dfrac{35}{38}\cdot$

_BT 181._ Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+6x+9}-4\sqrt[3]{6x-x^2-9}+5\sqrt[3]{9-x^2}=0$ $\quad(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{(x+3)^2}+4.\sqrt[3]{(x-3)^2}=5.\sqrt[3]{x^2-9}\quad(**).$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[3]{x+3}\\ b=\sqrt[3]{x-3}\end{cases}\Rightarrow ab=\sqrt[3]{x^2-9}.$

$(**)\Leftrightarrow a^2+4b^2=5ab\Leftrightarrow(a-b)\cdot(a-4b)=0\Leftrightarrow a=b$ hoặc $a=4b.$

Do ta luôn có: $x+3>x-3$ hay $\sqrt[3]{x+3}>\sqrt[3]{x-3}\Leftrightarrow a>b$ nên sẽ loại $a=b.$

Với $a=4b,$ suy ra: $\sqrt[3]{x+3}=4.\sqrt[3]{x-3}\Leftrightarrow x+3=64.(x-3)\Leftrightarrow x=\dfrac{65}{21}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{65}{21}\cdot$

BT 182. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{(3x-1)^2}+3\sqrt[3]{(4x-1)^2}=5\sqrt[3]{12x^2-7x+1}$ $\quad(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{3x-1} \\ b=\sqrt[3]{4x-1} \end{cases} \Rightarrow ab=\sqrt[3]{12x^2-7x+1}.$

$(**)\Leftrightarrow 2a^2+3b^2=5ab\Leftrightarrow(a-b)\cdot(2a-3b)=0\Leftrightarrow a=b$ hoặc $2a=3b.$

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{4x-1}\Leftrightarrow 3x-1=4x-1\Leftrightarrow x=0.$

Với $2a=3b,$ suy ra: $2\sqrt[3]{3x-1}=3\sqrt[3]{4x-1}\Leftrightarrow 8.(3x-1)=27.(4x-1)\Leftrightarrow x=\dfrac{19}{84}\cdot$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là $x=0,\ x=\dfrac{19}{84}\cdot$

BT 183. Giải phương trình: $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}+3\sqrt[3]{1-x^2}=5$ $\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt[3]{1-x} \\ b=\sqrt[3]{1+x} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^3=1-x \\ b^3=1+x \end{cases}\cdot$ Kết hợp với $(*)$ suy ra hệ: $\begin{cases} a+b+3ab=5 \\ a^3+b^3=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3ab=5-(a+b) \\ (a+b)^3-3ab.(a+b)-2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3ab=5-(a+b) \\ (a+b)^3+(a+b)^2-5(a+b)-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}\Rightarrow x=0.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0.$

BT 184. Giải phương trình: $3\sqrt{3x-2}+4\sqrt{4x-3}=7\sqrt[4]{12x^2-17x+6}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{3}{4}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow 3\sqrt{3x-2}+4\sqrt{4x-3}=7\sqrt[4]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3}$ $\quad(**)$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[4]{3x-2}\ge 0 \\ b=\sqrt[4]{4x-3}\ge 0 \end{cases}.$

$(**)\Leftrightarrow 3a^2+4b^2=7ab\Leftrightarrow(a-b)(3a-4b)=0\Leftrightarrow a=b$ hoặc $3a=4b.$

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt[4]{3x-2}=\sqrt[4]{4x-3}\Leftrightarrow 3x-2=4x-3\Leftrightarrow x=1.$

Với $3a=4b,$ suy ra: $3\sqrt[4]{3x-2}=4\sqrt[4]{4x-3}\Leftrightarrow 27.(3x-2)=256.(4x-3)\Leftrightarrow x=\dfrac{714}{943}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{714}{943}\cdot$

BT 185. Giải PT: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1.$ Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{1-x} \\ b=\sqrt{1+x} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a^3-b^3)\sqrt{1+ab}=2+ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ \left[(a-b)(a^2+b^2+ab)\right]\sqrt{1+ab}=2+ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a-b)\sqrt{1+ab}=1 \end{cases} \text{ (do } 2+ab>0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2+2ab=2 \\ (a-b)\sqrt{1+ab}=1 \end{cases}\cdot$$ Giải hệ này, tìm được $a,\ b,$ suy ra: $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

BT 186. Giải phương trình: $2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x^2}=5.\sqrt[4]{(x+1)(x-1)^2}$ (*)

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $-1\le x\le 1.$

$(*)\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x^2}=5.\sqrt[4]{1-x}.\sqrt[4]{1-x^2}$ (**)

Đặt $a=\sqrt[4]{1-x}\ge 0,\ b=\sqrt[4]{1-x^2}\ge 0.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow 2a^2+2b^2=5ab$

$\Leftrightarrow (2a-b)(a-2b)=0\Leftrightarrow 2a=b$ hoặc $a=2b.$

Với $2a=b,$ suy ra: $2\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[4]{1-x^2}\Leftrightarrow 16.(1-x)=1-x^2\Leftrightarrow x=1.$

Với $a=2b,$ suy ra: $\sqrt[4]{1-x}=2\sqrt[4]{1-x^2}\Leftrightarrow 1-x=16.(1-x^2)\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-\dfrac{15}{16}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm $x=1,\ x=-\dfrac{15}{16}\cdot$

BT 187. Giải phương trình: $\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(11-3x)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(3x-11)}=3$ (*)

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt[3]{3x-2} \\ b=\sqrt[3]{11-3x} \end{cases}\Rightarrow a^3+b^3=9.$

Kết hợp với (*) được hệ: $\begin{cases} a^2+b^2-ab=3 \\ a^3+b^3=9 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-ab=3 \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^2+(3-a)^2-a(3-a)=3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ a^2-3a+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \end{array}\right.\Rightarrow x=1\ \vee\ x=\frac{10}{3}\cdot$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1,\ x=\dfrac{10}{3}\cdot$

BT 188. Giải phương trình: $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\in(-1;1)\setminus\{0\}\cdot$ Đặt: $a=\sqrt{1-x}\ge 0,\ b=\sqrt{1+x}\ge 0.$

Suy ra: $a^2=1-x,\ b^2=1+x\Rightarrow a^2+b^2=2.$ Kết hợp (*) được hệ phương trình

$\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ \dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+b}=\dfrac{1}{ab} \end{cases}$ và giải hệ này tìm được $a,\ b.$ Suy ra: $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

BT 189. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{4-3x}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{(3x-2)(4-3x)}}$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\neq\dfrac{4}{3},\ x\neq\dfrac{2}{3}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{3x-2},\ b=\sqrt[3]{4-3x}.$

Suy ra hệ: $\begin{cases}a^3+b^3=2\\ a+b=\dfrac{2}{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^3-3ab(a+b)=2\\ ab(a+a)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^3=8\\ ab(a+b)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ ab=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\cdot$ Suy ra: $\sqrt[3]{3x-2}=1\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1.$

BT 190. Giải phương trình: $3(x^2-1)+4x=4x\sqrt{4x-3}$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

Điều kiện: $4x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{3}{4}\cdot$

Lời giải 1. Ta có: $(*)\Leftrightarrow 3x^2+(4x-3)-4x.\sqrt{4x-3}=0$ (1)

Đặt $y=\sqrt{4x-3}\geq 0$ thì $(1)\Leftrightarrow 3x^2-4xy+y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(3x-y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ 3x=y\end{array}\right.\cdot$

Với $x=y,$ suy ra: $\sqrt{4x-3}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right..$

Với $3x=y,$ suy ra: $\sqrt{4x-3}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 9x^2-4x+3=0\end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=3.$

Lời giải 2. Ta có: $(*)\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{4x-3}+4x-3=x^2\Leftrightarrow(2x-\sqrt{4x-3})^2=x^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\sqrt{4x-3}=x\\ 2x-\sqrt{4x-3}=-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{4x-3}=x\\ \sqrt{4x-3}=3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right..$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=3.$

Lời giải 3. Do $x\geq\dfrac{3}{4}\Rightarrow(3x^2+4x-3).x>0$ nên lũy thừa, ta được:

$(*)\Leftrightarrow 9x^4+24x^3-2x^2-24x+9=16x^2(4x-3)\Leftrightarrow 9x^4-40x^3+46x^2-24x+9=0$

$\Leftrightarrow(x-1)(x-3)(9x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=3.$

Lời giải 4. Sử dụng kỹ thuật liên hợp.

$(*)\Leftrightarrow 4x.(x-\sqrt{4x-3})=x^2-4x+3\Leftrightarrow\dfrac{4x.(x^2-4x+3)}{x+\sqrt{4x-3}}=x^2-4x+3$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+3)\cdot\left(\frac{4x}{x+\sqrt{4x-3}}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3 \\ \sqrt{4x-3}=3x:\ \text{VN}_o \end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=3.$

BT 191. Giải phương trình: $3x^2-13x+37=8(x-3)\sqrt{x+2}$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $x>3.$

$$(*)\Leftrightarrow 3.(x-3)^2+5.(x+2)-8.(x-3)\sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow 3\cdot\frac{(x-3)^2}{x+2}-8\cdot\frac{x-3}{\sqrt{x+2}}+5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+2}}=1 \text{ hoặc } \frac{x-3}{\sqrt{x+2}}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=x-3 \\ 5\sqrt{x+2}=3(x-3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{79+5\sqrt{205}}{18} \end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{7+\sqrt{21}}{2},\ x=\dfrac{79+5\sqrt{205}}{18}.$

Nhận xét. Ta có thể giải theo các cách khác như câu trên đối với bài tập này và các bài tập tiếp theo sau.

BT 192. Giải phương trình: $7x^2+x+2=7x\sqrt{x^2+x+2}$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $x>0$ do $7x^2+x+2>0,\ x^2+x+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

$$(*)\Leftrightarrow x^2+x+2-7.x.\sqrt{x^2+x+2}+6x^2=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+2}{x^2}-7\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x}+6=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x}=1 \vee \frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x}=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+2}=x \\ \sqrt{x^2+x+2}=6x \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{281}}{70}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{1+\sqrt{281}}{70}.$

BT 193. Giải phương trình: $3(x+1)\sqrt{x^2+12}=9x^2+20x-2$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}.$

$$(*)\Leftrightarrow 10.(x+1)^2-3.(x+1).\sqrt{x^2+12}-(x^2+12)=0$$

$$\Leftrightarrow 10\cdot\frac{(x+1)^2}{x^2+12}-3\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+12}}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+12}}=\frac{1}{2} \text{ hoặc } \frac{x+1}{\sqrt{x^2+12}}=-\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+12}=2.(x+1) \\ \sqrt{x^2+12}=-5.(x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{10}-4}{3} \text{ hoặc } x=\frac{-25-\sqrt{313}}{24}.$$

Kết luận: Các nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{2\sqrt{10}-4}{3},\ x=\dfrac{-25-\sqrt{313}}{24}.$

BT 194. Giải phương trình: $15x^2+12x+12=10(2x+1)\sqrt{x^2+3}\quad (*)\quad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $2x+1>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow 3.(2x+1)^2-10.(2x+1).\sqrt{x^2+3}+3.(x^2+3)=0$

$\Leftrightarrow 3\cdot\dfrac{(2x+1)^2}{x^2+3}-10\cdot\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}+3=0\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}=3$ hoặc $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\sqrt{x^2+3}=2x+1\\ \sqrt{x^2+3}=6x+3\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{114}-18}{35}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{114}-18}{35}\cdot$

BT 195. Giải phương trình: $3x^2+2x+7=3(x+1)\sqrt{x^2+3}\quad (*)\quad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x>-1$, do $3x^2+2x+7>0,\ x^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow (x+1)^2-3.(x+1).\sqrt{x^2+3}+2.(x^2+3)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{(x+1)^2}{x^2+3}-3\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}+2=0\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}=1$ hoặc $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}=2$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}=x+1$ hoặc $2\sqrt{x^2+3}=x+1\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1$.

BT 196. Giải phương trình: $2(x^2+18)=7\sqrt{x^3+27}\quad (*)\quad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x^3+27>0\Leftrightarrow (x+3)(x^2-3x+9)>0\Leftrightarrow x>-3.$

$(*)\Leftrightarrow 6\cdot(x+3)-7\cdot\sqrt{(x+3)(x^2-3x+9)}+2.(x^2-3x+9)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{6.(x+3)}{x^2-3x+9}-7\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-3x+9}}+2=0\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-3x+9}}=\dfrac{2}{3}\ \vee\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-3x+9}}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\sqrt{x+3}=2\sqrt{x^2-3x+9}\\ 2\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-3x+9}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{21\pm3\sqrt{33}}{8}$ hoặc $x=\dfrac{7\pm\sqrt{61}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{21\pm3\sqrt{33}}{8}$ hoặc $x=\dfrac{7\pm\sqrt{61}}{2}\cdot$

BT 197. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+8}=3x^2-3x+18\quad (*)\quad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x^3+8\geq 0\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)>0\Leftrightarrow x>-2.$

$(*)\Leftrightarrow 3.(x+2)-10.\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x+4}+3.(x^2-2x+4)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{3.(x+2)}{x^2-2x+4} - 10\sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}} = 3 \vee \sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = 3\sqrt{x^2-2x+4} \\ 3\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2-2x+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{177}}{2}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$.

<u>***BT 198.***</u> Giải phương trình: $x^2 + 5x + 7 = 7\sqrt{x^3+1}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

<u>***Lời giải***</u>. Điều kiện: $x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1) > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

$$(*) \Leftrightarrow 6.(x+1) - 7.\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-x+1} + (x^2-x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1} - 7 \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} = 1 \text{ hoặc } \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x^2-x+1} = 6\sqrt{x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \text{ hoặc } x = \frac{37 \pm \sqrt{1509}}{2}.$$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 0,\ x = 2,\ x = \dfrac{37 \pm \sqrt{1509}}{2}$.

<u>***BT 199.***</u> Giải phương trình: $3x^2 + 10x + 56 = \sqrt{x^3 - 64}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

<u>***Lời giải***</u>. Điều kiện: $x^3 - 64 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+16) > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

$$(*) \Leftrightarrow -2.(x-4) - \sqrt{x-4}.\sqrt{x^2+4x+16} + 3.(x^2+4x+16) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x-4}{x^2+4x+16} + \sqrt{\frac{x-4}{x^2+4x+16}} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-4}{x^2+4x+16}} = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = x^2 + 4x + 16 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 20 = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận: Phương trình đã cho vô nghiệm $x \in \varnothing$.

<u>***BT 200.***</u> Giải phương trình: $5x^2 + 11x - 2 = 2\sqrt{x^3 - 4x}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

<u>***Lời giải***</u>. Điều kiện: $x^3 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$.

$$(*) \Leftrightarrow 5.(x^2+2x) - 6.\sqrt{x.(x^2-4)} + (x-2) = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{x^2+2x}{x-2} - 6 \cdot \sqrt{\frac{x^2+2x}{x-2}} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+2x}{x-2}} = 1 \vee \sqrt{\frac{x^2+2x}{x-2}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = x - 2 \\ 25.(x^2+2x) = x - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{-49 \pm \sqrt{2201}}{50}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{-49 \pm \sqrt{2201}}{50}$.

BT 201. Giải phương trình: $4x^2+11=5\sqrt{8x^3-12x^2+6x+7}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $8x^3-12x^2+6x+7>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow 4\cdot(2x+1)-5\cdot\sqrt{(2x+1)(4x^2-8x+7)}+(4x^2-8x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\frac{2x+1}{4x^2-8x+7}-5\cdot\sqrt{\frac{2x+1}{4x^2-8x+7}}+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{2x+1}{4x^2-8x+7}}=1\\ \sqrt{\dfrac{2x+1}{4x^2-8x+7}}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=4x^2-8x+7\\ 16.(2x+1)=4x^2-8x+7\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=\frac{3}{2} \text{ hoặc } x=\frac{10\pm\sqrt{109}}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=1,\ x=\dfrac{3}{2},\ x=\dfrac{10\pm\sqrt{109}}{2}\cdot$

BT 202. Giải phương trình: $x^2+6x-7=4\sqrt{x^3-x^2-7x-20}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x^3-x^2-7x-20\ge 0\Leftrightarrow (x-4)(x^2+3x+5)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4.$

$$(*)\Leftrightarrow 3\cdot(x-4)-4\cdot\sqrt{(x-4)\cdot(x^2+3x+5)}+(x^2+3x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3.(x-4)}{x^2+3x+5}-4\sqrt{\frac{x-4}{x^2+3x+5}}+1=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x-4}{x^2+3x+5}}=1\ \vee\ \sqrt{\frac{x-4}{x^2+3x+5}}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=x^2+3x+5\\ 9.(x-4)=x^2+3x+5\end{array}\right.:\text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận: Phương trình đã cho vô nghiệm $x\in\varnothing$.

BT 203. Giải phương trình: $2x^2+13x=36+7\sqrt{x^3-24x+32}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x^3-24x+32\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}-2\\ x\ge 4\end{array}\right.$.

Do $x=4$ không là nghiệm của phương trình nên:

$$(*)\Leftrightarrow 2\cdot(x^2+4x-8)-7\cdot\sqrt{(x-4)(x^2+4x-8)}+5\cdot(x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2+4x-8}{x-4}-7\sqrt{\frac{x^2+4x-8}{x-4}}+5=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^2+4x-8}{x-4}}=1\ \vee\ \sqrt{\frac{x^2+4x-8}{x-4}}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+4x-8=x-4\\ 4.(x^2+4x-8)=25.(x-4)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=1\end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-4,\ x=1.$

BT 204. Giải phương trình: $2x^2-5x+2=4\sqrt{2(x^3-21x-20)}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x^3-21x-20\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le x\le -1 \\ x\ge 5\end{array}\right.$.

$$(*)\Leftrightarrow 2\cdot(x^2-4x-5)-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+4)\cdot(x^2-4x-5)}+3\cdot(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{x^2-4x-5}{x+4}-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}}+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2.(x^2-4x-5)=9.(x+4)\\ 2.(x^2-4x-5)=x+4\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{17\pm 3\sqrt{73}}{4}\text{ hoặc } x=\frac{9\pm\sqrt{193}}{4}.$$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{17\pm 3\sqrt{73}}{4}$, $x=\dfrac{9\pm\sqrt{193}}{4}$.

BT 205. Giải phương trình: $3(x^2+4x+5)=10\sqrt{x^3+5x^2+9x+6}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x^3+5x^2+9x+6\ge 0\Leftrightarrow (x+2)(x^2+3x+3)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -2.$

$$(*)\Leftrightarrow 3\cdot(x+2)-10\cdot\sqrt{(x+2)\cdot(x^2+3x+3)}+3\cdot(x^2+3x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3.(x+2)}{x^2+3x+3}-10\sqrt{\frac{x+2}{x^2+3x+3}}+3=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x+2}{x^2+3x+3}}=3\ \vee\ \sqrt{\frac{x+2}{x^2+3x+3}}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=9.(x^2+3x+3)\\ 9.(x+2)=x^2+3x+3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9x^2+26x+25=0\\ x^2-6x-15=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3\pm 2\sqrt{6}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=3\pm 2\sqrt{6}$.

BT 206. Giải phương trình: $3x^2-x\sqrt{2}+3=3\sqrt{x^4+1}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $x\in\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow 2(x^2-x\sqrt{2}+1)-3.\sqrt{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)}+(x^2+x\sqrt{2}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}-3\cdot\sqrt{\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}}+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}}=1\\ \sqrt{\dfrac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x\sqrt{2}+1=x^2+x\sqrt{2}+1\\ 4.(x^2-x\sqrt{2}+1)=x^2+x\sqrt{2}+1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0\text{ hoặc } x=\frac{5\sqrt{2}\pm\sqrt{14}}{6}.$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x=0$, $x=\dfrac{5\sqrt{2}\pm\sqrt{14}}{6}$.

BT 207. Giải phương trình: $8x^2+20x+1=\sqrt{64x^4+1}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $x \in \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3\cdot(8x^2+4x+1)-2\cdot(8x^2-4x+1)=\sqrt{(8x^2+4x+1)\cdot(8x^2-4x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\frac{8x^2+4x+1}{8x^2-4x+1}-\sqrt{\frac{8x^2+4x+1}{8x^2-4x+1}}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{8x^2+4x+1}{8x^2-4x+1}}=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

BT 208. Giải phương trình: $x^2+4x+1=\sqrt{x^4+x^2+1}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $x \in \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3\cdot(x^2-x+1)+2\sqrt{(x^2-x+1)\cdot(x^2+x+1)}-5\cdot(x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+2\cdot\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}-5=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

BT 209. Giải phương trình: $5x^2-x+5=5\sqrt{x^2(x^2+1)+1}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $x \in \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 2\cdot(x^2+x+1)-5\cdot\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}+3\cdot(x^2-x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-5\cdot\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}=1 \vee \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+1=x^2-x+1 \\ 4.(x^2+x+1)=9.(x^2-x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=\frac{13\pm\sqrt{69}}{10}\cdot$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x=0,\ x=\frac{13\pm\sqrt{69}}{10}\cdot$

BT 210. Giải phương trình: $\sqrt{3}(x^2-3x+1)=\sqrt{x^4+x^2+1}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x^2-3x+1>0 \Leftrightarrow x \le \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x \ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow 2\cdot(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}-(x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1$.

BT 211. Giải phương trình: $20x^2-3x+5=5\sqrt{16x^4-x^2+1}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $x \in \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3\cdot(4x^2-3x+1)-5\cdot\sqrt{(4x^2-3x+1)\cdot(4x^2+3x+1)}+2\cdot(4x^2+3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\frac{4x^2-3x+1}{4x^2+3x+1}-5\cdot\sqrt{\frac{4x^2-3x+1}{4x^2+3x+1}}+2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{4x^2-3x+1}{4x^2+3x+1}}=1 \text{ hoặc } \sqrt{\frac{4x^2-3x+1}{4x^2+3x+1}}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{39+\sqrt{1121}}{40} \end{array}\right..$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x=0,\ x=\dfrac{39+\sqrt{1121}}{40}$.

BT 212. Giải phương trình: $\sqrt{x^8-14x^2+1}=x^4-12x^2+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

✍ ***Lời giải***. Ta có: $x^8-14x^2+1=(x^4+1)^2-(4x^2)^2=(x^4-4x^2+1)\cdot(x^4+4x^2+1)$

Do đó điều kiện để phương trình có nghiệm là $x^4-4x^2+1\ge 0$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{(x^4-4x^2+1)\cdot(x^4+4x^2+1)}=x^4-12x^2+1=2.(x^4-4x^2+1)-(x^4+4x^2+1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^4-4x^2+1}{x^4+4x^2+1}}=2\cdot\frac{x^4-4x^2+1}{x^4+4x^2+1}-1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^4-4x^2+1}{x^4+4x^2+1}}=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0$.

BT 213. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3x^2+38}-\sqrt{x^2+5x+6}=\sqrt{x+4}. \qquad (x\in\mathbb{R})$.

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $x\in\left[\dfrac{1-\sqrt{115}}{3};-3\right]\cup\left[-2;\dfrac{1+\sqrt{115}}{3}\right]$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+6}+\sqrt{x+4}=\sqrt{2x-3x^2+38}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-14+\sqrt{(x+4)(x^2+5x+6)}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-14+\sqrt{(x+4)(x+2)(x+3)}=0$

$\Leftrightarrow 2\cdot(x^2+6x+8)-10\cdot(x+3)+\sqrt{(x+3)(x^2+6x+8)}=0$

(do $x=-3$ không là nghiệm của phương trình)

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{x^2+6x+8}{x+3}+\sqrt{\frac{x^2+6x+8}{x+3}}-10=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+6x+8}{x+3}}=2$$

$\Leftrightarrow x^2+6x+8=4\cdot(x+3)\Leftrightarrow x^2+2x-4=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\sqrt{5}-1$.

BT 214. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0. \quad (x\in\mathbb{R})$.

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\ge 2$. Do $x=2$ không là nghiệm nên xét $x>2$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$

$\Leftrightarrow x^2+x-6+6\sqrt{(x^2+x-6)(x-1)}+9x-9=3x^2-6x+19$

$\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{(x-2)(x+3)(x-1)}=x^2-8x+17$

$\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{(x-2)\cdot(x^2+2x-3)}=(x^2+2x-3)-10\cdot(x-2)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{x-2}-3\cdot\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-2}}-10=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-2}}=5 \Leftrightarrow x=\frac{23\pm\sqrt{341}}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{23\pm\sqrt{341}}{2}\cdot$

BT 215. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{3x^2+4x+1}-\sqrt{2x-1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}\cdot$ Do $x=\frac{1}{2}$ không là nghiệm nên xét $x>\frac{1}{2}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-1+2\sqrt{(x^2+2x)\cdot(2x-1)}=3x^2+4x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=x^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=(x^2+2x)-(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{2x-1}-\sqrt{\frac{x^2+2x}{2x-1}}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+2x}{2x-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

BT 216. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-3x-2}=\sqrt{18x^2+16x-39}-5\sqrt{x-1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2.$

$$(*) \Leftrightarrow 5\sqrt{x-1}+\sqrt{2x^2-3x-2}=\sqrt{18x^2+16x-39}$$

$$\Leftrightarrow 25(x-1)+2x^2-3x-2+10\sqrt{x-1}.\sqrt{(2x+1)(x-2)}=18x^2+16x-39$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{(x-1)(2x+1)(x-2)}=8x^2-3x-6$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{(x-2)(2x^2-x-1)}=4.(2x^2-x-1)+x-1 \qquad (**)$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x^2-x-1} \\ v=\sqrt{x-2} \end{cases}$ thì $(**) \Leftrightarrow 5uv=4u^2+v^2 \Leftrightarrow (u-v)(4u-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=4v \end{array}\right.\cdot$

Với $u=v,$ suy ra $\sqrt{2x^2-x-1}=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 2x^2-2x+1=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Với $u=4v,$ suy ra $\sqrt{2x^2-x-1}=4\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 2x^2-17x+31=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{17+4\sqrt{3}}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{17+4\sqrt{3}}{4}\cdot$

BT 217. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+11x-27}-\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{x-2}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2.$

$$(*) \Leftrightarrow 3x^2+11x-27=x^2-1+9.(x-2)+6.\sqrt{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2+2.(x-1)=3\sqrt{(x^2-x-2)(x-1)} \qquad (**)$$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - x - 2} \ge 0 \\ v = \sqrt{x - 1} \ge 0 \end{cases}$ thì $(**) \Leftrightarrow u^2 + 2v^2 = 3uv \Leftrightarrow (u - v)(u - 2v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = 2v \end{array}\right.$.

Với $u = v,$ suy ra: $\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$

Với $u = 2v,$ suy ra: $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2\sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = 1 + \sqrt{2},\ x = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$.

BT 218. Giải phương trình: $2\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x^2 + 5x - 2} = \sqrt{18x^2 + 18x - 5}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{3}$.

$(*) \Leftrightarrow 4x + 4 + 3x^2 + 5x - 2 + 4\sqrt{(x + 1)(3x - 1)(x + 2)} = 18x^2 + 18x - 5$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x + 1)(3x - 1)(x + 2)} = 15x^2 + 9x - 7$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{(3x^2 + 2x - 1)(x + 2)} = 5.(3x^2 + 2x - 1) - (x + 2)$ $\quad (**)$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{3x^2 + 2x - 1} \ge 0 \\ v = \sqrt{x + 2} > 0 \end{cases}$, thì $(**) \Leftrightarrow 4uv = 5u^2 - v^2 \Leftrightarrow u = v.$

Với $u = v,$ suy ra: $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = \sqrt{x + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 3x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{37} - 1}{6}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{\sqrt{37} - 1}{6}$.

BT 219. Giải phương trình: $\sqrt{10x^2 - 50x - 3} = \sqrt{2x^2 - 5x + 2} - 3\sqrt{x - 5}.$ $(x \in \mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 10x^2 - 50x - 3 \ge 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \ge 0 \\ x - 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{25 + \sqrt{745}}{10}$.

Ta có: $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - 3\sqrt{x - 5} = \dfrac{2x^2 - 14x + 47}{\sqrt{2x^2 - 5x + 2} + 3\sqrt{x - 5}} > 0,\ \forall x \ge \dfrac{25 + \sqrt{745}}{10}$.

Do đó hai vế của phương trình $(*)$ đều dương nên sẽ lũy thừa lên được:

$(*) \Leftrightarrow 10x^2 - 50x - 3 = 2x^2 - 5x + 2 + 9x - 45 - 6\sqrt{(2x - 1)(x - 2)(x - 5)}$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 27x + 20 + 3\sqrt{(2x - 1)(x - 5)(x - 2)} = 0$

$\Leftrightarrow 2.(2x^2 - 11x + 5) - 5.(x - 2) + 3\sqrt{(2x^2 - 11x + 5)(x - 2)} = 0$ $\quad (**)$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x^2-11x+5}>0 \\ v=\sqrt{x-2}>0 \end{cases}$, thì $(**)\Leftrightarrow 2u^2-5v+3uv\ge 0\Leftrightarrow (u-v)(2u+5v)=0$

$\Leftrightarrow u=v$ (do có lượng: $2u+5v>0,\ \forall u,v>0$).

Với $u=v$, suy ra: $\sqrt{2x^2-11x+5}=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow 2x^2-12x+7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{22}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{6+\sqrt{22}}{2}\cdot$

BT 220. Giải phương trình: $\sqrt{3(9x^2-20x+9)}=2\sqrt{6x^2-11x+3}-\sqrt{x-2}.$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2.$ Do ta luôn có lượng:

$$2\sqrt{6x^2-11x+3}-\sqrt{x-2}=\frac{4(6x^2-11x+3)-(x-2)}{2\sqrt{6x^2-11x+3}+\sqrt{x-2}}=\frac{24x^2-45x+14}{2\sqrt{6x^2-11x+3}+\sqrt{x-2}}>0$$

nên cả hai vế đều dương và lũy thừa lên ta được:

$(*)\Leftrightarrow 27x^2-60x+27=4.(6x^2-11x+3)+x-2-4\sqrt{(2x-3)(3x-1)(x-2)}$

$\Leftrightarrow 3x^2-17x+17+4\sqrt{(3x-1)(x-2)}.\sqrt{2x-3}=0$

$\Leftrightarrow (3x^2-7x+2)-5.(2x-3)+4.(\sqrt{3x^2-7x+2).(2x-3)}=0 \qquad (**)$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{3x^2-7x+2}\ge 0 \\ b=\sqrt{2x-3}>0 \end{cases}$, thì $(**)\Leftrightarrow a^2-5b^2+4ab=0\Leftrightarrow (a-b)(a+5b)=0$

$\Leftrightarrow a=b,$ (do ta luôn có lượng $a+5b>0,\ \forall a\ge 0,\ b>0$)

Với $a=b$, suy ra: $\sqrt{3x^2-7x+2}=\sqrt{2x-3}\Leftrightarrow 3x^2-9x+5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{21}}{6}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}\cdot$

BT 221. Giải phương trình: $\sqrt{x(8x-15)}=\sqrt{4x^2-5x+1}-2\sqrt{x-2}. \qquad (x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2.$

Ta có: $\sqrt{4x^2-5x+1}-2\sqrt{x-2}=\dfrac{4x^2-9x+9}{\sqrt{4x^2-5x+1}+2\sqrt{x-2}}>0,\ \forall x\ge 2.$

Do đó cả hai vế đều dương nên lũy thừa lên được:

$(*)\Leftrightarrow 8x^2-15x\ge 4x^2-5x+1+4(x-2)-4\sqrt{(4x^2-5x+1)(x-2)}$

$\Leftrightarrow 4x^2-14x+7+4\sqrt{(x-1)(4x-1)(x-2)}=0$

$\Leftrightarrow (4x^2-9x+2)-5.(x-1)+4\sqrt{(4x^2-9x+2)\cdot(x-1)}=0 \qquad (**)$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{4x^2-9x+2}\ge 0 \\ v=\sqrt{x-1}>0 \end{cases}$, thì $(**)\Leftrightarrow u^2+4uv-5v^2=0\Leftrightarrow (u-v)(u+5v)=0$

$\Leftrightarrow u = v,$ (do ta luôn có lượng: $u + 5v > 0,\ \forall u \ge 0,\ v > 0$).

Với $u = v,$ suy ra: $\sqrt{4x^2 - 9x + 2} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{4}\cdot$

BT 222. Giải phương trình: $\sqrt{x^3 + 2x^2 - 7x + 6} - \sqrt{x} = \sqrt{x^3 + 1}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^3 + 2x^2 - 7x + 6 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}.$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x^2 - 7x + 6} = \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = x^3 + 1 + x + 2\sqrt{x(x^3 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 5 = \sqrt{x.(x+1).(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 5\cdot(x^2 - x + 1) - 3\cdot(x^2 + x) = 2\cdot\sqrt{(x^2 - x + 1)\cdot(x^2 + x)}$$

$$\Leftrightarrow 5 - 3\cdot\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1} = 2\cdot\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{1}{2}\cdot$

BT 223. Giải phương trình: $\sqrt{x^3 + 5x^2 - 7x - 2} = \sqrt{x^3 + x - 2} + \sqrt{2x - 1}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^3 + 5x^2 - 7x - 2 \ge 0 \\ x^3 + x - 2 \ge 0 \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 5x^2 - 7x - 2 \ge 0 \\ x \ge 1 \end{cases}.$

$$(*) \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 - 7x - 2 = x^3 + x - 2 + 2x - 1 + 2\sqrt{(x^3 + x - 2)(2x - 1)}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 1 = 2\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 2)(2x - 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot(2x^2 - 3x + 1) - (x^2 + x + 2) = 2\cdot\sqrt{(2x^2 - 3x + 1)\cdot(x^2 + x + 2)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 2} - 1 = 2\cdot\sqrt{\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = x^2 + x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 2 + \sqrt{5}.$

BT 224. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{1 + 3x^2} = \sqrt{3(5x^2 + 2x + 3)}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 4 + 1 + 3x^2 + 4\sqrt{(x^2 + x + 1)(1 + 3x^2)} = 15x^2 + 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2 + x + 1)(1 + 3x^2)} = 4x^2 + x + 2 = (x^2 + x + 1) + (1 + 3x^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{1+3x^2}}=\frac{x^2+x+1}{1+3x^2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+1}{1+3x^2}}=1 \Leftrightarrow 2x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.\cdot$$

Kết luận: Nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0,\ x=\frac{1}{2}\cdot$

BT 225. Giải phương trình: $3\sqrt{2x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+2}=2\sqrt{9x^2-3x+8}.\ (x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 18x^2-9x+18+3x^2+2+6\sqrt{(2x^2-x+2)(3x^2+2)}=36x^2-12x+32$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{(2x^2-x+2)(3x^2+2)}=5x^2-x+4=(2x^2-x+2)+(3x^2+2)$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{\frac{2x^2-x+2}{3x^2+2}}=\frac{2x^2-x+2}{3x^2+2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^2-x+2}{3x^2+2}}=1 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Kết luận: Nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-1,\ x=0.$

BT 226. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2-29x+11}=2\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-3x+2}.\ (x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 9x^2-29x+11\ge 0 \\ x^2-3x\ge 0 \\ x^2-3x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 3 \end{array}\right..$

$$(*) \Leftrightarrow 9x^2-29x+11=4x^2-12x+x^2-3x+2+4\sqrt{(x^2-3x)(x^2-3x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-14x+9=4\sqrt{(x^2-3x)(x^2-3x+2)}=4\sqrt{x(x-3)(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x)+3.(x^2-4x+3)=4.\sqrt{(x^2-2x).(x^2-4x+3)} \qquad (**)$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2-2x}\ge 0 \\ b=\sqrt{x^2-4x+3}\ge 0 \end{cases}$ thì $(**) \Leftrightarrow a^2-4ab+3b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(a-3b)=0.$

Với $a=b,$ suy ra $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{x^2-4x+3} \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\cdot$

Với $a=3b,$ suy ra $\sqrt{x^2-2x}=3\sqrt{x^2-4x+3} \Leftrightarrow 8x^2-34x+27=0 \Leftrightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{73}}{8}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{17+\sqrt{73}}{8}\cdot$

BT 227. Giải phương trình: $(3x^2-8x-5)\sqrt{x^2+1}=(x^2+4x+5)\sqrt{x+1}.\ (x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1.$

$$(*) \Leftrightarrow \left[-8.(x+1)+3.(x^2+1)\right]\cdot\sqrt{x^2+1}=\left[4(x+1)+(x^2+1)\right]\cdot\sqrt{x+1} \qquad (**)$$

Đặt $a=\sqrt{x+1}\ge 0,\ b=\sqrt{x^2+1}\ge 1.$ Khi đó:

$$(**) \Leftrightarrow (-8a^2+3b^2)\cdot b=(4a^2+b^2)\cdot a \Leftrightarrow 4a^3+8a^2b+ab^2-3b^3$$

$\Leftrightarrow (2a-b)(2a+3b)(a+b)=0 \Leftrightarrow 2a=b,$ (do $a\ge 0,\ b\ge 1$)

Suy ra: $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{7}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2\pm\sqrt{7}.$

BT 228. Giải phương trình: $\dfrac{3-x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2(x^2-3x+4)}}=1.\qquad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\ge 0$. Do $x=0$ không là nghiệm nên xét $x>0$.

$(*) \Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x}=1+\sqrt{2.(x^2-3x+4)} \Leftrightarrow 2-x-\sqrt{x}=\sqrt{2.(x^2-3x+4)}$

$$\Leftrightarrow 2-x-\sqrt{x}=\sqrt{2.\left[(2-x)^2+x\right]} \xleftrightarrow{\text{Chia: } x>0} \frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}+1=\sqrt{2\left(x+\frac{4}{x}-3\right)}\quad (**)$$

Đặt $t=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$, suy ra: $t^2=\dfrac{4}{x}+x-4 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x}+x=t^2+4.$

$$(**) \Leftrightarrow \sqrt{2.(t^2+1)}=t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ t^2+2t+1=2t^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ (t-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1.$$

Với $t=1$, suy ra: $\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow 2-x=\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0 \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=1.$

BT 229. Giải phương trình: $\dfrac{x+\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{4x^2-2x+3}}=1.\qquad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $\begin{cases} x^2+2x-3\ge 0 \\ 4x^2-2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -3 \end{array}\right.$.

$(*) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{5x-(x^2+2x-3)}$ và đặt: $y=\sqrt{x^2+2x-3}\ge 0$

Suy ra: $\begin{cases} x+y=\sqrt{5x^2-y^2} \\ x+y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\ge 0 \\ x^2+y^2+2xy=5x^2-y^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y\ge 0 \\ 2x^2-xy-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\ge 0 \\ (x-y)(2x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2x+y=0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{x^2+2x-3} \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\cdot$

Với $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=\sqrt{x^2+2x-3} \\ x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 3x^2-2x+3=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{3}{2}\cdot$

BT 230. Giải phương trình: $x+2+4\sqrt{x^2-x+2}=2\sqrt{6x^2-x+14}.$ $(x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow (x+2)+4\sqrt{x^2-x+2}=2\sqrt{(x+2)^2+5(x^2-x+2)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+2}}+4=2\cdot\sqrt{\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+2}}\right)^2+5}$ $(**)$. Đặt $t=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+2}}\cdot$

$(**)\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+5}=t+4\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -4\\ 3t^2-8t+4=0\end{cases}\Leftrightarrow t=2$ hoặc $t=\dfrac{2}{3}\cdot$

Với $t=2,$ suy ra: $2\sqrt{x^2-x+2}=x+2\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2\\ 3x^2-8x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\cdot$

Với $t=\dfrac{2}{3},$ suy ra: $2\sqrt{x^2-x+2}=3(x+2)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2\\ 5x^2+40x+28=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{65}-20}{5}\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2,\ x=\dfrac{2}{3},\ x=\dfrac{2\sqrt{65}-20}{5}\cdot$

BT 231. Giải phương trình: $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x^2+8x+4}.$ $(x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1\ge 0\\ 3x^2+8x+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow (x+1)+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3.(x+1)^2+(\sqrt{2x+1})^2}$ $(**)$

Đặt $a=x+1>0,\ b=\sqrt{2x+1}\ge 0.$ Khi đó: $(**)\Leftrightarrow a+b=\sqrt{3a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=3a^2+b^2\Leftrightarrow a(a-b)=0\Leftrightarrow a=b,$ (do : $a>0$)

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt{2x+1}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1\\ x^2+2x+1=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0.$

BT 232. Giải phương trình: $\sqrt{x^4-x^2+1}=3\sqrt{x^2-1}+x^2.$ $(x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\le -1$ hoặc $x\ge 1.$

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{1-\dfrac{x^2-1}{x^4}}=3\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}+1\Leftrightarrow \sqrt{1-t^2}=3t+1,$ với $t=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\ge 0.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0\\ 10t^2+6t=0\end{cases}\Leftrightarrow t=0\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\pm 1.$

BT 233. Giải phương trình: $x-1+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5x^2-12x+8}.$ $(x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-3\ge 0 \\ 5x^2-12x+8\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{3}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5.(x-1)^2-(2x-3)} \qquad (**)$

Đặt $a=x-1>0,\ b=\sqrt{2x-3}\ge 0.$ Khi đó: $(**) \Leftrightarrow a+b=\sqrt{5a^2-b^2}$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=5a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2a+b)=0 \Leftrightarrow a=b,$ (do $a>0,\ b\ge 0$)

Suy ra: $\sqrt{2x-3}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=2.$

BT 234. Giải phương trình: $2x+\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{4x^2+2x+4}.\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 4x^2+2x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (2x-1)+\sqrt{2x+1}=\sqrt{(2x-1)^2+3.(2x+1)} \qquad (**)$

Đặt $a=2x-1,\ b=\sqrt{2x+1}\ge 0.$ Khi đó: $(**) \Leftrightarrow a+b=\sqrt{a^2+3b^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ a^2+2ab+b^2=a^2+3b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ b(b-a)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=b \end{array}\right. \end{cases}\cdot$

Với $\begin{cases} a+b\ge 0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1+\sqrt{2x+1}\ge 0 \\ 2x+1=0 \end{cases}:$ vô nghiệm.

Với $\begin{cases} a+b\ge 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ 2x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{3}{2}\cdot$

BT 235. Giải phương trình: $x-1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{2x^2+4}.\ (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 2x^2+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{2x+1}=\sqrt{2.(x-1)^2+2.(2x+1)} \qquad (**)$

Đặt $a=x-1,\ b=\sqrt{2x+1}\ge 0.$ Khi đó: $(**) \Leftrightarrow a+b=\sqrt{2a^2+2b^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ a^2+b^2+2ab=2a^2+2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ (a-b)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b.$

Suy ra: $x-1=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-2x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=4.$

BT 236. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+14x+4}=\sqrt{3x-2}+x+2.\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+14x+4\ge 0\\ 3x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{2}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{2.(x^2+4x+4)+2.(3x-2)}=\sqrt{3x-2}+x+2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2.(x+2)^2+2.(3x-2)}=\sqrt{3x-2}+x+2\Leftrightarrow\sqrt{2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{3x-2}}{x+2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3x-2}}{x+2}+1$$

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x+2}\ge 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{2+2t^2}=t+1\Leftrightarrow t^2-2t+1=0$

$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x+2}=1\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}=x+2\Leftrightarrow x^2+x+6=0:$ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho vô nghiệm $x\in\varnothing$.

BT 237. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+8x+1}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+2x}.\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{5.(x^2+2x)-(2x-1)}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{5-\frac{2x-1}{x^2+2x}}=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2+2x}}+1$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2+2x}}\ge 0,$ thì phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{5-t^2}=t+1\Leftrightarrow t^2+3t-4=0\Leftrightarrow t=1.$

Với $t=1,$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2+2x}}=1\Leftrightarrow x^2+2x=2x-1\Leftrightarrow x^2=-1:$ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho vô nghiệm $x\in\varnothing$.

BT 238. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-10x+16}=\sqrt{x-1}+x-3.\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{2.(x-3)^2+2.(x-1)}=\sqrt{x-1}+(x-3)\Leftrightarrow\sqrt{2\cdot\left(\frac{x-3}{\sqrt{x-1}}\right)^2+2}=\frac{x-3}{\sqrt{x-1}}+1$$

Đặt $t=\dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}},$ thì phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{2t^2+2}=t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ t^2-2t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow t=1.$

Với $t=1,$ suy ra: $\dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}}=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ x^2-7x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=5$.

BT 239. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+2\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{5x^2-7x+13}.\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{2}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + 2\sqrt{x^2-2x+3} = \sqrt{(3x-2)+5.(x^2-2x+3)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3x-2}{x^2-2x+3}} + 2 = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x^2-2x+3} + 5}$. Đặt $t = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x^2-2x+3}} \ge 0$. Khi đó:

PT $\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5} = t+2 \Leftrightarrow t^2+5 = t^2+4t+4 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{3x-2}{x^2-2x+3}} = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3x-2} = \sqrt{x^2-2x+3} \Leftrightarrow x^2-50x+35=0 \Leftrightarrow x = 25 \pm \sqrt{590}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 25 \pm \sqrt{590}.$

BT 240. Giải phương trình: $x - 1 + \sqrt{x} = \sqrt{7x^2-17x+7}.$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ 7x^2-17x+7 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{17-\sqrt{93}}{14}$ hoặc $x \ge \dfrac{17+\sqrt{93}}{14}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow x-1+\sqrt{x} = \sqrt{7.(x^2-2x+1)-3.x}$ $(**)$. Đặt $a = x-1,\ b = \sqrt{x} \ge 0.$

$(**) \Leftrightarrow a+b = \sqrt{7a^2-3b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \ge 0 \\ a^2+2ab+b^2 = 7a^2-3b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \ge 0 \\ (a-b)(3a+2b) \ge 0 \end{cases}.$

Với $\begin{cases} a+b \ge 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0;\ b \ge 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x-1 = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-3x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot$

Với $\begin{cases} a+b \ge 0 \\ 3a+2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0; b \ge 0 \\ 2\sqrt{x} = 3-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 4x = 9x^2-18x+9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}\cdot$

BT 241. Giải phương trình: $6 = 3x + \sqrt{x} + 2\sqrt{3x^2-14x+12}.$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 3x^2-14x+12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{7-\sqrt{13}}{3}$ hoặc $x \ge \dfrac{7+\sqrt{13}}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 3.(2-x) - \sqrt{x} = 2.\sqrt{3.(x^2-4x+4)-2.x} \Leftrightarrow 3.(2-x) - \sqrt{x} = 2.\sqrt{3.(2-x)^2-2x}.$

Đặt $a = 2-x,\ b = \sqrt{x} \ge 0$. Khi đó: PT $\Leftrightarrow 3a-b = 2\sqrt{3a^2-2b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b \ge 0 \\ a^2+2ab-3b^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b \ge 0 \\ (a-b)(a+3b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b \ge 0 \\ a = b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 3a-b \ge 0 \\ a = -3b \end{cases} \Rightarrow x = 1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 1.$

BT 242. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2+3x+3} + x + 1 = \sqrt{9x^2+23x+19}.$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x+3}+(x+1)=\sqrt{5(x^2+3x+3)+4.(x+1)^2}$ (**)

Đặt $a=\sqrt{x^2+3x+3}>0,\ b=x+1$. Khi đó: $(**) \Leftrightarrow 2a+b=\sqrt{5a^2+4b^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b\ge 0 \\ 4a^2+4ab+b^2=5a^2+4b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b\ge 0 \\ a^2-4ab+3b^2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b\ge 0 \\ (a-b)(a-3b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b\ge 0 \\ a=b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2a+b\ge 0 \\ a=3b \end{cases}$.

Với $\begin{cases} 2a+b\ge 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0, b\ge 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+3x+3=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=-2 \end{cases}$: vô nghiệm.

Với $\begin{cases} 2a+b\ge 0 \\ a=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0;\ b\ge 0 \\ 8x^2+15x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 8x^2+15x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{33}-15}{16}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\sqrt{33}-15}{16}$.

BT 243. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2}+1-2x=2\sqrt{14x^2-12x+1}$. $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 14x^2-12x+1\ge 0 \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+(1-2x)=2\sqrt{3.(1-2x)^2-2.(1-x^2)}$ (**)

Đặt $a=\sqrt{1-x^2}\ge 0,\ b=1-2x$. Khi đó: $(**) \Leftrightarrow a+b=2\sqrt{3a^2-2b^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ a^2+2ab+b^2=12a^2-8b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ 11a^2-2ab-9b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ (a-b)(11a+9b)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ a=b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a+b\ge 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} a+b\ge 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0, b\ge 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 1-x^2=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 5x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Với $\begin{cases} a+b\ge 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ -\dfrac{1}{9}a\ge 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ a\le 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

BT 244. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x}=\sqrt{3x^2+4x-18}$. $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x}=\sqrt{3(x^2+x-6)+x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-\dfrac{6}{x}+1}+1=\sqrt{3\left(x-\dfrac{6}{x}+1\right)+1}$ (**)

Đặt $t=\sqrt{x-\dfrac{6}{x}+1}\geq 0,$ suy ra: $t^2=x-\dfrac{6}{x}+1\cdot$ Khi đó: $(**)\Leftrightarrow \sqrt{3t^2+1}=t+1$

$\Leftrightarrow 3t^2+1=t^2+2t+1\Leftrightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=1.$

Với $t=0,$ suy ra: $\sqrt{x-\dfrac{6}{x}+1}=0\Leftrightarrow x^2+x=6\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-3.$

Với $t=1,$ suy ra: $\sqrt{x-\dfrac{6}{x}+1}=1\Leftrightarrow x^2-6=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=2,\ x=\sqrt{6}.$

BT 245. Giải phương trình: $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5x^2+9x-10}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\geq 0\\ x^2+x-2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1.$

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5(x^2+x-2)+4x}\Leftrightarrow 1+2\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x}}=\sqrt{5\dfrac{x^2+x-2}{x}+4}$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x}}>0.$ Khi đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{5t^2+4}=2t+1$

$\Leftrightarrow 5t^2+4=4t^2+4t+1\Leftrightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow t=1.$ Suy ra: $x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\sqrt{2}.$

BT 246. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2+9x-4}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq \dfrac{1}{2}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{3.(2x-1)+(x^2+3x-1)}$ (**)

Đặt $a=\sqrt{2x-1}\geq 0,\ b=\sqrt{x^2+3x-1}>0.$ Khi đó: $(**)\Leftrightarrow a+b=\sqrt{3a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=3a^2+b^2\Leftrightarrow a(a-b)=0\Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=b.$

Với $a=0,$ suy ra: $\sqrt{2x-1}=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+3x-1}\Leftrightarrow 2x-1=x^2+3x-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-1\end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

BT 247. Giải phương trình: $2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{x^2+19x-28}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq \dfrac{3}{2}\cdot$ Nhận thấy $x=\dfrac{3}{2}$ là một nghiệm. Xét $x>\dfrac{3}{2}:$

$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{8.(2x-3)+(x^2+3x-4)}$

$\Leftrightarrow 2+\sqrt{\dfrac{x^2+3x-4}{2x-3}}=\sqrt{8+\dfrac{x^2+3x-4}{2x-3}}$ $(**)$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+3x-4}{2x-3}}\ge 0.$

$(**) \Leftrightarrow \sqrt{8+t^2}=2+t \Leftrightarrow t^2+4t+4=8+t^2 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x^2+x=1$: VN khi $x>\dfrac{3}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{3}{2}\cdot$

BT 248. Giải phương trình: $x+\sqrt{x^3+x^2-2}=\sqrt{3x^3+4x^2-6}$. $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^3+x^2-2\ge 0 \\ 3x^3+4x^2-6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$

$(*) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^3+x^2-2}=\sqrt{3(x^3+x^2-2)+x^2} \Leftrightarrow 1+\sqrt{\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2}}=\sqrt{3\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2}+1}$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2}}\ge 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow 1+t=\sqrt{3t^2+1} \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=1.$

Với $t=0,$ suy ra: $x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow x=1.$

Với $t=1,$ suy ra: $x^3+x^2-2=x^2 \Leftrightarrow x^3=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[3]{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=1,\ x=\sqrt[3]{2}.$

BT 249. Giải phương trình: $\sqrt{x^3+2x-3}+2x+2=\sqrt{5x^3+4x^2+18x-11}$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^3+2x-3\ge 0 \\ 5x^3+4x^2+18x-11\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^3+2x-3}+2.(x+1)=\sqrt{5.(x^3+2x-3)+4.(x^2+2x+1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x+1}}+2=\sqrt{5\cdot\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x+1}+4}$ $(**)$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x+1}}\ge 0.$

$(**) \Leftrightarrow \sqrt{5t^2+4}=t+2 \Leftrightarrow 5t^2+4=t^2+4t+4 \Leftrightarrow 4t^2-4t=0 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=1.$

Với $t=0,$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x+1}}=0 \Leftrightarrow x^3+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1.$

Với $t=1,$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x+1}}=1 \Leftrightarrow x^3-x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=1,\ x=2.$

BT 250. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^3+x^2+x-3}=\sqrt{6x^3+9x^2+9x-16}$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1.$

$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^3+x^2+x-3}=\sqrt{3.(x^2+x+1)+6.(x^3+x^2+x-3)}$ $(**)$

Đặt $a=\sqrt{x^2+x+1}>0,\ b=\sqrt{x^3+x^2+x-3}\ge 0$. Khi đó: $(**)\Leftrightarrow 2a+b=\sqrt{3a^2+6b^2}$

$\Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2=3a^2+6b^2\Leftrightarrow (a-b)(a+5b)=0\Leftrightarrow a=b,$ do $a>0,\ b\ge 0$.

Suy ra: $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^3+x^2+x-3}\Leftrightarrow x^3=4\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\sqrt[3]{4}$.

BT 251. Giải phương trình: $x+3+\sqrt{x^3+6x+9}=\sqrt{x^3+3x^2+24x+36}$. $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x^3+6x+9\ge 0\\ x^3+3x^2+24x+36\ge 0\end{cases}$.

$(*)\Leftrightarrow x+3+\sqrt{x^3+6x+9}=\sqrt{(x^3+6x+9)+3(x+3)^2}$ $\quad(**)$

Đặt $a=x+3,\ b=\sqrt{x^3+6x+9}\ge 0$. Khi đó:

$(**)\Leftrightarrow a+b=\sqrt{3a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=3a^2+b^2\Leftrightarrow 2a^2-2ab=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=b\end{array}\right.$.

Với $a=0$, suy ra: $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$.

Với $a=b$, suy ra: $\sqrt{x^3+6x+9}=x+3\Leftrightarrow x^3-x^2=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0,\ x=1$.

BT 252. Giải phương trình: $\sqrt{x^3+3x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2+4}=2\sqrt{x^3+2x^2+3}$.

Lời giải. Điều kiện: $x^3+3x^2+2\ge 0,\ x^3+x^2+4\ge 0,\ x^3+2x^2+3\ge 0$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x^3+3x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2+4}=\sqrt{2(x^3+3x^2+2)+2(x^3+x^2+4)}$ $\quad(**)$

Đặt $a=\sqrt{x^3+3x^2+2}\ge 0,\ b=\sqrt{x^3+x^2+4}\ge 0$. Khi đó:

$(**)\Leftrightarrow a+b=\sqrt{2a^2+2b^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=2a^2+2b^2\Leftrightarrow (a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b$.

Suy ra: $\sqrt{x^3+3x^2+2}=\sqrt{x^3+x^2+4}\Leftrightarrow 2x^2=2\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\pm 1$.

BT 253. Giải phương trình: $\sqrt{x^3-2x}+\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{x^3+3x^2-8x+12}$.

Lời giải. Điều kiện: $x^3-2x\ge 0,\ x^3+3x^2-8x+12\ge 0$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x^3-2x}+\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{(x^3-2x)+3.(x^2-2x+4)}$ $\quad(**)$

Đặt $a=\sqrt{x^3-2x}\ge 0,\ b=\sqrt{x^2-2x+4}>\sqrt{3}$. Khi đó:

$(**)\Leftrightarrow a+b=\sqrt{a^2+3b^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=a^2+3b^2\Leftrightarrow 2b^2-2ab=0\Leftrightarrow a=b$.

Suy ra: $\sqrt{x^3-2x}=\sqrt{x^2-2x+4}\Leftrightarrow x^3-x^2-4=0\Leftrightarrow x=2$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2$.

BT 254. Giải phương trình: $x^2+3x=(3-x)\sqrt{-x^2+x+4}$. $\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $-x^2+x+4\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\le x\le \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

$(*) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-1) = (3-x)\sqrt{(3-x)\cdot(x+1)-(x-1)}$

Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = \sqrt{(3-x)\cdot(x+1)-(x-1)} \geq 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} a^2 = (3-x)\cdot b - (x-1) \\ b^2 = (3-x)\cdot a - (x-1) \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = (3-x)\cdot(b-a) \Leftrightarrow (a-b)(a+b+3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a+b+3-x = 0 \end{array}\right.$.

Với $a = b$, suy ra: $x+1 = \sqrt{-x^2+x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Với $a+b+3-x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+x+4} + 4 = 0$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

BT 255. Giải phương trình: $x^2 - 8x + 26 = (x+1)\sqrt{x^2-6x-6}$. $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 6x - 6 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \ ?! \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 3-\sqrt{15} \\ x \geq 3+\sqrt{15} \end{array}\right.$.

$(*) \Leftrightarrow (x-5)^2 + (2x+1) = (x+1)\sqrt{(x+1)(x-5)-(2x+1)}$

Đặt $\begin{cases} a = x-5 \\ b = \sqrt{(x+1)(x-5)-(2x+1)} \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} a^2 = (x+1)\cdot b - (2x+1) \\ b^2 = (x+1)\cdot a - (2x+1) \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = (x+1)(b-a) \Leftrightarrow (a-b)(a+b+x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a+b+x+1 = 0 \end{array}\right.$.

Với $a = b$, suy ra: $\sqrt{x^2-6x-6} = x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ -4x + 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{31}{4}$.

Với $a+b+x+1 = 0$, suy ra: $\sqrt{x^2-6x-6} = 4-2x$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{31}{4}$.

BT 256. Giải phương trình: $x^2 + x + 6 = (2x+3)\sqrt{2x^2+10x+4}$. $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 5x + 2 > 0 \\ 2x+3 > 0 \ ?! \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$.

$(*) \Leftrightarrow (x+2)^2 - (3x-2) = (2x+3)\sqrt{(2x+3)(x+2)+(3x-2)}$

Đặt $\begin{cases} a = x+2 > 0 \\ b = \sqrt{(2x+3)(x+2)+(3x-2)} > 0 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} b^2 = (2x+3)\cdot a + (3x-2) \\ a^2 = (2x+3)\cdot b + (3x-2) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = (2x+3)\cdot(a-b) \Leftrightarrow (b-a)\cdot(a+b+2x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a+b+2x+3 = 0 \end{array}\right.$

Với $a=b$, suy ra: $\sqrt{2x^2+10x+4}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x^2+6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Với $a+b+2x+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+10x+4}=-3x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-5\ge 0 \\ 7x^2+20x+21=0 \end{cases}$: VNo.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=0.$

BT 257. Giải phương trình: $4x^2+9x+1=(4x-1)\sqrt{8x^2-3x-1}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $8x^2-3x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\le \dfrac{3-\sqrt{41}}{16}$ hoặc $x\ge \dfrac{3+\sqrt{41}}{16}$.

$(*) \Leftrightarrow (2x+1)^2+5x=(4x-1)\sqrt{(4x-1)(2x+1)-5x}.$

Đặt $\begin{cases} a=2x+1 \\ b=\sqrt{8x^2-3x-1}\ge 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2=(4x-1)\cdot a-5x \\ a^2=(4x-1)\cdot b-5x \end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=(a-b)\cdot(4x-1) \Leftrightarrow (b-a)\cdot(a+b+4x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+4x-1=0 \end{array}\right.$.

Với $a=b$, suy ra: $\sqrt{8x^2-3x-1}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 4x^2-7x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4} \vee x=2.$

Với $a+b+4x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{8x^2-3x-1}=-6x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 28x^2+3x+1=0 \end{cases}$: VN_o.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-\dfrac{1}{4},\ x=2.$

BT 258. Giải phương trình: $4x^2+19x+6=x\sqrt{2x^2-4x+3}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (2x+3)^2+(7x-3)=x\sqrt{x\cdot(2x+3)-(7x-3)}.$

Đặt $\begin{cases} a=2x+3 \\ b=\sqrt{x\cdot(2x+3)-(7x-3)}\ge 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2=x\cdot a-(7x-3) \\ a^2=x\cdot b-(7x-3) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=x\cdot(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+x=0 \end{array}\right.$.

Với $a=b$, suy ra: $\sqrt{2x^2-4x+3}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3\ge 0 \\ 2x^2+16x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{13}-4.$

Với $a+b+x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-4x+3}=-3x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ 7x^2+22x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{11+\sqrt{79}}{7}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=\sqrt{13}-4,\ x=-\dfrac{11+\sqrt{79}}{7}$.

BT 259. Giải phương trình: $4x^2+23x+23=(x+2)\sqrt{2x^2+6x+12}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (2x+5)^2 + (3x-2) = (x+2)\sqrt{(x+2)\cdot(2x+5)-(3x-2)}.$

Đặt $\begin{cases} a = 2x+5 \\ b = \sqrt{(x+2)\cdot(2x+5)-(3x-2)} \geq 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2 = (x+2)\cdot a - (3x-2) \\ a^2 = (x+2)\cdot b - (3x-2) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = (x+2)\cdot(a-b) \Leftrightarrow (b-a)\cdot(a+b+x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a+b+x+2 = 0 \end{array}\right.$.

Với $a = b$, suy ra: $\sqrt{2x^2+6x+12} = 2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ 2x^2+14x+13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{23}-7}{2}$.

Với $a+b+x+2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+6x+12} = -3x-7 \Leftrightarrow x = \dfrac{-18-\sqrt{65}}{7}$.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{\sqrt{23}-7}{2}$, $x = \dfrac{-18-\sqrt{65}}{7}$.

BT 260. Giải phương trình: $16x^2 - 11x + 1 = (x+4)\sqrt{4x^2+18x-4}$. $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $2x^2+9x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{9+\sqrt{97}}{4}$ hoặc $x \geq \dfrac{\sqrt{97}-9}{4}$.

$(*) \Leftrightarrow (4x-1)^2 - 3x = (x+4)\sqrt{(x+4)\cdot(4x-1)+3x}.$

Đặt $\begin{cases} a = 4x-1 \\ b = \sqrt{(x+4)\cdot(4x-1)+3x} \geq 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2 = (x+4)\cdot a + 3x \\ a^2 = (x+4)\cdot b + 3x \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = (x+4)(a-b) \Leftrightarrow (b-a)\cdot(a+b+x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a+b+x+4 = 0 \end{array}\right.$.

Với $a = b$, suy ra: $\sqrt{4x^2+18x-4} = 4x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ 12x^2-26x+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{13+\sqrt{109}}{12}$.

Với $a+b+x+4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+18x-4} = -5x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x-3 \geq 0 \\ 21x^2+12x+13 = 0 \end{cases}$: VN_o.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{13+\sqrt{109}}{12}$.

BT 261. Giải phương trình: $2x^2 + 2x - 3 = (2x+3)\sqrt{x^2+5x+7}$. $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x^2-4) = (2x+3)\sqrt{(2x+3)\cdot(x+1)-(x^2-4)}.$

Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = \sqrt{(2x+3)\cdot(x+1)-(x^2-4)} \geq 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2 = (2x+3)\cdot a - (x^2-4) \\ a^2 = (2x+3)\cdot b - (x^2-4) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = (2x+3).(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b+2x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a+b+2x+3 = 0 \end{array}\right.$.

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt{x^2+5x+7}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 3x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$

Với $a+b+2x+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+7}=-3x-4 \Leftrightarrow x=-\dfrac{19+\sqrt{73}}{16}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=-\dfrac{19+\sqrt{73}}{16}\cdot$

BT 262. Giải phương trình: $x^2+4x+2=(5x+3)\sqrt{5x^2+6x+2}.$ $\quad (x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (x+1)^2+(2x+1)=(5x+3)\cdot\sqrt{(5x+3)\cdot(x+1)-(2x+1)}.$

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=\sqrt{(5x+3)\cdot(x+1)-(2x+1)}\ge 0 \end{cases},$ suy ra hệ: $\begin{cases} b^2=(5x+3)\cdot a-(2x+1) \\ a^2=(5x+3)\cdot b-(2x+1) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=(a-b)\cdot(a+b+2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+2x+1=0 \end{array}\right.$.

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt{5x^2+6x+2}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 4x^2+4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\cdot$

Với $a+b+2x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2+6x+2}=-3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-2\ge 0 \\ 4x^2+6x+2=0 \end{cases}$: VN_o.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-\dfrac{1}{2}\cdot$

BT 263. Giải phương trình: $4x+5+\dfrac{3}{x+1}=\sqrt{2x^2+8x+4}.$ $\quad (x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $2x^2+8x+4\ge 0.$

$(*) \Leftrightarrow 4x^2+9x+8=(x+1).\sqrt{2x^2+8x+4}$

$\Leftrightarrow (2x+3)^2-(3x+1)=(x+1).\sqrt{(x+1).(2x+3)+(3x+1)}.$

Đặt $\begin{cases} a=2x+3 \\ b=\sqrt{(x+1).(2x+3)+(3x+1)}\ge 0 \end{cases},$ suy ra hệ: $\begin{cases} b^2=(x+1)\cdot a+(3x+1) \\ a^2=(x+1)\cdot b+(3x+1) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=(x+1)\cdot(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b+x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+x+1=0 \end{array}\right.$.

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt{2x^2+8x+4}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3\ge 0 \\ 2x^2+4x+5=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Với $a+b+x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+8x+4}=-3x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-4\ge 0 \\ 7x^2+16x+12=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho vô nghiệm $x\in\varnothing.$

BT 264. Giải phương trình: $5x+3=x\sqrt{2x^2+x+1}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow (x+2)^2-(x^2-x+1)=x\cdot\sqrt{x\cdot(x+2)+(x^2-x+1)}$.

Đặt $\begin{cases} a=x+2 \\ b=\sqrt{x\cdot(x+2)+(x^2-x+1)}\geq 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2=x\cdot a+(x^2-x+1) \\ a^2=x\cdot b+(x^2-x+1) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=(a-b)\cdot x\Leftrightarrow (a-b)\cdot(a+b+x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+x=0 \end{array}\right.$.

Với $a=b$, suy ra: $\sqrt{2x^2+x+1}=x+2\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x^2-3x-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

Với $a+b+x=0\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+1}=-2x-2\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1 \\ 2x^2+7x+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=-3$.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-3,\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

BT 265. Giải phương trình: $9x+25=(x-1)\sqrt{2x^2+5x-5}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $2x^2+5x-5\geq 0\Leftrightarrow x\leq -\dfrac{5+\sqrt{65}}{4}$ hoặc $x\geq \dfrac{\sqrt{65}-5}{4}$.

$(*)\Leftrightarrow (x+5)^2-(x^2+x)=(x-1).\sqrt{(x-1).(x+5)+(x^2+x)}$.

Đặt $\begin{cases} a=x+5 \\ b=\sqrt{(x-1).(x+5)+(x^2+x)}\geq 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2=(x-1)\cdot a+(x^2+x) \\ a^2=(x-1)\cdot b+(x^2+x) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=(x-1)\cdot(a-b)\Leftrightarrow (a-b)(a+b+x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+x-1=0 \end{array}\right.$.

Với $a=b$, suy ra: $\sqrt{2x^2+5x-5}=x+5\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -5 \\ x^2-5x-30=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{145}}{2}$.

Với $a+b+x-1=0\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-5}=-2x-4\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -2 \\ 2x^2+11x+21=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{5\pm\sqrt{145}}{2}$.

BT 266. Giải phương trình: $\dfrac{30}{\sqrt{2x^2+7x-9}-9}=x+1$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \quad ?! \\ 2x^2+7x-9\geq 0 \\ \sqrt{2x^2+7x-9}-9\neq 0 \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow 30 = (x+1)\cdot(\sqrt{2x^2+7x-9}-9) \Leftrightarrow 9x+39 = (x+1)\sqrt{2x^2+7x-9}$

$\Leftrightarrow (x+5)^2 - (x^2+x-14) = (x+1)\cdot\sqrt{(x+1)\cdot(x+5)+(x^2+x-14)}.$

Đặt $\begin{cases} a = x+5 \\ b = \sqrt{(x+1)\cdot(x+5)+(x^2+x-14)} \geq 0 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} b^2 = (x+1)\cdot a + (x^2+x-14) \\ a^2 = (x+1)\cdot b + (x^2+x-14) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = (x+1)\cdot(a-b) \Leftrightarrow (a-b)\cdot(a+b+x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a+b+x+1 = 0 \end{array}\right.$.

Với $a = b$, suy ra: $\sqrt{2x^2+7x-9} = x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x^2-3x-34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{145}}{2}$.

Với $a+b+x+1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+7x-9} = -2x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-6 \geq 0 \\ 2x^2+17x+45 = 0 \end{cases}$: VN_o.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{145}}{2}$.

BT 267. Giải phương trình: $x+10 = (x+3)\sqrt{2x^2+5x-7}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $2x^2+5x-7 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{7}{2}$ hoặc $x \geq 1$.

$(*) \Leftrightarrow (x+1)^2 - (x^2+x-10) = (x+3)\sqrt{(x+3).(x+1)+x^2+x-10}.$

Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = \sqrt{(x+3).(x+1)+x^2+x-10} \geq 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2 = (x+3)\cdot a + (x^2+x-10) \\ a^2 = (x+3)\cdot b + (x^2+x-10) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = (x+3)\cdot(a-b) \Leftrightarrow (a-b)\cdot(a+b+x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a+b+x+3 = 0 \end{array}\right.$.

Với $a = b$, suy ra: $\sqrt{2x^2+5x-7} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3x-8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{41}-3}{2}$.

Với $a+b+x+3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-7} = -2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ 2x^2+11x+23 = 0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{\sqrt{41}-3}{2}$.

BT 268. Giải phương trình: $x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = (1-2x).\sqrt[3]{3x^2+5}.$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow (x+1)^3 - (5x^2+x+4) = (1-2x).\sqrt[3]{(1-2x)(x+1)+5x^2+x+4}.$

Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = \sqrt[3]{(1-2x)(x+1)+5x^2+x+4} \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} a^3 = (1-2x)\cdot b + (5x^2+x+4) \\ b^3 = (1-2x)\cdot a + (5x^2+x+4) \end{cases}$

$\Rightarrow a^3-b^3=(1-2x)(b-a)\Leftrightarrow (a-b)(b^2+ab+a^2+1-2x)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)\cdot\left[\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2+4-8x}{4}\right]=0\Leftrightarrow (a-b)\cdot\left[\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3x^2-2x+7}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow a=b\Rightarrow \sqrt[3]{3x^2+5}=x+1\Leftrightarrow x^3+3x-4=0\Leftrightarrow x=1.$

Do ta luôn có: $\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3x^2-2x+7}{4}>0,\ \forall a,\ b,\ x\in\mathbb{R}.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 269. Giải phương trình: $8x^3+14x^2+9x+2=(4-2x).\sqrt[3]{-6x^2+3x+3}.$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow (2x+1)^3+(2x^2+3x+1)=(4-2x).\sqrt[3]{(4-2x)(2x+1)-(2x^2+3x+1)}.$

Đặt $\begin{cases}a=2x+1\\ b=\sqrt[3]{(4-2x)(2x+1)-(2x^2+3x+1)}\end{cases}$, suy ra: $\begin{cases}a^3=(4-2x)\cdot b-(2x^2+3x+1)\\ b^3=(4-2x)\cdot a-(2x^2+3x+1)\end{cases}$

$\Rightarrow a^3-b^3=(4-2x)\cdot(b-a)\Leftrightarrow (a-b)\cdot\left[\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2}{4}+4-2x\right]=0$

$\Leftrightarrow (b-a)\cdot\left[\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2-8x+16}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow (b-a)\cdot\left[\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3.(2x+1)^2-8x+16}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow (b-a)\cdot\left[\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{12x^2+4x+19}{4}\right]=0\Leftrightarrow b=a,$ do: $\dfrac{12x^2+4x+19}{4}>0,\ \forall x.$

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt[3]{-6x^2+3x+3}=2x+1\Leftrightarrow 8x^3+18x^2+3x-2=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1}{4}\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-2,\ x=-\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{4}\cdot$

BT 270. Giải phương trình: $x^3-5x^2+4x-5=(1-2x).\sqrt[3]{6x^2-2x+7}.\quad (x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow (x+1)^3-(8x^2-x+6)=(1-2x).\sqrt[3]{(1-2x).(x+1)+(8x^2-x+6)}.$

Đặt $\begin{cases}a=x+1\\ b=\sqrt[3]{(1-2x).(x+1)+(8x^2-x+6)}\end{cases}$, suy ra: $\begin{cases}a^3=(1-2x)\cdot b+(8x^2-x+6)\\ b^3=(1-2x)\cdot a+(8x^2-x+6)\end{cases}$

$\Rightarrow a^3 - b^3 = (1-2x)\cdot(b-a) \Leftrightarrow (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2+1-2x)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)\cdot\left[\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2-8x+4}{4}\right]=0 \Leftrightarrow (a-b)\cdot\left[\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3x^2-2x+7}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow a=b \Rightarrow \sqrt[3]{6x^2-2x+7}=x+1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+6x-6=0 \Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2.$

BT 271. Giải phương trình: $x^2-x-3=(x-1)^2\sqrt{x^3+2x+4}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x^3+2x+4\ge 0.$

$(*) \Leftrightarrow (x+2)^2-(5x+2)=(x-1)^2.\sqrt{(x-1)^2.(x+2)+(5x+2)}.$

Đặt $\begin{cases} a=x+2 \\ b=\sqrt{(x-1)^2.(x+2)+(5x+2)}\ge 0\end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2=(x-1)^2\cdot a+(5x+2) \\ a^2=(x-1)^2\cdot b+(5x+2)\end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=(x-1)^2\cdot(a-b) \Leftrightarrow (a-b)\cdot\left[a+b+(x-1)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+(x-1)^2=0\end{array}\right.$.

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt{x^3+2x+4}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^3-x^2-2x=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=2\end{array}\right.$.

Với $a+b+(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+2x+4}+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{15}{4}:$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=-1,\ x=0,\ x=2.$

BT 272. Giải phương trình: $\dfrac{-6x^2-15x+12}{x^2-5x}=\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}.$ $(x\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^3+7x^2+15x+13=0 \\ x^2-5x\ne 0\end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow -6x^2-15x+12=(x^2-5x).\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}$

$\Leftrightarrow (x+5)^2-(7x^2+40x+13)=(x^2-5x).\sqrt{(x^2-5x).(x+5)+(7x^2+40x+13)}.$

Đặt $\begin{cases} a=x+5 \\ b=\sqrt{(x^2-5x).(x+5)+(7x^2+40x+13)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=(x^2-5x)\cdot a+(7x^2+40x+13) \\ a^2=(x^2-5x)\cdot b+(7x^2+40x+13)\end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=(x^2-5x)\cdot(a-b) \Leftrightarrow (a-b).(a+b+x^2-5x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=5x-x^2\end{array}\right.$.

Với $a=b,$ suy ra: $\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}=x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5\ge 0 \\ x^3+6x^2+5x-12=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \\ x=-3\end{array}\right.$.

Với $a+b=5x-x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+7x^2+15x+13}+(x-2)^2=-1$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=-4,\ x=-3,\ x=1$.

BT 273. Giải phương trình: $\dfrac{2x^4+x^3+9x^2+7x+4}{x^2+x+3}=3\sqrt{x^3+x^2+x}$. $(x\in\mathbb{R})$.

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\geq 0$.

$$(*)\Leftrightarrow 2x^4+x^3+9x^2+7x+4=(x^2+x+3).\sqrt{9x^3+9x^2+9x}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x+1)^2+(x^4-5x^3-2x^2+x+3)$$

$$=(x^2+x+3)\sqrt{(x^2+x+3)(x^2+3x+1)-(x^4-5x^3-2x^2+x+3)}.$$

Đặt $\begin{cases} a=x^2+3x+1 \\ b=\sqrt{(x^2+x+3)(x^2+3x+1)-(x^4-5x^3-2x^2+x+3)}\geq 0 \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} b^2=(x^2+x+3)\cdot a-(x^4-5x^3-2x^2+x+3) \\ a^2=(x^2+x+3)\cdot b-(x^4-5x^3-2x^2+x+3) \end{cases} \Rightarrow b^2-a^2=(x^2+x+3)\cdot(a-b)$

$$\Leftrightarrow (a-b)\cdot(a+b+x^2+x+3)=0 \Leftrightarrow (a-b).(b+2x^2+4x+4)=0 \Leftrightarrow a=b$$

$$\Rightarrow \sqrt{9x^3+9x^2+9x}=x^2+3x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+1\geq 0 \\ (x^2-3x+1)\cdot(x^2+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{5}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=3\pm\sqrt{5}$.

BT 274. Giải phương trình: $\dfrac{2x^3+3x^2+2x+5}{x+3}=\sqrt{x^4+x^3+4x^2+4x-1}$. $(x\in\mathbb{R})$.

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $\begin{cases} x^4+x^3+4x^2+4x-1\geq 0 \\ x+3\neq 0 \end{cases}$.

$$(*)\Leftrightarrow 2x^3+3x^2+2x+5=(x+3)\sqrt{x^4+x^3+4x^2+4x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+1)^2-(x^2-4)=(x+3).\sqrt{(x+3).(x^2+x+1)+(x^4-4)}.$$

Đặt $\begin{cases} a=x^2+x+1>0 \\ b=\sqrt{(x+3).(x^2+x+1)+(x^4-4)}\geq 0 \end{cases}$, suy ra hệ: $\begin{cases} b^2=(x+3)\cdot a+(x^4-4) \\ a^2=(x+3)\cdot b+(x^4-4) \end{cases}$

$$\Rightarrow b^2-a^2=(x+3)\cdot(a-b)\Leftrightarrow (b-a)(a+b+x+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+x+3=0 \end{array}\right.$$

Với $a=b\Rightarrow \sqrt{x^4+x^3+4x^2+4x-1}=x^2+x+1\Leftrightarrow x^3-x^2-2x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Với $a+b+x+3=0\Leftrightarrow b+x^2+2x+4=0\Leftrightarrow b+(x+1)^2=-3$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có các nghiệm là $x=1;\ x=\pm\sqrt{2}$.

BT 275. Giải phương trình: $-2x^2+x+1=(x^4-2x+1)\sqrt{x^5+x^2-1}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x^5+x^2-1\ge 0.$

$(*)\Leftrightarrow x^2-(3x^2-x-1)=(x^4-2x+1).\sqrt{(x^4-2x+1).x+(3x^2-x-1)}.$

Đặt $\begin{cases} a=x \\ b=\sqrt{(x^4-2x+1).x+(3x^2-x-1)}\ge 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b^2=(x^4-2x+1)\cdot a+(3x^2-x-1) \\ a^2=(x^4-2x+1)\cdot b+(3x^2-x-1) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2-a^2=(x^4-2x+1)\cdot(a-b)\Leftrightarrow(a-b)\cdot(a+b+x^4-2x+1)=0$

$\Leftrightarrow(a-b)\cdot(b+x^4-x+1)=0\Leftrightarrow(a-b)\cdot\left[b+\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow a=b\Rightarrow\sqrt{x^5+x^2-1}=x\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0 \\ x^5=1 \end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=1.$

BT 276. Giải phương trình: $x^2+4x=\sqrt{x+6}.\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -6.$

Đặt $y+2=\sqrt{x+6},$ suy ra hệ: $\begin{cases} y^2+4y+4=x+6 \\ x^2+4x=y+2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y^2+4y-x-2=0 \\ x^2+4x-y-2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2-x^2+5.(y-x)=0\Leftrightarrow(y-x)\cdot(x+y+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x-5 \end{array}\right.$.

Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{x+6}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -2 \\ x^2+3x-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}\cdot$

Với $y=-x-5,$ suy ra: $\sqrt{x+6}=-x-3\Leftrightarrow\begin{cases} x\le -3 \\ x^2+5x+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}\cdot$

BT 277. Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}.\qquad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{5}{4}\cdot$

Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5},$ suy ra hệ: $\begin{cases} 4y^2-12y+9=4x+5 \\ 2x^2-6x-1=2y-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y^2-3y-x+1=0 \\ x^2-3x-y+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2-x^2-2(y-x)=0\Leftrightarrow(y-x)(x+y-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=2-x \end{array}\right.$.

Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{4x+5}=2x-3\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge\dfrac{3}{2} \\ x^2-4x+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}.$

Với $y=2-x,$ suy ra: $\sqrt{4x+5}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2} \\ x^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=1-\sqrt{2},\ x=2+\sqrt{3}.$

BT 278. Giải phương trình: $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}.$ $(x\in \square)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -5.$

Đặt $y-2=\sqrt{x+5},$ suy ra hệ: $\begin{cases} y^2-4y+4=x+5 \\ x^2-4x-3=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y-x-1=0 \\ x^2-4x-y-1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2-x^2-3(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(x+y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=3-x \end{array}\right.$.

Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{x+5}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x2 \\ x^2-5x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\cdot$

Với $y=3-x,$ suy ra: $\sqrt{x+5}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=-1,\ x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\cdot$

BT 279. Giải phương trình: $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}\cdot$ $(x\in \square)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -3.$

Đặt $y+1=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}},$ suy ra hệ: $\begin{cases} 2y^2+4y+2=x+3 \\ 2x^2+4x=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+4y-x-1=0 \\ 2x^2+5x-y-1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2.(y^2-x^2)+5.(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(2y+2x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-\dfrac{1}{2}(2x+5) \end{array}\right.$.

Với $y=x,$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 2x^2+3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}\cdot$

Với $y=-\dfrac{1}{2}(2x+5),$ suy ra: $\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}=-\dfrac{3}{2}-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{3}{2} \\ 4x^2+10x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2},\ x=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}\cdot$

BT 280. Giải phương trình: $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}.$ $(x\in \square)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

Đặt $y-1=\sqrt{2x-1}$, suy ra hệ: $\begin{cases}(y-1)^2=2x-1\\ x^2-2x=2.(y-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-2y-2x+2=0\\ x^2-2x-2y+2=0\end{cases}$

$\Rightarrow y^2-x^2=0 \Leftrightarrow (y-x).(y+x)=0 \Leftrightarrow x=y$ hoặc $x=-y.$

Với $x=y$, suy ra: $\sqrt{2x-1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2-4x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}.$

Với $y=-x$, suy ra: $\sqrt{2x-1}=-x-1$: vô nghiệm khi $x\ge \dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=2+\sqrt{2}.$

BT 281. Giải phương trình: $4x^2+4x-3=\sqrt{2x+5}.$ $(x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{5}{2}\cdot$

Đặt $2y+1=\sqrt{2x+5}$, suy ra hệ: $\begin{cases}4y^2+4y+1=2x+5\\ 4x^2+4x-3=2y+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^2+2y-x-2=0\\ 2x^2+2x-y-2=0\end{cases}$

$\Rightarrow 2.(y^2-x^2)+3.(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)\cdot(2y+2x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\ y=-\dfrac{3}{2}-x\end{array}\right.\cdot$

Với $y=x$, suy ra: $\sqrt{2x+5}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 2x^2+x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}\cdot$

Với $y=-\dfrac{3}{2}-x$, suy ra: $\sqrt{2x+5}=-2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -1\\ 4x^2+6x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{3+\sqrt{13}}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$, $x=-\dfrac{3+\sqrt{13}}{4}\cdot$

BT 282. Giải phương trình: $9x^2-6x-5=\sqrt{3x+5}.$ $(x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{5}{3}\cdot$

Đặt $3y-1=\sqrt{3x+5}$, suy ra hệ: $\begin{cases}9y^2-6y+1=3x+5\\ 9x^2-6x-5=3y-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9y^2-6y-3x-4=0\\ 9x^2-6x-3y-4=0\end{cases}$

$\Rightarrow 3.(y^2-x^2)-3.(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x).(3x+3y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\ y=\dfrac{1-3x}{3}\end{array}\right.\cdot$

Với $y = x,$ suy ra: $\sqrt{3x+5} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 9x^2 - 9x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}\cdot$

Với $y = \dfrac{1-3x}{3},$ suy ra: $\sqrt{3x+5} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 9x^2 - 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{6}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là: $x = \dfrac{4}{3},\ x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{6}\cdot$

BT 283. Giải phương trình: $18x^2 + 6x - 29 = \sqrt{12x+61}.$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -\dfrac{61}{12}\cdot$

Đặt $6y + 1 = \sqrt{12x+61},$ suy ra hệ: $\begin{cases} 36y^2 + 12y + 1 = 12x + 61 \\ 18x^2 + 6x - 29 = 6y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + y - x = 5 \\ 3x^2 + x - y = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow 3.(y^2 - x)^2 + 2(y - x) = 0 \Leftrightarrow (y - x)(3x + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -\dfrac{2}{3} - x \end{array}\right.\cdot$

Với $y = x,$ suy ra: $\sqrt{12x+61} = 6x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{6} \\ 36x^2 - 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{15}}{3}\cdot$

Với $y = -\dfrac{2}{3} - x \Rightarrow \sqrt{12x+61} = -3 - 6x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2} \\ 36x^2 + 24x - 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1+\sqrt{14}}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{\sqrt{15}}{3},\ x = -\dfrac{1+\sqrt{14}}{3}\cdot$

BT 284. Giải phương trình: $9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}.$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $3x + 8 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{8}{3}\cdot$

Đặt $3y + 2 = \sqrt{3x+8},$ $\left(y \ge -\dfrac{2}{3}\right),$ suy ra hệ: $\begin{cases} 9y^2 + 12y - 3x - 4 = 0 \\ 9x^2 + 12x - 3y - 4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 9(y^2 - x^2) + 15.(y - x) = 0 \Leftrightarrow (y - x)(9y + 9x + 15) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -\dfrac{15}{9} - x \end{array}\right.\cdot$

Với $y = x,$ suy ra: $\sqrt{3x+8} = 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{2}{3} \\ 9x^2 + 9x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\cdot$

Với $y = -\dfrac{15}{9} - x$, suy ra: $\sqrt{3x+8} = -3-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ 9x^2 + 15x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{6}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{1}{3}$, $x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{6}$.

BT 285. Giải phương trình: $x^2 - x = 2004.(\sqrt{1+16032x} + 1)$. $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $1 + 16032 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{16032}$.

Đặt $2y - 1 = \sqrt{1+16032x}$, $\left(y \ge \dfrac{1}{2}\right)$, suy ra hệ: $\begin{cases} y^2 - y - 4008x = 0 \\ x^2 - x - 4008y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2 - x^2 + 4007.(y-x) = 0 \Leftrightarrow (y-x).(y+x+4007) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -4007 - x \end{array}\right.$.

Với $y = x$, suy ra: $\sqrt{1+16032x} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 16036x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4009.$

Với $y = -4007 - x$, suy ra: $\sqrt{1+16032x} = -8015 - 2x$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = 4009$.

BT 286. Giải phương trình: $x^2 - x - 1000.\sqrt{1+8000x} = 1000$. $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $1 + 8000 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{8000}$.

Đặt $2y - 1 = \sqrt{1+8000x}$, $\left(y \ge \dfrac{1}{2}\right)$, suy ra hệ: $\begin{cases} y^2 - y - 2000x = 0 \\ x^2 - x - 2000y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (y-x)(y+x+1999) = 0 \Leftrightarrow y = x$, do $y \ge \dfrac{1}{2}$, $x \ge -\dfrac{1}{8000} \Rightarrow y + x + 1999 > 0.$

Suy ra: $\sqrt{1+8000x} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 8004x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2001.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 2001$.

BT 287. Giải phương trình: $\dfrac{2}{3}\sqrt{4x+1} - 9x^2 + 26x - \dfrac{37}{3} = 0$. $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $4x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{4}$.

Đặt $3y - 4 = \sqrt{4x+1}$, $\left(y \ge \dfrac{4}{3}\right)$, suy ra hệ: $\begin{cases} (3y-4)^2 = 4x + 1 \\ (3x-4)^2 = 2x + 2y + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (y-x).(9x+9y-22)=0 \Leftrightarrow y=x$ hoặc $y=\dfrac{22}{9}-x.$

Với $y=x,$ suy ra: $(3x-4)^2=4x+1 \Leftrightarrow 9x^2-28x+15=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{14\pm\sqrt{61}}{9}.$

Với $y=\dfrac{22}{9}-x \Rightarrow \left[3\cdot\left(\dfrac{22}{9}-x\right)-4\right]^2=4x+1 \Leftrightarrow 9x^2-24x+\dfrac{91}{9}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{12\pm\sqrt{53}}{9}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{14+\sqrt{61}}{9},\ x=\dfrac{12-\sqrt{53}}{9}.$

BT 288. Giải phương trình: $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow (x+1)^3=3\sqrt[3]{3x+5}+2.$

Đặt $y+1=\sqrt[3]{3x+5},$ suy ra hệ phương trình: $\begin{cases}(y+1)^3=3x+5\\(x+1)^3=3y+5\end{cases}$

$\Rightarrow (y-x)\cdot\left[\left(y+1+\dfrac{x+1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(x+1)^2+3\right]=0 \Leftrightarrow y=x.$

Với $y=x,$ suy ra: $(x+1)^3=3x+5 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=-2,\ x=1.$

BT 289. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-2}=8x^3-60x^2+151x-128.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}=(2x-5)^3+x-3.$

Đặt $2y-5=\sqrt[3]{x-2},$ suy ra hệ phương trình: $\begin{cases}(2y-5)^3=x-2\\(2x-5)^3=2y-x-2\end{cases}$

$\Rightarrow (y-x)\cdot\left[\left(2y-5+\dfrac{2x-5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\cdot(2x-5)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow y=x.$

Suy ra: $(2x-5)^3=x-2 \Leftrightarrow 8x^3-60x^2+149x-123=0 \Leftrightarrow x=3.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3.$

BT 290. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt[3]{x-9}}{3}=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+9x-7.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6.$

Đặt $y-3=\sqrt[3]{x-9},$ suy ra hệ phương trình: $\begin{cases}(y-3)^3=x-9\\(x-3)^3=y-9\end{cases}$

$\Rightarrow (y-x)\cdot\left[(y-3)^2+(y-3)(x-3)+(x-3)^2+1\right]=0$

$$\Leftrightarrow (y-x)\cdot\left[\left(y-3+\frac{x-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot(x-3)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow y=x.$$

Với $y=x,$ suy ra: $(x-3)^3=x-9 \Leftrightarrow x^3-9x^2+26x-18=0 \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1.$

BT 291. Giải phương trình: $27x^3-23x+1=\sqrt[3]{26x-1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $3y=\sqrt[3]{26x-1},$ suy ra hệ: $\begin{cases}27y^3=26x-1\\27x^3-23x+1=3y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}27y^3=26x-1\\27x^3=23x+3y-1\end{cases}$

$$\Rightarrow 27y^3-27x^3=3x-3y \Leftrightarrow 27.(y-x).(x^2+xy+y^2)=3.(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\cdot\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{9}\right]=0 \Leftrightarrow y=x, \text{ do } \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{9}>0.$$

Suy ra: $27x^3-26x+1=0 \Leftrightarrow (x+1).(27x^2-27x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{9\pm\sqrt{69}}{18}\end{array}\right.\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=-1,\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{69}}{18}\cdot$

BT 292. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow (x+1)^3=\sqrt[3]{3x+4}+2x+3.$

Đặt $y+1=\sqrt[3]{3x+4},$ suy ra hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)^3=2x+y+4\\(y+1)^3=3x+4\end{cases}$

$$\Rightarrow (x+1)^3-(y+1)^3=y-x \Leftrightarrow (x-y)\cdot\left[(x+1)^2+(x+1)(y+1)+(y+1)^2\right]=y-x$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\cdot\left[\left(x+1+\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot(y+1)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Với $x=y,$ suy ra: $\sqrt[3]{3x+4}=x+1 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1.$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-2,\ x=1.$

BT 293. Giải phương trình: $1-6x-2x^2=\sqrt{8x^4+x^3}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{-3-\sqrt{11}}{2}\le x\le -\dfrac{1}{8}$ hoặc $0\le x\le \dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\cdot$

Do $x=0$ không là nghiệm nên chỉ xét $x\in\left[-\dfrac{3+\sqrt{11}}{2};-\dfrac{1}{8}\right]\cup\left(0;\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\right].$

- Trường hợp 1. Nếu $x \in \left[-\frac{3+\sqrt{11}}{2}; -\frac{1}{8} \right]$ thì $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - 6 \cdot \frac{1}{x} - 2 = -\sqrt{8 + \frac{1}{x}}$ (1)

Đặt $t = \frac{1}{x} < 0 \cdot$ Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t^2 - 6t - 2 = -\sqrt{t+8}.$

Đặt $3 - y = \sqrt{t+8},$ suy ra hệ: $\begin{cases} y^2 - 6y + 9 = t + 8 \\ t^2 - 6t - 2 = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 6y - t + 1 = 0 \\ t^2 - 6t - y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2 - t^2 - 5.(y-t) = 0 \Leftrightarrow (y-t) \cdot (y+t-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = t \\ y = 5 - t \end{array} \right. .$

Với $y = t,$ suy ra: $\sqrt{t+8} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t^2 - 7t + 1 = 0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Với $y = 5 - t,$ suy ra: $\sqrt{t+8} = t - 2:$ vô nghiệm khi $t < 0.$

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm khi $x \in \left[-\frac{3+\sqrt{11}}{2}; -\frac{1}{8} \right].$

- Trường hợp 2. Nếu $x \in \left(0; \frac{-3+\sqrt{11}}{2} \right]$ thì $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - 6 \cdot \frac{1}{x} - 2 = \sqrt{8 + \frac{1}{x}}$ (2)

Đặt $t = \frac{1}{x} > 0.$ Khi đó: $(2) \Leftrightarrow t^2 - 6t - 2 = \sqrt{t+8}.$

Đặt $y - 3 = \sqrt{t+8},$ suy ra hệ: $\begin{cases} y^2 - 6y + 9 = t + 8 \\ t^2 - 6t - 2 = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 6y - t + 1 = 0 \\ t^2 - 6t - y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2 - t^2 - 5.(y-t) = 0 \Leftrightarrow (y-t) \cdot (y+t-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = t \\ y = 5 - t \end{array} \right. .$

Với $y = t \Rightarrow \sqrt{t+8} = t - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 3 \\ t^2 - 7t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot$

Với $y = 5 - t \Rightarrow \sqrt{t+8} = 2 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 2 \\ t^2 - 5t - 4 = 0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot$

BT 294. Giải phương trình: $3x^2 + 2x - 1 + \sqrt{3x^4 + x^3} = 0$ (*)

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{3x^4 + x^3} = -3x^2 - 2x + 1$ (**)

Điều kiện: $\begin{cases} 3x^4 + x^3 \geq 0 \\ -3x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$ hoặc $0 \leq x \leq \frac{1}{3} \cdot$

Do $x=0$ không là nghiệm nên chỉ xét $x\in\left[-1;-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right]\cdot$

- <u>Trường hợp 1</u>. Nếu $x\in\left[-1;-\dfrac{1}{3}\right]$ thì $(**)\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}-2\cdot\dfrac{1}{x}-3=-\sqrt{3+\dfrac{1}{x}}$ (1)

Đặt $t=\dfrac{1}{x}<0.$ Khi đó: $(1)\Leftrightarrow t^2-2t-3=-\sqrt{t+3}.$

Đặt $1-y=\sqrt{t+3},$ suy ra hệ: $\begin{cases}y^2-2y+1=t+3\\ t^2-2t-3=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-2y-t=2\\ t^2-2t-y=2\end{cases}$

$\Rightarrow y^2-t^2-(y-t)=0\Leftrightarrow(y-t)\cdot(y+t-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=t\\ y=1-t\end{array}\right.\cdot$

Với $y=t\Rightarrow\sqrt{t+3}=1-t\Leftrightarrow\begin{cases}t<0\\ t^2-3t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}\cdot$

So với điều kiện, phương trình vô nghiệm khi $x\in\left[-1;-\dfrac{1}{3}\right]\cdot$

- <u>Trường hợp 2</u>. Nếu $x\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right]\cdot$ Khi đó: $(**)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2}-2\cdot\dfrac{1}{x}-3=\sqrt{3+\dfrac{1}{x}}$ (2)

Đặt $t=\dfrac{1}{x}>0.$ Khi đó: $(2)\Leftrightarrow t^2-2t-3=\sqrt{t+3}.$

Đặt $y-1=\sqrt{t+3},$ suy ra hệ: $\begin{cases}y^2-2y+1=t+3\\ t^2-2t-3=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-2y-t=2\\ t^2-2t-y=2\end{cases}$

$\Rightarrow y^2-t^2-(y-t)=0\Leftrightarrow(y-t)\cdot(y+t-1)=0\Leftrightarrow y=t$ hoặc $y=1-t.$

Với $y=t\Rightarrow\sqrt{t+3}=t-1\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq 1\\ t^2-3t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}\cdot$

Với $y=1-t\Rightarrow\sqrt{t+3}=-t:$ vô nghiệm khi $t>0.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}\cdot$

<u>BT 295.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

<u>Lời giải</u>. Điều kiện: $x\geq 1.$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(\sqrt{x-1})^2+2.\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2.\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{x+3}{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\dfrac{x+3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\dfrac{x+3}{2}$ (1)

Nếu $x \in [1;2]$, thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=\dfrac{x+3}{2} \Leftrightarrow x=1.$

Nếu $x>2$, thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=\dfrac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=x+3 \Leftrightarrow x=5.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có 2 nghiệm là $x=1,\ x=5.$

BT 296. Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$. Đặt $t=\sqrt{x-1} \geq 0$, suy ra: $x=t^2+1.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-4t+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2}+\sqrt{(t-2)^2}=1$

$\Leftrightarrow |t-1|+|t-2|=1$ (1)

- Trường hợp 1. Nếu $t \in [0;1) \Rightarrow \sqrt{x-1} \in [0;1) \Leftrightarrow x \in [1;2)\cdot$ Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow -t+2+1-t=1 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=0:$ loại.

- Trường hợp 2. Nếu $t \in [1;2] \Rightarrow \sqrt{x-1} \in [1;2] \Leftrightarrow x \in [2;5]\cdot$ Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow -t+2+t-1=1 \Leftrightarrow 0=0:$ luôn đúng nên $x \in [2;5]\cdot$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là tất cả các giá trị $x \in [2;5]\cdot$

BT 297. Giải phương trình: $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -1$. Đặt $t=\sqrt{x+1} \geq 0$, suy ra: $x=t^2-1.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-2t+1}=1 \Leftrightarrow |t-2|+|t-1|=1$ (1)

- Trường hợp 1. Nếu $t \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ thì khi đó:

(1) $\Leftrightarrow -t+2-t+1=1 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x=0$ (nhận).

- Trường hợp 2. Nếu $1<t \leq 2 \Leftrightarrow 1<\sqrt{x+1} \leq 2 \Leftrightarrow 0<x \leq 3$ thì khi đó:

(1) $\Leftrightarrow -t+2+t-1=1 \Leftrightarrow 1=1:$ luôn đúng nên $x \in (0;3]\cdot$

- Trường hợp 3. Nếu $t>2 \Rightarrow \sqrt{x+1}>2 \Leftrightarrow x>3$ thì khi đó:

(1) $\Leftrightarrow t-2+t-1=1 \Leftrightarrow 2t=4 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow \sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow x=3$ (loại).

Kết luận: Nghiệm của phương trình là tất cả các giá trị $x \in (0;3]\cdot$

BT 298. Giải phương trình: $\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}=14.$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \dfrac{5}{2}\cdot$ Đặt $t=\sqrt{2x-5} \geq 0$, suy ra: $2x=t^2+5.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14 \Leftrightarrow |t+1|+|t+3|=14$

$\Leftrightarrow t+1+t+3=14 \Leftrightarrow t=5 \Rightarrow \sqrt{2x-5}=5 \Leftrightarrow x=15.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=15.$

BT 299. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}=x+1.$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1.$

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\right)^2}=x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}+\left|\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\right|=x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}+\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2}=x+1\\ \sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2}\ge 0\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}-\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}=x+1\\ \sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2}<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sqrt{1-x^2}=x+1\\ \sqrt{1-x^2}\ge \dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=0\\ \sqrt{1-x^2}\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ 5x^2+2x-3=0\\ 1-x^2\ge \dfrac{1}{4}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=0\\ 1-x^2<\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{5}:$ thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3}{5}\cdot$

BT 300. Giải phương trình: $10x^2-9x-8x\sqrt{2x^2-3x+1}+3=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x^2-3x+1\ge 0\Leftrightarrow x\le \dfrac{1}{2}$ hoặc $x\ge 1.$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-3x+1}\ge 0.$ Suy ra: $t^2=2x^2-3x+1.$

$(*)\Leftrightarrow 3.(2x^2-3x+1)-8x.\sqrt{2x^2-3x+1}+4x^2=0\Rightarrow 3t^2-8x.t+4x^2=0.$

Có: $\Delta_t'=4x^2\Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2x^2-3x+1}=2x\\ t=\sqrt{2x^2-3x+1}=\dfrac{2}{3}x\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ hoặc $x=\dfrac{3}{7}$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, các nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{3}{2},\ x=\dfrac{3}{7},\ x=\dfrac{1}{3}\cdot$

BT 301. Giải phương trình: $x^2+x(3-\sqrt{x^2+2})=1+2\sqrt{x^2+2}$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow(x^2+2)-(x+2).\sqrt{x^2+2}+3x-3=0.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2}\ge\sqrt{2}$. Khi đó phương trình $\Leftrightarrow t^2-(x+2).t+3x-3=0$

$\Delta_t=(x+2)^2-4.(3x-3)=(x-4)^2$. Suy ra: $\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{x^2+2}=3\\t=\sqrt{x^2+2}=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{7}\\x=-\sqrt{7}\end{array}\right.$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=-\sqrt{7}$, $x=\sqrt{7}$.

BT 302. Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $-2\le x\le 2$.

$(*)\Leftrightarrow 4.(2x+4)+16.(2-x)+16\sqrt{2.(4-x^2)}=9x^2+16$

$\Leftrightarrow 4.\left[2(4-x^2)\right]+16.\sqrt{2.(4-x^2)}-x^2-8x=0.$

Đặt $t=\sqrt{2.(4-x^2)}\ge 0$. Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 4t^2+16t-x^2-8x=0$.

Ta có: $\Delta'_t=64-4.(-x^2-8x)=4x^2+32x+64=(2x+8)^2$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2.(4-x^2)}=\dfrac{x}{2}\\t=\sqrt{2.(4-x^2)}=-\dfrac{x}{2}-4<0,\forall x\in\left[-1;1\right]\quad(L)\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\9x^2=32\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

BT 303. Giải phương trình: $x^3+6x^2-2x+3-(5x-1)\sqrt{x^3+3}=0$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $x^3+3\ge 0\Leftrightarrow x\ge-\sqrt[3]{3}$.

$(*)\Leftrightarrow(x^3+3)-(5x-1).\sqrt{x^3+3}+(6x^2-2x)=0.$

Đặt $t=\sqrt{x^3+3}\ge 0$. Khi đó phương trình $\Leftrightarrow t^2-(5x-1).t+(6x^2-2x)=0$.

Ta có: $\Delta_t=(5x-1)^2-4.(6x^2-2x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{x^3+3}=2x\\t=\sqrt{x^3+3}=3x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\x^3-4x^2+3=0\end{cases}\\\begin{cases}3x-1\ge 0\\x^3-9x^2+6x+2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\\x=4+3\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Kết luận: So điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1$, $x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$, $x=4+3\sqrt{2}$.

BT 304. Giải phương trình: $(x+4)\sqrt{x^3+9}=x^3+x+12$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $x^3+9\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\sqrt[3]{9}.$

$(*)\Leftrightarrow (x^3+9)-(x+4).\sqrt{x^3+9}+(x+3)=0.$

Đặt $t=\sqrt{x^3+9}\ge 0.$ Khi đó phương trình $\Leftrightarrow t^2-(x+4).t+(x+3)=0.$

Ta có: $\Delta_t=(x+4)^2-4.(x+3)=x^2-4x+4=(x-2)^2.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x^3+9}=x+1 \\ t=\sqrt{x^3+9}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -1 \\ x^3-x^2-2x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0. \\ x^3=0 \end{array}\right.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=0.$

BT 305. Giải phương trình: $2x+\dfrac{x-1}{x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$ $\quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x<0$ hoặc $x\ge 1.$

$(*)\Leftrightarrow 2x+\dfrac{x-1}{x}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}+3\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{x-1}{x}}$ $(**)$ và đặt $a=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\ge 0\Rightarrow \dfrac{x-1}{x}=a^2.$

$(**)\Leftrightarrow a^2-(1+3\sqrt{x+1})\cdot a+2x=0$ và có $\Delta_a=(\sqrt{x+1}+3)^2,$ nên phương trình có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} a=\sqrt{x+1}-1 \\ a=2.(\sqrt{x+1}+1) \end{array}\right.$, suy ra: $\left[\begin{array}{ll} \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=\sqrt{x+1}-1 & (1) \\ \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=2.(\sqrt{x+1}+1) & (2) \end{array}\right.$.

Nhận thấy rằng, nếu $x\in\left[-1;0\right)$ thì (1) và (2) vô nghiệm, nên xét $x\ge 1:$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{x.(x+1)}\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{x^2-x}=x^2+x$

$\Leftrightarrow (x^2-x)-2.\sqrt{x^2-x}+1=0\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-x}-1)^2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{x+1}+2:$ vô nghiệm do $\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}<1$ mà $2\sqrt{x+1}+2\ge 2.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

BT 306. Giải phương trình: $x-3=\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x^2}$ $\quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1.$ Đặt $a=\sqrt{1+x}\ge 0,$ $b=\sqrt{1-x}\ge 0.$

$(*)\Leftrightarrow 3.\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}+(1+x)+2.(1-x)$

$\Rightarrow 3ab+2b=a+a^2+2b^2\Leftrightarrow a^2+(1-3b)+2b^2-2b=0\Leftrightarrow (a-2b).(a+1-b)=0$

$\Leftrightarrow a=2b$ hoặc $a+1=b.$

Với $a = 2b$, suy ra: $\sqrt{1+x} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 1+x = 4.(1-x) \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}\cdot$

Với $a+1=b$, suy ra: $\sqrt{1+x}+1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} = -1-2x \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \dfrac{3}{5}\cdot$

BT 307. Giải phương trình: $x + 6 = 4\sqrt{1-x} - 5\sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$. Đặt $a = \sqrt{1+x} \ge 0$, $b = \sqrt{1-x} \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow 3.\sqrt{1-x^2} = 5.\sqrt{1+x} - 4.\sqrt{1-x} + 2.(x+1) + (1-x) + 3$

$\Rightarrow 3ab = 5a - 4b + 2a^2 + b^2 + 3 \Leftrightarrow b^2 - (4+3a).b + 2a^2 + 5a + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (b - 2a - 3).(b - a - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 2a + 3$ hoặc $b = a + 1$.

Với $b = 2a + 3$, suy ra: $\sqrt{1-x} = 2\sqrt{x+1} + 3 \Leftrightarrow 12\sqrt{x+1} = -12 - 5x$: vô nghiệm.

Với $b = a + 1$, suy ra: $\sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} = -1 - 2x \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

BT 308. Giải phương trình: $(4 - \sqrt{1-x})\sqrt{1+x} = 1 + 3x + 2\sqrt{1-x}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$. Đặt $a = \sqrt{1+x} \ge 0$, $b = \sqrt{1-x} \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow 4.\sqrt{x+1} = 2.(1+x) - (1-x) + 2.\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$.

$\Rightarrow 4a = 2a^2 - b^2 + 2b + ab \Leftrightarrow 2a^2 - (4-b).a + 2b - b^2 = 0 \Leftrightarrow (2a - b).(a + b - 2) = 0$

$\Leftrightarrow b = 2a$ hoặc $b = 2 - a$.

Với $b = 2a$, suy ra: $2\sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 4.(x+1) = 1 - x \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{5}\cdot$

Với $b = 2 - a$, suy ra: $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 4 \Leftrightarrow x = 0$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = -\dfrac{3}{5}$, $x = 0$.

BT 309. Giải: $\sqrt[3]{x^2 - 7x + 8} + \sqrt[3]{x^2 - 6x + 7} - \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12} = 3$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x^2 - 7x + 8} \\ b = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 7} \\ c = \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = x^2 - 7x + 8 \\ b^3 = x^2 - 6x + 7 \\ c^3 = -2x^2 + 13x + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 27 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \quad (1)$

Ta có hằng đẳng thức: $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3.(a+b).(b+c).(c+a)$ (2)

Thế (1) vào (2), ta được: $27 = 27 + 3.(a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x^2-7x+8} = -\sqrt[3]{x^2-6x+7} \\ \sqrt[3]{x^2-6x+7} = \sqrt[3]{2x^2-13x-12} \\ \sqrt[3]{2x^2-13x-12} = \sqrt[3]{x^2-7x+8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-13x+15=0 \\ x^2-7x-19=0 \\ x^2-6x-20=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ hoặc $x=5$ hoặc $x = \dfrac{7\pm5\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = 3\pm\sqrt{29}$.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{3}{2},\ x=5,\ x=\dfrac{7\pm5\sqrt{5}}{2},\ x=3\pm\sqrt{29}$.

BT 310. Giải: $\sqrt[3]{8x+5} + \sqrt[3]{9x-x^2+15} + \sqrt[3]{x^2-17x+7} = 3$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{8x+5} \\ b = \sqrt[3]{9x-x^2+15} \\ c = \sqrt[3]{x^2-17x+7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 8x+5 \\ b^3 = 9x-x^2+15 \\ c^3 = x^2-17x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3+b^3+c^3 = 27 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ (1)

Ta có hằng đẳng thức: $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3.(a+b).(b+c).(c+a)$ (2)

Thế (1) vào (2), ta được: $27 = 27+3.(a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{8x+5} = -\sqrt[3]{9x-x^2+15} \\ \sqrt[3]{9x-x^2+15} = -\sqrt[3]{x^2-17x+7} \\ \sqrt[3]{x^2-17x+7} = -\sqrt[3]{8x+5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-17x-20=0 \\ 8x=22 \\ x^2-9x+12=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{17\pm3\sqrt{41}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{11}{4}$ hoặc $x=\dfrac{9\pm\sqrt{33}}{2}$.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{17\pm3\sqrt{41}}{2},\ x=\dfrac{11}{4},\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{33}}{2}$.

BT 311. Giải: $\sqrt[3]{3x^2-x+2013} - \sqrt[3]{3x^2-7x+2014} - \sqrt[3]{6x-2015} = \sqrt[3]{2014}$ (*)

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{3x^2-x+2013} \\ b = -\sqrt[3]{3x^2-7x+2014} \\ c = -\sqrt[3]{6x-2015} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 3x^2-x+2013 \\ b^3 = -(3x^2-7x+2014) \\ c^3 = -(6x-2015) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3+b^3+c^3 = 2014 \\ a+b+c = \sqrt[3]{2014} \end{cases}$

(1)

Ta có hằng đẳng thức: $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3.(a+b).(b+c).(c+a)$ (2)

Thế (1) vào (2), được: $2014 = 2014+3(a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{3x^2-x+2013}=\sqrt[3]{3x^2-7x+2014} \\ -\sqrt[3]{3x^2-7x+2014}=\sqrt[3]{6x-2015} \\ -\sqrt[3]{6x-2015}=\sqrt[3]{3x^2-x+2013} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x=1 \\ 3x^2-x-1=0 \\ 3x^2-7x+4028=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{6} \text{ hoặc } x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}\cdot$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{1}{6}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}\cdot$

BT 312. Giải: $\sqrt[3]{x^2+4x+3}+\sqrt[3]{4x^2-9x-3}=\sqrt[3]{3x^2-2x+2}+\sqrt[3]{2x^2-3x-2}$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x^2+4x+3} \\ b=\sqrt[3]{4x^2-9x-3} \\ c=-\sqrt[3]{3x^2-2x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3+b^3+c^3=2x^2-3x-2 \\ a+b+c=\sqrt[3]{2x^2-3x-2} \end{cases}$ (1)

Ta có hằng đẳng thức: $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3.(a+b).(b+c).(c+a)$ (2)

Thế (1) vào (2), được: $2x^2-3x-2=2x^2-3x-2+3.(a+b).(b+c).(c+a)$

$$\Leftrightarrow (a+b).(b+c).(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x^2+4x+3}=-\sqrt[3]{4x^2-9x-3} \\ \sqrt[3]{4x^2-9x-3}=\sqrt[3]{3x^2-2x+2} \\ \sqrt[3]{3x^2-2x+2}=\sqrt[3]{x^2+4x+3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2-5x=0 \\ x^2-7x-5=0 \\ 2x^2-6x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pm\sqrt{69}}{2} \\ x=0 \vee x=1 \\ x=\frac{3\pm\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.\cdot$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm là $x=0$, $x=1$, $x=\frac{7\pm\sqrt{69}}{2}$, $x=\frac{3\pm\sqrt{11}}{2}\cdot$

BT 313. Giải: $x^2-6x+29+2\sqrt{3x^2+10x+3}=(10-2x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{3}\cdot$ Khi đó phương trình đã cho:

$$(x-5)^2+(x+3)+(3x+1)+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}+2(x-5)\sqrt{x+3}+2(x-5)\sqrt{3x+1}=0$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+3}\ge 0 \\ b=\sqrt{3x+1}\ge 0 \\ c=x-5 \end{cases}$. Khi đó phương trình $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 0 \Leftrightarrow a+b+c=0,$ suy ra: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+x-5=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)+(\sqrt{3x+1}-2)+(x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3.(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Do ta luôn có lượng: $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1>0,\ \forall x \ge -\dfrac{1}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=1.$

BT 314. Giải: $\dfrac{x^2}{x-1}+\sqrt{x-1}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x>1.$

Đặt $a=\dfrac{x^2}{x-1},\ b=\sqrt{x-1},\ c=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2}$, suy ra: $a.b.c=1.$ Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow a+b+c=\frac{ab+bc+ca}{abc}=ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow a+b+c-ab-bc-ca=0 \Leftrightarrow a+b+c-ab-bc-ca+abc-1=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1).(b-1).(c-1)=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ hoặc } b=1 \text{ hoặc } c=1.$$

Với $a=1,$ suy ra: $\dfrac{x^2}{x-1}=1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0:$ vô nghiệm.

Với $b=1,$ suy ra: $\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=2.$

Với $c=1,$ suy ra: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=1 \Leftrightarrow x^4-x+1=0:$ vô nghiệm khi $x>1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 315. Giải: $x=\sqrt{5-x}.\sqrt{6-x}+\sqrt{6-x}.\sqrt{7-x}+\sqrt{7-x}.\sqrt{5-x}$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \le 5.$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a=\sqrt{5-x}\ge 0 \\ b=\sqrt{6-x}\ge 0 \\ c=\sqrt{7-x}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=5-x \\ b^2=6-x \\ c^2=7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-a^2=ab+bc+ca \\ x=6-b^2=ab+bc+ca \\ x=7-c^2=ab+bc+ca \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+bc+ca=5 \\ b^2+ab+bc+ca=6 \\ c^2+ab+bc+ca=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.(a+b)+c.(a+b)=5 \\ b.(a+b)+c.(a+b)=6 \\ c.(b+c)+a.(b+c)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b).(a+c)=5 & (1) \\ (a+b).(b+c)=6 & (2) \\ (b+c).(a+c)=7 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) nhân (2) nhân (3), suy ra: $(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2=210$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c)=\sqrt{210} \qquad (4)$$

Lập tỉ số: $\frac{(4)}{(1)}, \frac{(4)}{(2)}, \frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \begin{cases} b+c=\frac{\sqrt{210}}{5} \\ a+c=\frac{\sqrt{210}}{6} \\ a+b=\frac{\sqrt{210}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=\frac{\sqrt{210}}{30} \\ a+b=\frac{\sqrt{210}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow b=\frac{37\sqrt{210}}{420}\cdot$

Với $b=\frac{37\sqrt{210}}{420}$, suy ra: $\sqrt{6-x}=\frac{37\sqrt{210}}{420} \Leftrightarrow x=\frac{3671}{840}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{3671}{840}\cdot$

BT 316. Giải: $2x=\sqrt{2-x}\sqrt{10-4x}+\sqrt{5-2x}\sqrt{6-2x}+2\sqrt{3-x}\sqrt{2-x}+1 \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\frac{1}{2}\le x\le 2.$

$(*) \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{4-2x}.\sqrt{5-2x}+\sqrt{5-2x}.\sqrt{6-2x}+\sqrt{6-2x}.\sqrt{4-2x}.$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{4-2x}\ge 0 \\ b=\sqrt{5-2x}\ge 0 \\ c=\sqrt{6-2x}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4-2x \\ b^2=5-2x \\ c^2=6-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-a^2=2x-1=ab+bc+ca \\ 4-b^2=2x-1=ab+bc+ca \\ 5-c^2=2x-1=ab+bc+ca \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+bc+ca=3 \\ b^2+ab+bc+ca=4 \\ c^2+ab+bc+ca=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.(a+b)+c.(a+b)=3 \\ b.(a+b)+c.(a+b)=4 \\ c.(b+c)+a.(b+c)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b).(a+c)=3 & (1) \\ (a+b).(b+c)=4 & (2) \\ (b+c).(a+c)=5 & (3) \end{cases}$

Lấy (1) nhân (2) nhân (3), suy ra: $(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2=60$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c)=2\sqrt{15} \quad (4)$

Lập tỉ số $\frac{(4)}{(1)}, \frac{(4)}{(2)}, \frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \begin{cases} b+c=\frac{2\sqrt{15}}{3} \\ a+c=\frac{2\sqrt{15}}{4} \\ a+b=\frac{2\sqrt{15}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=\frac{\sqrt{15}}{6} \\ a+b=\frac{2\sqrt{15}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow b=\frac{17\sqrt{15}}{60}\cdot$

Với $b=\frac{17\sqrt{15}}{60}$, suy ra: $\sqrt{5-2x}=\frac{17\sqrt{15}}{60} \Leftrightarrow 5-2x=\frac{289}{240} \Leftrightarrow x=\frac{911}{480}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{911}{480}\cdot$

BT 317. Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=28-x. \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-x^2-8x+48\ge 0 \Leftrightarrow -12\le x\le 4.$

Đặt $\begin{cases} a = x+3 \\ b = \sqrt{-x^2-8x+48} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x^2+6x+9 \\ b^2 = -x^2-8x+48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = -2x+57 \\ 2ab = 56-2x \end{cases}$

$\overset{-}{\Rightarrow} a^2+b^2-2ab = 1 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=-1 \end{array}\right.$.

Với $a-b=1$, suy ra: $\sqrt{-x^2-8x+48} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2+6x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{31}-3.$

Với $a-b=-1$, suy ra: $\sqrt{-x^2-8x+48} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x^2+8x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{2}-4.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \sqrt{31}-3,\ x = 4\sqrt{2}-4.$

BT 318. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{-x^2-4x+5} = 3x + \dfrac{3}{2}\cdot$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-x^2-4x+5 \ge 0 \Leftrightarrow -5 \le x \le 1.$

$(*) \Leftrightarrow 2.(x-1).\sqrt{-x^2-4x+5} = 6x+3.$

Đặt $\begin{cases} a = x-1 \\ b = \sqrt{-x^2-4x+5} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x^2-2x+1 \\ b^2 = -x^2-4x+5 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{cases} a^2+b^2 = -6x+6 \\ 2ab = 6x+3 \end{cases}.$

$\overset{+}{\Rightarrow} (a+b)^2 = 9 = 3^2 \Leftrightarrow a+b=3$ hoặc $a+b=-3.$

Với $a+b=3$, suy ra: $\sqrt{-x^2-4x+5} = 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ 2x^2-4x+11=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Với $a+b=-3$, suy ra: $\sqrt{-x^2-4x+5} = -x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ 2x^2+8x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình $x = -\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}\cdot$

BT 319. Giải phương trình: $2(x-5)\sqrt{-x^2+5x-4} = 5x-20$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-x^2+5x-4 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4.$

Đặt $\begin{cases} a = x-5 \\ b = \sqrt{-x^2+5x-4} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x^2-10x+25 \\ b^2 = -x^2+5x-4 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{cases} a^2+b^2 = -5x+21 \\ 2ab = 5x-20 \end{cases}$

$\overset{+}{\Rightarrow} (a+b)^2 = 1 \Leftrightarrow a+b=1$ hoặc $a+b=-1.$

Với $a+b=1$, suy ra: $\sqrt{-x^2+5x-4} = 6-x \Leftrightarrow 2x^2-17x+40=0$: vô nghiệm.

Với $a+b=-1$, suy ra: $\sqrt{-x^2+5x-4} = 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ 2x^2-13x+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{5}{2},\ x=4.$

BT 320. Giải phương trình: $(x+2).\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-3\le x\le 1$.

Đặt $\begin{cases}a=x+2\\ b=\sqrt{-x^2-2x+3}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=x^2+4x+4\\ b^2=-x^2-2x+3\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}\begin{cases}a^2+b^2=2x+7\\ 2ab=2x+6\end{cases}$

$\overset{-}{\Rightarrow}(a-b)^2=1\Leftrightarrow a-b=1$ hoặc $a-b=-1$.

Với $a-b=1$, suy ra: $\sqrt{-x^2-2x+3}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1.$

Với $a-b=-1$, suy ra: $\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ x^2+4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\sqrt{2}-1$, $x=-1$.

BT 321. Giải phương trình: $5x^2+4(x-2)\sqrt{x^2+x+1}=1$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases}a=x-2\\ b=\sqrt{x^2+x+1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=x^2-4x+4\\ 4b^2=4x^2+4x+4\end{cases}\overset{-}{\Rightarrow}\begin{cases}a^2+4b^2=5x^2+8\\ 4ab=1-5x^2\end{cases}$

$\overset{+}{\Rightarrow}(a+2b)^2=9=3^2\Leftrightarrow a+2b=3$ hoặc $a+2b=-3$.

Với $a+2b=3$, suy ra: $2\sqrt{x^2+x+1}=5-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5\\ 3x^2+14x-21=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm 4\sqrt{7}}{3}\cdot$

Với $a+2b=-3$, suy ra: $2\sqrt{x^2+x+1}=-x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1\\ 3x^2+2x+3=0\end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{-7\pm 4\sqrt{7}}{3}\cdot$

BT 322. Giải phương trình: $2x^2-4x-21=2(1-x)\sqrt{x^2-2x+3}$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases}a=1-x\\ b=\sqrt{x^2-2x+3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=x^2-2x+1\\ b^2=x^2-2x+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2x^2-4x+4\\ 2ab=2x^2-4x-21\end{cases}$

$\overset{-}{\Rightarrow}(a-b)^2=25\Leftrightarrow a-b=5$ hoặc $a-b=-5$.

Với $a-b=5$, suy ra: $\sqrt{x^2-2x+3}=6-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 6\\ 10x=33\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{33}{20}\cdot$

Với $a-b=-5$, suy ra: $\sqrt{x^2-2x+3}=-x-4\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -4\\ 10x=-13\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{13}{10}\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-\dfrac{13}{10}$, $x=\dfrac{33}{20}\cdot$

BT 323. Giải phương trình: $2x^2-6x+3+2(x-2)\sqrt{x^2-2x}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 2$ hoặc $x\leq 0.$

Đặt $\begin{cases} a=x-2 \\ b=\sqrt{x^2-2x}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=x^2-4x+4 \\ b^2=x^2-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2x^2-6x+4 \\ 2ab=-2x^2+6x-3 \end{cases}$

$\overset{-}{\Rightarrow}(a+b)^2=1\Leftrightarrow a+b=1$ hoặc $a+b=-1.$

Với $a+b=1,$ suy ra: $\sqrt{x^2-2x}=3-x\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ x^2-2x=x^2-6x+9 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}\cdot$

Với $a+b=-1,$ suy ra: $\sqrt{x^2-2x}=1-x\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ x^2-2x=x^2-2x+1 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{9}{4}\cdot$

BT 324. Giải phương trình: $5x^2-20x+12+4(x-2)\sqrt{x^2-4x+5}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a=x-2 \\ b=\sqrt{x^2-4x+5}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2=4x^2-16x+16 \\ b^2=x^2-4x+5 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{cases} 4a^2+b^2=5x^2-20x+21 \\ 4ab=-5x^2+20x-12 \end{cases}$

$\overset{+}{\Rightarrow}(2a+b)^2=9\Leftrightarrow 2a+b=3$ hoặc $2a+b=-3.$

Với $2a+b=3\Rightarrow\sqrt{x^2-4x+5}=7-2x\Leftrightarrow \begin{cases} 7-2x\geq 0 \\ 3x^2-24x+44=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{12-2\sqrt{3}}{3}\cdot$

Với $2a+b=-3\Rightarrow\sqrt{x^2-4x+5}=1-2x\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x\geq 0 \\ 3x^2=4 \end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{12-2\sqrt{3}}{3},\ x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot$

BT 325. Giải phương trình: $x^2-2x-4=(x-1).\sqrt{x^2-2x} \qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\leq 0$ hoặc $x\geq 2.$

Đặt $\begin{cases} a=x-1 \\ b=\sqrt{x^2-2x}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=x^2-2x+1 \\ b^2=x^2-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2x^2-4x+1 \\ 2ab=2x^2-4x-8 \end{cases}$

$\Rightarrow(a-b)^2=9\Leftrightarrow a-b=3$ hoặc $a-b=-3.$

Với $a-b=3\Rightarrow\sqrt{x^2-2x}=x-4\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 4 \\ 3x=8 \end{cases}$: vô nghiệm.

Với $a-b=-3\Rightarrow\sqrt{x^2-2x}=x+2\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ 6x+4=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = -\dfrac{2}{3}\cdot$

BT 326. Giải phương trình: $\dfrac{5+x}{\sqrt{5-2x}} + \dfrac{5-x}{\sqrt{5+2x}} = 8$ $\qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{5}{2}\cdot$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{5-2x} > 0 \\ b = \sqrt{5+2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 5-2x \\ b^2 = 5+2x \end{cases} \Rightarrow 2x = 5 - a^2 = b^2 - 5.$

Suy ra: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ \dfrac{15-a^2}{a} + \dfrac{15-b^2}{b} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 10 \\ 15\cdot\dfrac{a+b}{ab} = a+b+16 \end{cases}$

$\Rightarrow 15.(a+b) = (a+b+16)\cdot\dfrac{(a+b)^2-10}{2}\cdot$ Đặt $t = a+b > 0,$ thì:

$PT \Leftrightarrow 30t = (t+16)\cdot(t^2-10) \Leftrightarrow t^3 + 16t^2 - 40t - 160 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+20t+40) = 0$

$\Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow \sqrt{5-2x} + \sqrt{5+2x} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{25-4x^2} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \pm 2.$

BT 327. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{10-x}} - \dfrac{1}{\sqrt{10+x}} = \dfrac{3}{2x}$ $\qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-10 < x < 10$ và $x \neq 0.$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{10-x} > 0 \\ b = \sqrt{10+x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 20 \\ x = 10 - a^2 = b^2 - 10 \end{cases}.$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{10-a^2}{a} - \dfrac{b^2-10}{b} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{10}{a} + \dfrac{10}{b} = \dfrac{3}{2} + a + b \Leftrightarrow 20.(a+b) = \left[2.(a+b)+3\right]\cdot ab$

$\Rightarrow \begin{cases} 20.(a+b) = \left[2.(a+b)+3\right]\cdot ab \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20.(a+b) = \left[2.(a+b)+3\right]\cdot ab \\ (a+b)^2 = 2ab + 20 \end{cases}$

$\Rightarrow 40(a+b) = \left[2(a+b)+3\right]\left[(a+b)^2 - 20\right] \Leftrightarrow 2t^3 + 3t^2 - 80t = 60,$ với $t = a+b$

$\Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow \sqrt{10-x} + \sqrt{10+x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{100-x^2} = 8 \Leftrightarrow x = \pm 6.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \pm 6.$

BT 328. Giải phương trình: $\dfrac{1+x}{\sqrt{17-4x}} + \dfrac{1-x}{\sqrt{17+4x}} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{17}{4} < x < \dfrac{17}{4}\cdot$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{17-4x} > 0 \\ b = \sqrt{17+4x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 17-4x \\ b^2 = 17+4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 34 \\ 4x = 17 - a^2 = b^2 - 17 \end{cases}.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1+\dfrac{17-a^2}{4}}{a}+\frac{1-\dfrac{b^2-17}{4}}{b}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{21-a^2}{a}+\frac{21-b^2}{b}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{21}{a}+\frac{21}{b}=a+b+\frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{21}{a}+\dfrac{21}{b}=a+b+\dfrac{16}{5} \\ a^2+b^2=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21\cdot\dfrac{a+b}{ab}=a+b+\dfrac{16}{5} \\ (a+b)^2-2ab=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 42\cdot\dfrac{a+b}{2ab}=a+b+\dfrac{16}{5} \\ 2ab=(a+b)^2-34 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5.(a+b)^3+16.(a+b)^2-380.(a+b)-544=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ ab=15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(17-4x)\cdot(17+4x)}=15 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\pm 1$.

BT 329. Giải phương trình: $\dfrac{2+x}{\sqrt{20-x}}+\dfrac{2-x}{\sqrt{20+x}}=\dfrac{20}{3}$ $\quad (*) \quad (x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-20<x<20$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{20-x}>0 \\ b=\sqrt{20+x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=20-x \\ b^2=20+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=40 \\ x=20-a^2=b^2-20 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2+20-a^2}{a}+\frac{2-(b^2-20)}{b}=\frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{22}{a}+\frac{22}{b}=a+b+\frac{20}{3}.$$

Suy ra: $\begin{cases} a^2+b^2=40 \\ \dfrac{22}{a}+\dfrac{22}{b}=a+b+\dfrac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=40 \\ 22\cdot\dfrac{a+b}{ab}=a+b+\dfrac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=(a+b)^2-40 \\ 44\cdot\dfrac{a+b}{2ab}=a+b+\dfrac{20}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow 3.(a+b)^3+20.(a+b)^2-252.(a+b)-800=0 \Leftrightarrow a+b=8 \Rightarrow ab=12.$$

$$\Rightarrow \sqrt{(20-x)\cdot(20+x)}=12 \Leftrightarrow 400-x^2=144 \Leftrightarrow x^2=256 \Leftrightarrow x=\pm 16.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\pm 16$.

BT 330. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{6-x-x^2}}=\dfrac{7}{12}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 6-x-x^2>0 \\ 2x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<2 \\ 2x\neq -1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=2x+1 \\ b=2\sqrt{6-x-x^2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=4x^2+4x+1 \\ b^2=-4x^2-4x+24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{7}{12} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=25 \\ 12\cdot(a+b)=7ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=(a+b)^2-25 \\ 24\cdot(a+b)=7\cdot\left[(a+b)^2-25\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = (a+b)^2 - 25 \\ 7\cdot(a+b)^2 - 24\cdot(a+b) - 175 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a+b = -\dfrac{25}{7} \\ ab = -\dfrac{300}{49} \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ a.(7-a)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=3 \\ 2x+1=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} a+b=-\dfrac{25}{7} \\ ab=-\dfrac{300}{49} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ a^2+\dfrac{25}{7}\cdot a-\dfrac{300}{49}=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{5\sqrt{73}-25}{14} \Rightarrow x=\dfrac{5\sqrt{73}-39}{28}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=1,\ x=\dfrac{3}{2},\ x=\dfrac{5\sqrt{73}-39}{28}$.

BT 331. Giải phương trình: $\dfrac{4x^2+4x+11}{2\sqrt{(x+3)(2-x)}}+\dfrac{9-4x-4x^2}{\sqrt{4x^2+4x+26}}=32$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-3<x<2$.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{10+(2x+1)^2}{\sqrt{25-(2x+1)^2}}+\dfrac{10-(2x+1)^2}{\sqrt{25+(2x+1)^2}}=32 \Leftrightarrow \dfrac{10+y}{\sqrt{25-y}}+\dfrac{10-y}{\sqrt{25+y}}=32.$

Với $y=(2x+1)^2$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{25-y}>0 \\ b=\sqrt{25+y}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=50 \\ y=25-a^2=b^2-25 \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} a^2+b^2=50 \\ 35\cdot\dfrac{a+b}{ab}=a+b+32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=(a+b)^2-50 \\ 70\cdot(a+b)=(a+b+32)\cdot\left[(a+b)^2-50\right] \end{cases}$

$\Rightarrow (a+b)^3+32\cdot(a+b)^2-120\cdot(a+b)-1600=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ ab=7 \end{cases} \Rightarrow a=1.$

Với $a=1 \Rightarrow y=24 \Leftrightarrow (2x+1)^2=24 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm2\sqrt{6}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{-1\pm2\sqrt{6}}{2}$.

BT 332. Giải phương trình: $\dfrac{1}{7x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{(7x+11)\cdot(9-7x)}}=\dfrac{7}{24}$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{11}{7}<x<\dfrac{9}{7}$ và $x\neq-\dfrac{1}{7}$.

Đặt $\begin{cases} a=7x+1 \\ b=\sqrt{(7x+11)\cdot(9-7x)}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=100 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{7}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=100 \\ 24.(a+b)=7ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = (a+b)^2 - 100 \\ 48.(a+b) = 7.\left[(a+b)^2 - 100\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 14 \\ ab = 48 \end{cases} \vee \begin{cases} a+b = -\dfrac{50}{7} \\ ab = -\dfrac{1200}{49} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 14a + 48 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a^2 + \dfrac{50a}{7} - \dfrac{1200}{49} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = \dfrac{-25 - 5\sqrt{73}}{7} \\ a = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{7} \\ x = 1 \\ x = \dfrac{-32 - 5\sqrt{73}}{49} \end{array}\right..$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{5}{7}$, $x = 1$, $x = \dfrac{-32 - 5\sqrt{73}}{49}$.

BT 333. Giải phương trình: $x^4 - 2x^2\sqrt{3} + x + 3 - \sqrt{3} = 0$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 3 - (2x^2 + 1)\cdot\sqrt{3} + (x^4 + x) = 0$ và ta xem đây là phương trình bậc hai với ẩn là $\sqrt{3}$, khi đó: $\Delta_{\sqrt{3}} = (2x^2+1)^2 - 4.(x^4 + x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x+1)^2$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\cdot(2x^2 + 1 + 2x - 1) = x^2 + x \\ \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}(2x^2 + 1 - 2x + 1) = x^2 - x + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có các nghiệm là $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$.

BT 334. Giải phương trình: $x + 1 = (2x+1)\sqrt{2 + \sqrt{x+1}}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+1} \ge 0 \\ b = \sqrt{2 + \sqrt{x+1}} > \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - a = 2 \\ a^2 = (2a^2 - 1).b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b^2 - a \\ 2a^2 = (4a^2 - 2).b \end{cases}$

$\Rightarrow 2a^2 = (4a^2 - b^2 + a).b \Leftrightarrow (2a^2 - ab) - b.(4a^2 - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow a(2a - b) - b(2a - b)(2a + b) = 0 \Leftrightarrow (2a - b)(a - 2ab - b^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2a \\ a = 2ab + b^2 \end{array}\right..$

Với $b = 2a \Rightarrow 2 = (2a)^2 - a \Leftrightarrow 4a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1 + \sqrt{33}}{8} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{33} - 15}{32}$.

Với $a = 2ab + b^2 \Rightarrow \begin{cases} a - 2ab - b^2 = 0 \\ a = b^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2(b - 2) + 1 = 0 \\ a = b^2 - 2 \end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{33}-15}{32}\cdot$

BT 335. Giải: $2x^2-2x\sqrt{2}-\sqrt{2015}-\sqrt{2015}.\sqrt{2+4x\sqrt{2015}}=\sqrt{4030}$ $\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-\dfrac{2}{4\sqrt{2015}}\cdot$

Đặt $2y-\sqrt{2}=\sqrt{2+4x\sqrt{2015}}\Rightarrow\begin{cases}y^2-y\sqrt{2}=x\sqrt{2015}\\x^2-x\sqrt{2}=y\sqrt{2015}\end{cases}\Rightarrow x=y\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

Suy ra: $x^2-x\sqrt{2}=x\sqrt{2015}\Leftrightarrow x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{2015})\cdot x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2}+\sqrt{2015}\end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\sqrt{2}+\sqrt{2015}.$

BT 336. Giải phương trình: $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{-x^2-3x+10}+1=0$ $\quad(*)$

Lời giải. Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[3]{5+x}\\b=\sqrt[3]{2-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3=5+x\\b^3=2-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3+b^3=7\\ab=-x^2-3x+10\end{cases}$ $\quad(1)$

$(*),(1)\Rightarrow\begin{cases}a+b+ab+1=0\\a^3+b^3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1-ab\\(a+b)^3-3ab(a+b)=7\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1-ab\\(-1-ab)^3+3ab(1+ab)=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1-ab\\(ab)^3=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-3\\ab=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}\vee\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}\Leftrightarrow x=-6.$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=-6$.

BT 337. Giải phương trình: $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ne\dfrac{33}{2}\cdot$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[3]{34-x}\\b=\sqrt[3]{x+1}\end{cases},(a\ne b)\Leftrightarrow\begin{cases}a^3=34-x\\b^3=x+1\end{cases}\Rightarrow a^3+b^3=35$ $\quad(1)$

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{a^3b-ab^3}{a-b}=30\Leftrightarrow ab(a^2-b^2)=30(a-b)\Leftrightarrow ab(a-b)(a+b)=30(a-b)$

$\Leftrightarrow ab(a+b)=30\ (\text{do}: a\ne b)\,(2)$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 35 \\ ab(a+b) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 35 \\ ab(a+b) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 = 125 \\ ab(a+b) = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}.$$

Với: $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt[3]{34-x}=2 \\ b=\sqrt[3]{x+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34-x=8 \\ x+1=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=26 \\ x=26 \end{cases} \Leftrightarrow x=26.$

Với: $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt[3]{34-x}=3 \\ b=\sqrt[3]{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34-x=27 \\ x+1=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=7 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm: $x=7 \vee x=26$.

BT 338. Giải phương trình: $4x=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}\cdot$ $\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x>0$.

Đặt $y=\dfrac{1}{4}\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}>0$. Suy ra hệ: $\begin{cases} 4y=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}} \\ 4x=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{y+30}} \end{cases} \Rightarrow x=y.$

$\Rightarrow 4x=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}$. Đặt $z=\dfrac{1}{4}\sqrt{x+30} \Rightarrow \begin{cases} 4x=\sqrt{z+30} \\ 4z=\sqrt{x+30} \end{cases} \Rightarrow x=z.$

Suy ra: $x=\dfrac{1}{4}\sqrt{x+30} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{1921}}{32}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\dfrac{1+\sqrt{1921}}{32}\cdot$

BT 339. Giải phương trình: $2(4\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}-3)+\sqrt[3]{4(\sqrt{x^2+2}-x)}=0.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+2}>0$, suy ra: $\sqrt{x^2+2}-x=\dfrac{2}{t}\cdot$ Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow 4.(4\sqrt{t}-3)+\sqrt[3]{\frac{8}{t}}=0 \Leftrightarrow 2.(4\sqrt{t}-3)+\frac{2}{\sqrt[3]{t}}=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt[3]{t}}-3=0 \qquad (**)$$

Đặt $y=\sqrt[6]{t}$, $y>0$. Khi đó: $(**) \Leftrightarrow 4y^3-\dfrac{1}{y^2}-3=0 \Leftrightarrow 4y^6-3y^2+1=0 \Leftrightarrow y^2=\dfrac{1}{2}\cdot$

Suy ra: $\sqrt[6]{t}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2^6} \Rightarrow x+\sqrt{x^2+2}=\dfrac{1}{2^6} \Leftrightarrow x=\dfrac{1-2^{13}}{2^7}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1-2^{13}}{2^7}\cdot$

BT 340. Giải phương trình: $8x^2-8x+\sqrt{1-3x}=\sqrt{1+x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le \dfrac{1}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow 8x^2-8x+(\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+x})=0\Leftrightarrow 8x^2-8x-\frac{4x}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+x}}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x.\left(2x-2-\frac{1}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+x}}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 2x-2-\dfrac{1}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+x}}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 2x-2=\dfrac{1}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+x}}:\text{VN}_o,\ \forall x\in\left[-1;\dfrac{1}{3}\right]\end{array}\right.\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=0.$

BT 341. Giải phương trình: $2x^2+2x-4+5\sqrt{x^2+1}=5\sqrt{3-x}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\le 3.$

$$(*)\Leftrightarrow 2.(x^2+1)+5\sqrt{x^2+1}=2.(3-x)+5\sqrt{3-x}\qquad (**)$$

Đặt $a=\sqrt{x^2+1}>0,\ b=\sqrt{3-x}\ge 0.$

$$(**)\Leftrightarrow 2a^2+5a=2b^2+5b\Leftrightarrow 2.(a^2-b^2)+5.(a-b)=0\Leftrightarrow (a-b).(2a+2b+5)=0$$

$$\Leftrightarrow a=b\Rightarrow \sqrt{x^2+1}=\sqrt{3-x}\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=-2.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=-2,\ x=1.$

BT 342. Giải phương trình: $8x^2+2x+5=6\sqrt{2x^2+x+1}+3\sqrt{2x-1}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow 4.(2x^2+x+1)-(2x-1)=6\sqrt{2x^2+x+1}+3\sqrt{2x-1}\qquad (**)$$

Đặt $a=\sqrt{2x^2+x+1}>0,\ b=\sqrt{2x-1}\ge 0.$

$$(**)\Leftrightarrow 4a^2-b^2=6a+3b\Leftrightarrow (-2a)^2+3.(-2a)=b^2+3b$$

$$\Leftrightarrow (-2a)^2-b^2+3.(-2a)-3b=0\Leftrightarrow\left[(-2a)-b\right]\cdot\left[(-2a+b)\right]+3.\left[(-2a)-b\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[(-2a)-b\right]\cdot\left[(-2a+b)+3\right]=0\Leftrightarrow 2a=b+3.$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+1}=\sqrt{2x-1}+3\Leftrightarrow 4x^2+x-2=3\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+x-2-3\sqrt{2x-1}=0\Leftrightarrow 3.\sqrt{2x-1}.(\sqrt{2x-1}-1)+4x^2-5x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{6(x-1).\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)(4x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(\frac{6.\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+4x-1\right)=0$$

$\Leftrightarrow x = 1$. Do ta luôn có lượng: $\dfrac{6.\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1} + 4x - 1 > 0,\ \forall x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 1$.

BT 343. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x-1}} = \dfrac{2.(3x-2)\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{(2x-1)^3}}\cdot\ (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{2}{3}\cdot$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3x-2} \ge 0 \\ b = \sqrt{2x-1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{2a^2b+1}{2+b^3} \Leftrightarrow 2a + ab^3 = 2a^2b^2 + b \Leftrightarrow 2a - 2ab^3 = b - ab^3$

$\Leftrightarrow 2a(1-ab^2) = b(1-ab^2) \Leftrightarrow (2a-b)(1-ab^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a = b \\ ab^2 = 1 \end{array}\right.$.

Với $2a = b \Rightarrow 4.(3x-2) = 2x-1 \Leftrightarrow 10x = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{10}\cdot$

Với $ab^2 = 1 \Rightarrow a^2b^4 = 1 \Leftrightarrow (3x-1).(4x^2-4x+1) = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = \dfrac{7}{10},\ x = 1$.

BT 344. Giải phương trình: $(x+5)\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt[3]{3x+4}$. $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1$.

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x+1} \ge 0 \\ b = \sqrt[3]{3x+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2+4).a + 1 = b \\ b^3 - 3a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 4a - b = -1 \\ b^3 - 3a^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a^3 + 3a^2 + 4a + 2 - b^3 - b = 0 \Leftrightarrow (a+1)^3 + (a+1) = b^3 + b \Leftrightarrow f(a+1) = f(b)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(a+1) = f(b) \Leftrightarrow a + 1 = b \Rightarrow a^3 + 4a - (a+1) = -1 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow x = -1$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = -1$.

BT 345. Giải phương trình: $x^3 - 15x^2 + 78x - 141 = 5\sqrt[3]{2x-9}$. $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải 1. Sử dụng tính đơn điệu hàm số.

$(*) \Leftrightarrow (x-5)^3 + 5(x-5) = (\sqrt[3]{2x-9})^3 + 5\sqrt[3]{2x-9} \Leftrightarrow f(x-5) = f(\sqrt[3]{2x-9})$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x-5) = f(\sqrt[3]{2x-9}) \Leftrightarrow x - 5 = \sqrt[3]{2x-9} \Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 73x - 116 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 11x + 29) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 4,\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ gần đối xứng loại II.

Đặt $y-5=\sqrt[3]{2x-9} \Rightarrow \begin{cases}(y-5)^3=2x-9\\ x^3-15x^2+78x-141=5(y-5)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y^3-15y^2+75y-2x-116=0\\ x^3-15x^2+78x-5y-116=0\end{cases} \Rightarrow (y^3-x^3)-15(y^2-x^2)+80(y-x)=0$

$\Leftrightarrow (y-x)\left[y^2+yx+x^2-15(y+x)+80\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\ y^2+(x-15).y+x^2-15x+80=0\end{array}\right.$

Với $y=x \Rightarrow x-5=\sqrt[3]{2x-9} \Leftrightarrow x^3-15x^2+73x-116=0$

$\Leftrightarrow (x-4)\cdot(x^2-11x+29)=0 \Leftrightarrow x=4$ hoặc $x=\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Với $y^2+(x-15)y+x^2-15x+80=0$ và xem đây là phương trình bậc 2 với ẩn là y, ta có: $\Delta_x=-3x^2+30x-95<0$ nên vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=4,\ x=\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

BT 346. Giải phương trình: $x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}.\ (x\in\mathbb{R})$

Lời giải 1. Dùng đơn điệu hàm số.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x-1)^3+(x-1)=\dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11})^3+\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$

$\Leftrightarrow f(x-1)=f(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}).$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3}{2}+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\dfrac{3}{2}t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x-1)=f(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}) \Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$

$\Leftrightarrow (x-1)^3=-x^3+9x^2-19x+11 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=3\end{array}\right.\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=1,\ x=2,\ x=3.$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ kết hợp với sử dụng tính đơn điệu.

Đặt $y=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11} \Rightarrow \begin{cases}y^3=-x^3+9x^2-19x+11\\ y=x^3-6x^2+12x-7\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y^3=-x^3+9x^2-19x+11\\ 2y=2x^3-12x^2+24x-14\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} y^3+2y=x^3-3x^2+5x-3$

$\Leftrightarrow y^3+2y=(x-1)^3+2(x-1) \Leftrightarrow f(y)=f(x-1) \Rightarrow y=x-1.$

Suy ra: $\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}=x-1 \Leftrightarrow x=1,\ x=2,\ x=3.$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=1,\ x=2,\ x=3.$

BT 347. Giải phương trình: $(5x^2+4x+3).\sqrt{x}=(x+3).\sqrt{5x^2+4x}$. $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$. Đặt $a=\sqrt{x}\ge 0$ và $b=\sqrt{5x^2+4x}\ge 0$.

Suy ra: $a.(b^2+3)=b.(a^2+3)\Leftrightarrow(a-b).(ab-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ab=3\end{array}\right.$.

Với $a=b\Rightarrow 5x^2+4x=x\Leftrightarrow x.(5x+3)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-\dfrac{3}{5}$.

Với $ab=3\Rightarrow\sqrt{5x^3+4x^2}=3\Leftrightarrow 5x^3+4x^2-9=0\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=0,\ x=1.$

BT 348. Giải phương trình: $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$. Đặt: $x=\cos t,\ t\in[0;\pi]$.

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{1-x}=\sqrt{1-\cos t}=\sqrt{2\sin^2\dfrac{t}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|=\sqrt{2}\sin\dfrac{t}{2}\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=|\sin t|=\sin t\end{cases}$.

$$(*)\Leftrightarrow 2\cos^2 t+\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}+2\cos t.\sin t=1\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}+\sin 2t=1-2\cos^2 t$$

$$\Leftrightarrow\cos 2t+\sin 2t=-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\2t-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{t}{2}-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k4\pi}{3}\\t=-\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k4\pi}{5}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $t\in[0;\pi]\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\ \vee\ t=\dfrac{7\pi}{10}\Rightarrow x=\cos t=\cos\dfrac{\pi}{2}=0\ \vee\ x=\cos t=\cos\dfrac{7\pi}{10}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=0,\ x=\cos\dfrac{7\pi}{10}$.

BT 349. Giải phương trình: $x^3+\sqrt{1-3x^2+3x^4-x^6}=x\sqrt{2-2x^2}$. $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$. Ta có: $(*)\Leftrightarrow x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$ (1)

Đặt: $x=\cos t,\ t\in[0;\pi]$, suy ra: $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=|\sin t|=\sin t.$

$(*)\Leftrightarrow\cos^3 t+\sin^3 t=\sqrt{2}\cos t\sin t\Leftrightarrow(\sin t+\cos t)(1-\sin t\cos t)=\sqrt{2}\sin t\cos t$ (2)

Đặt: $a=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow a^2=1+2\sin t\cos t\Rightarrow\sin t\cos t=\dfrac{a^2-1}{2}$.

Do $0\le t\le\pi\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}\le t+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5\pi}{4}\Leftrightarrow\sin\dfrac{\pi}{4}\le\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sin\dfrac{5\pi}{4}\Rightarrow a\in\left[-\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right]$.

$$(2) \Leftrightarrow a\left(1-\frac{a^2-1}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{a^2-1}{2} \Leftrightarrow a^3+\sqrt{2}a^2-3a-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow (a-\sqrt{2})\cdot(a^2+2\sqrt{2}a+1)=0 \Leftrightarrow a=\sqrt{2} \text{ hoặc } a=1-\sqrt{2}.$$

Với $a=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Do $t\in\left[0;\pi\right]$ và $k\in\mathbb{Z}$, suy ra: $t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\cos t=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Với $a=\sin t+\cos t=1-\sqrt{2}$ và kết hợp với $\sin t\cos t=\frac{u^2-1}{2}=1-\sqrt{2}$ thì theo định lý Viét thì $\sin t;\ \cos t$ là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2-(1-\sqrt{2}).X+1-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow X=\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+3)}}{2}\cdot$$

Do $\sin t\geq 0 \Rightarrow x=\cos t=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+3)}}{2}\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm là $x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+3)}}{2}\cdot$

BT 350. Giải phương trình: $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\leq x\leq 1,\ x\neq 0.$ Đặt $x=\cos t,\ t\in\left(0;\pi\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\cdot$

Suy ra: $$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=\left|\sin t\right|=\sin t\\ \sqrt{1-x}=\sqrt{1-\cos t}=\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}=\sqrt{2}.\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\\ \sqrt{1+x}=\sqrt{1+\cos t}=\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\end{cases}\cdot$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}}=\frac{1}{\sin t} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}+1-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}{\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\right)}=\frac{1}{\sin t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{2}\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)}{1+\sqrt{2}\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} \qquad (1)$$

Đặt $a=\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow a^2=1-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot$

Do $t\in(0;\pi)$, suy ra: $a\in(-1;1)$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\frac{2+\sqrt{2}a}{1+\sqrt{2}a-(1-a^2)}=\frac{1}{1-a^2}\Leftrightarrow(2+\sqrt{2}a)\cdot(1-a^2)-a^2-\sqrt{2}a=0$

$\Leftrightarrow\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}a^2+4a+2\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Suy ra: $\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}+k4\pi\\t=-\frac{7\pi}{6}+k4\pi\end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Do $t\in\left(0;\pi\right)$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên $t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\cos t=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

BT 351. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-4x^2}}=x\left(1+\sqrt{1+2\sqrt{1-4x^2}}\right).\qquad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}1-4x^2\geq 0\\x>0\ ???\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{2}\cdot$ Đặt $x=\frac{1}{2}\cos t,\ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cdot$

Suy ra: $\sqrt{1-4x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=\left|\sin t\right|=\sin t.$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{1+\sin t}=\frac{\cos t}{2}\cdot(1+\sqrt{1+2\sin t})$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)\cdot(1+\sqrt{1+2\sin t})$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)^2}=\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\cdot(1+\sqrt{1+2\sin t})$

$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)=\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{1+2\sin t}\right)$

$\Leftrightarrow 2=\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{1+2\sin t}\right)\qquad\left(\text{do}: t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}>0\right)\cdot$

Đặt $a=\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow a^2=1-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\Rightarrow\sin t=1-a^2.$

Do $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow a\in\left[0;1\right)\cdot$ Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2=a\left[1+\sqrt{1+2(1-a^2)}\right]$

$\Leftrightarrow a\sqrt{3-2a^2} = 2-a \Leftrightarrow a^2(3-2a^2) = (2-a)^2 \Leftrightarrow 2a^4 - 2a^2 - 4a + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+2a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Với: $a = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k4\pi \\ t = -\pi + k4\pi \end{array}\right.$.

Do $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $t = 0,$ suy ra: $x = \frac{1}{2}\cos t = \frac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{1}{2}\cdot$

BT 352. Giải phương trình: $\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2}{|x-1|}\cdot$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$ thì $0 \le \sqrt{2x-x^2} \le 1$ nên đặt:

$\cos t = \sqrt{2x-x^2}$, $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{1-\cos t};\ \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{1+\sin t}$

và $\cos^2 t = 2x - x^2 = 1-(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-\cos^2 t = \sin^2 t \Leftrightarrow |x-1| = \sin t.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos t} + \sqrt{1+\cos t} = \frac{2}{\sin t} \Leftrightarrow (\sqrt{1-\cos t} + \sqrt{1+\cos t})^2 = \left(\frac{2}{\sin t}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{4}{\sin^2 t} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\sin^2 t} = \frac{2}{\sin t} \Leftrightarrow 1 + \sin t = \frac{2}{\sin t}$

$\Leftrightarrow \sin^3 t + \sin t - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin t = 1 \Leftrightarrow \cos t = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = 0,\ x = 2.$

BT 353. Giải phương trình: $4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x-x^2}.$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \le 2.$

$(*) \Leftrightarrow 4(x-1)^3 - 3(x-1) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ $\quad (**)$

Do $x \in [0;2] \Rightarrow (x-1) \in [-1;1]$ nên đặt $x - 1 = \cos t,\ t \in [0;\pi].$

$(**) \Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1-\cos^2 t} \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $t = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

Do $t \in [0;\pi],\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{5\pi}{8}$ hoặc $t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 1 + \cos\frac{5\pi}{8}$ hoặc $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = 1 + \cos\frac{5\pi}{8},\ x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

BT 354. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{4x^3-3x}{16x^4-12x^2+1}\cdot\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$ và $16x^4-12x^2+1\ne 0.$

Đặt $x=\cos t,\ t\in\left[0;\pi\right]$, suy ra: $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=\sin t.$

$(*)\Leftrightarrow \sin t.(16\cos^4 t-12\cos^2 t+1)=4\cos^3 t-3\cos t$

$\Leftrightarrow \sin t\left[16.(1-\sin^2 t)^2-12.(1-\sin^2 t)+1\right]=\cos 3t$

$\Leftrightarrow \sin t.(16\sin^4 t-20\sin^2 t+5)=\cos 3t\Leftrightarrow 16\sin^5 t-20\sin^3 t+5\sin t=\cos 3t$

$\Leftrightarrow \sin 5t=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3t\right)\Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{4}$ hoặc $t=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$

Do $t\in\left[0;\pi\right]\Rightarrow t\in\left\{\dfrac{\pi}{16};\dfrac{5\pi}{16};\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right\}\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x=\cos\dfrac{\pi}{16}$ hoặc $x=\cos\dfrac{5\pi}{16}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ x=\cos\dfrac{\pi}{16};\ x=\cos\dfrac{5\pi}{16}\cdot$

BT 355. Giải phương trình: $\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{2}{x^2+1}=4.\qquad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos t>0.$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2 t+1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\dfrac{1}{\cos t}$ và $x^2+1=\dfrac{1}{\cos^2 t}\Leftrightarrow\dfrac{2}{x^2+1}=2\cos^2 t.$

$(*)\Leftrightarrow 5\tan t\cos t+2\cos^2 t-4=0\Leftrightarrow 5\sin t+2(1-\sin^2 t)-4=0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 t+5\sin t-2=0\Leftrightarrow\sin t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ t=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$

Do $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên $t=\dfrac{\pi}{6}\cdot$ Suy ra: $x=\tan t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot$

BT 356. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+25}=x+\dfrac{50}{\sqrt{x^2+25}}\cdot\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $x=5\tan t,\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos t>0.$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+25}=\sqrt{25.(\tan^2 t+1)}=\dfrac{5}{\sqrt{\cos^2 t}}=\dfrac{5}{\cos t}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x^2+25}}=\dfrac{\cos t}{5}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{5}{\cos t} = 5\tan t + 10\cos t \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} + 2\cos t$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 t + \sin t - 1 = 0,\ (\text{do}: \cos t > 0) \Leftrightarrow 2.(1 - \sin^2 t) + \sin t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 t + \sin t + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin t = 1 \text{ hoặc } \sin t = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } t = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } t = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Do $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $t = -\frac{\pi}{6}$, suy ra: $x = 5\tan t = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot$

BT 357. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+1} = \frac{(x^2+1)^3}{6x^5 - 20x^3 + 6x}\cdot$ $(x \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x\left(6x^4 - 20x + 6\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0,\ x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ và $x \neq \pm\sqrt{3}.$

Đặt: $x = \tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0;\ \pm\frac{\pi}{3};\ \pm\frac{\pi}{6}\right\} \Rightarrow \cos t > 0$ thì:

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \cos t.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 t \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 2\tan t.\cos^2 t = 2\sin t\cos t = \sin 2t.$$

$$(*) \Leftrightarrow \text{cost} = 3\sin 2t - 4\sin^3 2t \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin 6t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \\ t = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right.,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0;\ \pm\frac{\pi}{3};\ \pm\frac{\pi}{6}\right\} \Rightarrow t \in \left\{-\frac{5\pi}{14}; -\frac{3\pi}{14}; -\frac{\pi}{10}; -\frac{\pi}{14}; \frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{14}; \frac{3\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}\right\}.$

Suy ra: $x \in \left\{\tan\left(\pm\frac{5\pi}{14}\right); \tan\left(\pm\frac{3\pi}{14}\right); \tan\left(-\frac{\pi}{10}\right); \tan\left(\pm\frac{\pi}{14}\right); \tan\frac{\pi}{18}\right\}\cdot$

Kết luận: $x \in \left\{\tan\left(\pm\frac{5\pi}{14}\right); \tan\left(\pm\frac{3\pi}{14}\right); \tan\left(-\frac{\pi}{10}\right); \tan\left(\pm\frac{\pi}{14}\right); \tan\frac{\pi}{18}\right\}\cdot$

BT 358. Giải phương trình: $x^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = 4(x^2-1).$ $(x \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x < -1$ hoặc $x > 1.$

Đặt $x = \frac{1}{\cos t},\ t \in (0; \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow \sin t > 0.$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{\sin t}{|\cos t|}.$$

- Với: $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos t>0\Rightarrow \sqrt{x^2-1}=\frac{\sin t}{|\cos t|}=\frac{\sin t}{\cos t}\cdot$ Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 t}\left(1+\frac{\cos t}{\sin t}\right)=4\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\Leftrightarrow 1+\cot t=4\sin^2 t,\ \left(\text{do}:\cos t>0\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\cot t=\frac{4}{1+\cot^2 t}\Leftrightarrow \left(1+\cot t\right)\left(1+\cot^2 t\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \cot^3 t+\cot^2 t+\cot t-3=0\Leftrightarrow \cot t=1\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Do $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{\cos t}=\sqrt{2}.$

- Với: $t\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow \cos t<0\Rightarrow \sqrt{x^2-1}=\frac{\sin t}{|\cos t|}=-\frac{\sin t}{\cos t}$ thì:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 t}\left(1-\frac{\cos t}{\sin t}\right)=4\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\Leftrightarrow 1-\cot t=4\sin^2 t,\ \left(do:\cos t<0\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-\cot t=\frac{4}{1+\cot^2 t}\Leftrightarrow \left(1-\cot t\right)\left(1+\cot^2 t\right)=4$$

$$\Leftrightarrow -\cot^3 t+\cot^2 t-\cot t-3=0\Leftrightarrow \cot t=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Do $t\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right),k\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{\cos t}=-\sqrt{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm: $x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}.$

BT 359. Giải phương trình: $1+\frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{5}{6x}\cdot\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x<-1$ hoặc $x>1.$

Nếu $x<-1$ thì vế trái $=1+\frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}>0$ và vế phải $=\frac{5}{6x}<0$ nên $(*)$ vô nghiệm.

Nếu $x>1$ thì đặt $x=\frac{1}{\cos t},\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\sin t>0\\ \cos t>0\\ \tan t>0\end{cases}\cdot$

Khi đó: $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\tan^2 t}=|\tan t|=\tan t$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1-\frac{1}{\cos t}}{\tan t}=\frac{\cos t-1}{\cos t.\tan t}=\frac{\cos t-1}{\sin t}\ \text{ và }\ \frac{5}{6x}=\frac{5\cos t}{6}\cdot$$

$(*) \Leftrightarrow 1 + \dfrac{\cos t - 1}{\sin t} = \dfrac{5\cos t}{6} \Leftrightarrow \sin t + \cos t - 1 = \dfrac{5}{6}\sin t \cos t$ $\qquad (**)$

Đặt $a = \sin t + \cos t \Rightarrow a^2 = 1 + 2\sin t \cos t \Rightarrow \sin t \cos t = \dfrac{a^2 - 1}{2}$, $a \in \left(1; \sqrt{2}\right]\cdot$

$(**) \Leftrightarrow a - 1 = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{a^2 - 1}{2} \Leftrightarrow 5a^2 - 12a + 7 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Với $a = \dfrac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} \sin t + \cos t = \dfrac{7}{5} \\ \sin t.\cos t = \dfrac{a^2 - 1}{2} = \dfrac{12}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \dfrac{3}{5} \\ \cos t = \dfrac{4}{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sin t = \dfrac{4}{5} \\ \cos t = \dfrac{3}{5} \end{cases}.$

Với $\cos t = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\cos t} = \dfrac{5}{4}$ và $\cos t = \dfrac{3}{5} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\cos t} = \dfrac{5}{3}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{5}{3}$, $x = \dfrac{5}{4}\cdot$

BT 360. Giải phương trình: $\sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1 \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$ Ta có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} - 1 = 0.$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1}$ trên $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ có:

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x - 1}} + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} > 0,\ \forall x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)\cdot$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm và có $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, suy ra:

$x = \dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}\cdot$

BT 361. Giải phương trình: $3\sqrt[4]{3 - 2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x - 1}} - 2x^3 = 6 \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 3 - 2x \ge 0 \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{3}{2}\cdot$

Do $x = \dfrac{3}{2}$ không là nghiệm của phương trình $(*)$, nên chỉ xét $x \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)\cdot$

Xét hàm số $f(x) = 3.\sqrt[4]{3 - 2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x - 1}} - 2x^3 - 6$ trên $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ có:

$$f'(x) = -\frac{6}{\sqrt[4]{(3-2x)^3}} - \frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}} - 6x^2 < 0,\ \forall x \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\cdot$$

Nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\cdot$ Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm và ta có: $f(1)=0 \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 362. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+48} = 4x - 13 + \sqrt{x^2+9}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Do $\sqrt{x^2+48} - \sqrt{x^2+9} > 0$ nên cần điều kiện: $4x - 13 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{13}{4}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+48} - \sqrt{x^2+9} - 4x + 13 = 0 \qquad (1)$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+48} - \sqrt{x^2+9} - 4x + 13$ trên $\left(\frac{13}{4};+\infty\right)$ có:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+48}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 4 = x\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+48}}{\sqrt{x^2+9}.\sqrt{x^2+48}}\right) - 4 < 0,\ \forall x > \frac{13}{4}\cdot$$

Nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{13}{4};+\infty\right)\cdot$ Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm và có $f(4)=0 \Leftrightarrow x=4.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4.$

BT 363. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1}$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 1.$ Do $x=1$ không là nghiệm nên xét $x>1.$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6} + x^2 + \sqrt{x-1} - 7 = 0.$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x+6} + x^2 + \sqrt{x-1} - 7$ trên $(1;+\infty)$ có:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}} + 2x + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0,\ \forall x > 1,\ \text{nên } f(t) \text{ đồng biến trên } (1;+\infty).$$

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm và có $f(2)=0 \Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2.$

BT 364. Giải phương trình: $x^3 + 2x^2 - 1 = 15.(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2})^3$ $\quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x > 2.$

$$(*) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 = 15\left[\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2})\cdot(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right]^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 = 15\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right)^3 \Leftrightarrow (x^3+2x^2-1)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})^3 - 15 = 0$$

Xét hàm số dương $g(x)=x^3+2x^2-1$ trên $(2;+\infty)$ có $g'(x)=3x^2+4x>0,\ \forall x>2$ nên hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Xét hàm số dương $h(x)=(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})^3$ trên $(2;+\infty)$ có:

$$h'(x)=3\cdot(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})^2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)>0,\ \forall x>2.$$

Do đó hàm số $h(x)$ luôn đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(x)=h(x)\cdot g(x)=(x^3+2x^2-1)\cdot(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})^3$ đồng biến trên $(2;+\infty)$. Do đó $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm và có $f(2)=0\Leftrightarrow x=2$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

BT 365. Giải phương trình: $(2x-7)\cdot(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3})-5=0 \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{2}{3}\cdot$

Do $x=\frac{2}{3}$ và $x=\frac{7}{2}$ không là nghiệm nên xét $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\setminus\left\{\frac{7}{2}\right\}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}-\frac{5}{2x-7}=0$. Đặt $f(x)=\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}-\frac{5}{2x-7}\cdot$

Xét hàm số $f(x)$ trên $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\setminus\left\{\frac{7}{2}\right\}$ có $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+\frac{10}{(2x-7)^2}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6x+28}{\sqrt{(3x-1)(x+3)}\cdot(3\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1})}+\frac{10}{(2x-7)^2}>0,\ \forall x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\setminus\left\{\frac{7}{2}\right\}\cdot$$

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{2}{3};\frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)\cdot$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	(gạch chéo)		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	(gạch chéo)		↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Mà ta có: $f(1)=f(6)=0\Leftrightarrow x=1,\ x=6$ là 2 nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1,\ x=6$.

BT 366. Giải phương trình: $2(x-3)(\sqrt[3]{x+4}+2\sqrt{2x-7})=3x-4. \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{7}{2}\cdot$ Do $x=\frac{7}{2}$ không là nghiệm, nên xét $x\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)\cdot$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+4}+2\sqrt{2x-7}=\frac{3x-4}{2x-6}\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+4}+2\sqrt{2x-7}-\frac{3x-4}{2x-6}=0.$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x+4}+2\sqrt{2x-7}-\frac{3x-4}{2x-6}$ trên $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$ có:

$$f'(x)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}}+\frac{2}{\sqrt{2x-7}}+\frac{10}{(2x-6)^2}>0,\ \forall x>\frac{7}{2}\cdot$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$ và phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm. Mà $f(4)=0$ nên $f(x)=0$ có 1 nghiệm là $x=4$.

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

BT 367. Giải phương trình: $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}+12=x^2$. $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-5\le x\le 5$. Ta có: $(*)\Leftrightarrow x^2-\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}-12=0$.

Do $x=\pm5$ không là nghiệm của $(*)$, nên xét $x\in(-5;5)$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}-12$ trên khoảng $(5;5)$ có:

$$f'(x)=2x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5+x}}-\frac{1}{\sqrt{5-x}}\right)=2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$=2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{25-x^2}\cdot(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})}=x\left(2+\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}\cdot(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})}\right)\cdot$$

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, do $:2+\dfrac{1}{2\sqrt{25-x^2}\cdot(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})}>0,\ \forall x\in(-5;5)$.

x	$-\infty$	-5		0		5	$-\infty$
$f'(x)$	//////		$-$	0	$+$		//////
$f(x)$	//////	$13-\sqrt{10}$	$\searrow$	$-12-2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$13-\sqrt{10}$	//////

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình có tối đa 2 nghiệm.

Mà $f(-4)=f(4)=0$ nên có 2 nghiệm là $x=-4$ và $x=4$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=\pm4$.

BT 368. Giải phương trình: $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{2x-11}\cdot$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{8}{3}$ và $x\ne\dfrac{11}{2}\cdot$ Do $x=\dfrac{8}{3}$ không là nghiệm nên ta chỉ xét $x>\dfrac{8}{3},\ x\ne\dfrac{11}{2}\cdot$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}=0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}$ trên $\left(\dfrac{8}{3};+\infty\right)\backslash\left\{\dfrac{11}{2}\right\}$ có:

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{10}{(2x-11)^2}=\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}}+\frac{10}{(2x-11)^2}$$

$$=\frac{6x+17}{2.(3\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-8}).\sqrt{(3x-8)(x+1)}}+\frac{10}{(2x-11)^2}>0,\ \forall x>\frac{8}{3},\ x\ne\frac{11}{2}\cdot$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{8}{3};+\infty\right)\backslash\left\{\dfrac{11}{2}\right\}\cdot$ Từ đó có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	(gạch chéo)		$+$	||	$+$	
$f(x)$	(gạch chéo)		$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Mà $f(3)=f(8)=0,$ suy ra: $x=3,\ x=8.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=3,\ x=8.$

BT 369. Giải phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=32(x-1)^2\sqrt{2x-2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 1.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=2.(4x-4)^5$ $(**)$

Đặt $t=4x-4\geq 0$ thì $(**)\Leftrightarrow 2t^5-\dfrac{t+4}{4}-\sqrt{\left(\dfrac{t+4}{4}\right)^2-1}=0\Leftrightarrow 8t^5=\sqrt{t^2+8t}+t+4$

Do $t=0$ không là nghiệm nên xét $t>0$ và chia 2 vế cho $t^5>0,$ khi đó phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{5}{t^5}+\dfrac{1}{t^4}+\sqrt{\dfrac{1}{t^8}+\dfrac{8}{t^9}}=8$ và xét hàm số $f(t)=\dfrac{5}{t^5}+\dfrac{1}{t^4}+\sqrt{\dfrac{1}{t^8}+\dfrac{8}{t^9}}-8$ luôn nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và có $f(1)=0\Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1.$

BT 370. Giải phương trình: $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x-1}}+\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{3x+2}=\sqrt{3x-2}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x>\dfrac{2}{3}\cdot$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x+2}.\sqrt{3x-2}=8x-12.$

Với $x>\dfrac{2}{3}$ thì $\sqrt[3]{3x+2}.\sqrt{3x-2}>0$ nên để phương trình có nghiệm thì cần điều kiện kéo theo là $8x-12>0\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}\cdot$

Đặt $t=\sqrt{3x-2},\ \left(t>\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$ thì phương trình $\Leftrightarrow t.\sqrt[3]{t^2+4}=\dfrac{8.(t^2+2)}{3}-12$

$\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{t}+\dfrac{4}{t^3}}+\dfrac{20}{t^2}-8=0$ và hàm số $f(t)=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{t}+\dfrac{4}{t^3}}+\dfrac{20}{t^2}-8$ luôn nghịch biến trên $\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}};+\infty\right)$ và có $f(2)=0\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=2.$

BT 371. Giải phương trình: $2x^4-3x^3-14x+16=(28-4x^3)\sqrt{2x^3-15}.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x^3-15\geq 0\Leftrightarrow x\geq\sqrt[3]{\dfrac{15}{2}}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 2x.(x^3-7)-3.(x^3-7)-5=4.(7-x^3).\sqrt{2.(x^3-7)}$ $\quad (**)$

Đặt $t=x^3-7 \Rightarrow x=\sqrt[3]{t+7}$ với $t \geq \frac{1}{2}\cdot$ Khi đó:

$(**) \Leftrightarrow 2t.\sqrt[3]{t+7}-3t-5+4t.\sqrt{2t-1}=0$ và do $t=\frac{1}{2}$ không là nghiệm nên chỉ xét phương trình trong khoảng điều kiện: $t \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)\cdot$

Xét hàm số $f(t)=2t.\sqrt[3]{t+7}-3t-5+4t.\sqrt{2t-1}$ trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ có:

$f'(t)=2\sqrt[3]{t+7}+\dfrac{2t}{3.\sqrt[3]{(t+7)^2}}-3+4\sqrt{2t+1}+\dfrac{4t}{\sqrt{2t-1}}>0,$ do $2\sqrt[3]{t+7}>2.\sqrt[3]{\dfrac{15}{2}}>3.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\cdot$

Mà ta có: $f(1)=0 \Rightarrow t=1$ là nghiệm duy nhất của $f(t)=0.$ Suy ra: $x=8.$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x=8.$

BT 372. Giải phương trình: $2\sqrt{4x^2-x+1}+2x=3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}.$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Nhận thấy rằng $x=0$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

- Với $x>0$: chia hai vế cho x và đặt $t=\frac{1}{x}$, ta được:

$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2-t+4}+2=3.\sqrt[3]{2t-1}+\sqrt{4t^2-4t+9}$ và đặt $u=\sqrt[3]{2t-1}$ thì phương trình tương đương: $3u+\sqrt{u^6+8}-\sqrt{u^6+15}-2=0.$

Xét hàm số $f(u)=3u+\sqrt{u^6+8}-\sqrt{u^6+15}-2$ và dễ dàng nhận ra rằng nếu $u<0$ thì $f(u)=0$ vô nghiệm nên xét $u>0.$ Khi đó: $f'(u)=3+\dfrac{3u^5}{\sqrt{u^6+8}}-\dfrac{3u^5}{\sqrt{u^6+15}}>0.$

Do đó hàm số $f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty).$ Mà $f(1)=0 \Leftrightarrow u=1 \Rightarrow x=1.$

- Với $x<0$: ta cũng làm tương tự, nhưng vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là $x=0,\ x=1.$

BT 373. Giải: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\dfrac{x^2+x}{(x^2+x+1)(2x^2+2x+1)}\cdot$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+1}-\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

$\Leftrightarrow f(x^2+x+1)=f(2x^2+2x+1)$, với $x^2+x+1>0$ và $2x^2+2x+1>0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}-\frac{1}{t}$ trên $(0;+\infty)$ có: $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{t^2}>0,\ \forall t>0.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$

Suy ra: $f(x^2+x+1)=f(2x^2+2x+1)\Leftrightarrow x^2+x+1=2x^2+2x+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=-1,\ x=0.$

BT 374. Giải phương trình: $4x^3-7x+\sqrt[3]{4x^3-3x+1}=\sqrt[3]{4x-2}-3.\qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện:

$(*)\Leftrightarrow 4x^3-3x+1+\sqrt[3]{4x^3-3x+1}=4x-2+\sqrt[3]{4x-2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{4x^3-3x+1})^3+\sqrt[3]{4x^3-3x+1}=(\sqrt[3]{4x-2})^3+\sqrt[3]{4x-2}$

$\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{4x^3-3x+1})=f(\sqrt[3]{4x-2}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$f(\sqrt[3]{4x^3-3x+1})=f(\sqrt[3]{4x-2})\Leftrightarrow 4x^3-3x+1=4x-2\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\ \vee\ x=1\ \vee\ x=\frac{1}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x=1.$

BT 375. Giải phương trình: $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}.\qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow (2x-3)^3+(2x-3)=(\sqrt[3]{3x-5})^3+\sqrt[3]{3x-5}\Leftrightarrow f(2x-3)=f(\sqrt[3]{3x-5}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2x-3)=f(\sqrt[3]{3x-5})\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt[3]{3x-5}\Leftrightarrow (2x-3)^3=3x-5$

$$\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0\Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.\cdot$$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=2,\ x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}\cdot$

BT 376. Giải phương trình: $8x^3-12x^2+5x=\sqrt[3]{3x-2}.\ (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow (2x-1)^3+(2x-1)=(\sqrt[3]{3x-2})^3+\sqrt[3]{3x-2}\Leftrightarrow f(2x-1)=f(\sqrt[3]{3x-2}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2x-1)=f(\sqrt[3]{3x-2})\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-2}=2x-1\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}\cdot$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=1,\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{4}$.

BT 377. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{2x-1}=27x^3-27x^2+13x-2.\quad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow(3x-1)^3+2(3x-1)=(\sqrt[3]{2x-1})^3+\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow f(3x-1)=f(\sqrt[3]{2x-1})$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(3x-1)=f(\sqrt[3]{2x-1})\Leftrightarrow(3x-1)^3=2x-1\Leftrightarrow x=0$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

BT 378. Giải phương trình: $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x.\quad (x\in\mathbb{R})$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

✍ ***Lời giải 1***. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

$(*)\Leftrightarrow(x+1)^3+3(x+1)=(\sqrt[3]{3x+5})^3+3\sqrt[3]{3x+5}\Leftrightarrow f(x+1)=f(\sqrt[3]{3x+5})$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ có $f'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t$, nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x+1)=f(\sqrt[3]{3x+5})\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{3x+5}\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-2,\ x=1$.

✍ ***Lời giải 2***. Đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng.

Đặt $y+1=\sqrt[3]{3x+5}\Rightarrow\begin{cases}(y+1)^3=3x+5\\(x+1)^3=3y+5\end{cases}\Rightarrow(y+1)^3-(x+1)^3=3(x-y)$

$$\Leftrightarrow(x-y)\cdot\left[\left(x+1+\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3(y+1)^2}{4}+3\right]=0\Leftrightarrow x=y.$$

Với $x=y$, suy ra: $(x+1)^3=3x+5\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2$.

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-2,\ x=1$.

BT 379. Giải phương trình: $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}.\quad (x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Do $x=0$ không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $x^3\neq0$, ta được:

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{7}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$ và đặt $y=\dfrac{1}{x},\ y\neq0$ thì phương trình tương đương: $8y^3-13y^2+7y=2\sqrt[3]{y^2+3y-3}$

$\Leftrightarrow(2y-1)^3+2(2y-1)=(\sqrt[3]{y^2+3y-3})^3+2\sqrt[3]{y^2+3y-3}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0,\ \forall t$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2y-1)=f(\sqrt[3]{y^2+3y-3})\Leftrightarrow2y-1=\sqrt[3]{y^2+3y-3}$

Từ đó tìm được các nghiệm là $x=1,\ x=\dfrac{-5+\sqrt{89}}{4},\ x=-\dfrac{5+\sqrt{89}}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=1,\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{89}}{4}\cdot$

BT 380. Giải phương trình: $4x^2+18x+\dfrac{14}{x}+27=\sqrt[3]{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}\cdot\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0.$

Nhân 2 vế phương trình cho $x,$ được: $(*)\Leftrightarrow 4x^3+18x^2+27x+14=\sqrt[3]{4x+5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(2x+3)^3+(2x+3)=(\sqrt[3]{4x+5})^3+\sqrt[3]{4x+5}\Leftrightarrow f(2x+3)=f(\sqrt[3]{4x+5}).$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{2}t^3+t$ có $f'(t)=\dfrac{3}{2}t^2+1>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2x+3)=f(\sqrt[3]{4x+5})\Leftrightarrow 2x+3=\sqrt[3]{4x+5}\Leftrightarrow (2x+3)^3=4x+5$

$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(8x^2+28x+22)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{5}}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=-1,\ x=\dfrac{-7\pm\sqrt{5}}{4}\cdot$

BT 381. Giải phương trình: $8x^3+8x-4=\sqrt[3]{4-6x}.\quad(x\in\mathbb{R})$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lời giải 1. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

$(*)\Leftrightarrow (2x)^3+(2x)=(\sqrt[3]{4-6x})^3+\sqrt[3]{4-6x}\Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt[3]{4-6x}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ có $f'=3t^2+1>0,\ \forall t\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2x)=f(\sqrt[3]{4-6x})\Leftrightarrow 2x=\sqrt[3]{4-6x}\Leftrightarrow 8x^3+6x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ.

Đặt: $2y=\sqrt[3]{4-6x}\Rightarrow\begin{cases}8y^3=4-6x\\8x^3+8x-4=2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8y^3+6x-4=0\\8x^3+8x-2y-4=0\end{cases}$

$\Rightarrow 8(y^3-x^3)+2(y-x)=0\Leftrightarrow (y-x)\left[4(y^2+xy+x^2)+1\right]=0\Leftrightarrow x=y.$

Với $y=x\Rightarrow 8x^3+6x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

BT 382. Giải phương trình: $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1}+(\sqrt[3]{6x+1})^3=(2x)+(2x)^3\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{6x+1})=f(2x).$

Xét hàm số $f(t)=t+t^3$ có $f'(t)=1+3t^2>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt[3]{6x+1})=f(2x)\Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1}=2x\Leftrightarrow 4x^3-3x=\dfrac{1}{2}$ $(**)$

Đặt $x=\cos u,\ u\in[0;\pi]$. Khi đó: $(**)\Leftrightarrow 4\cos^3u-3\cos u=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 3u=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow u=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Do $\begin{cases}u\in[0;\pi]\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow u\in\left\{\dfrac{\pi}{9};\dfrac{5\pi}{9};\dfrac{7\pi}{9}\right\}\Rightarrow x\in\left\{\cos\dfrac{\pi}{9};\cos\dfrac{5\pi}{9};\cos\dfrac{7\pi}{9}\right\}.$

Kết luận: Các nghiệm cần tìm của phương trình là $x\in\left\{\cos\dfrac{\pi}{9};\cos\dfrac{5\pi}{9};\cos\dfrac{7\pi}{9}\right\}.$

BT 383. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2.$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=(\sqrt[3]{3x+4})^3+\sqrt[3]{3x+4}\Leftrightarrow f(x+1)=f(\sqrt[3]{3x+4}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x+1)=f(\sqrt[3]{3x+4})\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{3x+4}\Leftrightarrow x^3+3x^2=3$ $(**)$

Đặt $x+1=2\cos u,$ suy ra: $x=-1+2\cos u,\ u\in(0;\pi).$ Khi đó:

$(**)\Leftrightarrow (2\cos u-1)^3+3.(2\cos u-1)^2-3=0\Leftrightarrow 8\cos^3u-6\cos u=1$

$\Leftrightarrow 4\cos^3u-3\cos u=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 3u=\cos\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow u=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z}).$

Do $u\in[0;\pi]\Rightarrow u\in\left\{\dfrac{\pi}{9};\dfrac{5\pi}{9};\dfrac{7\pi}{9}\right\}\Rightarrow x\in\left\{2\cos\dfrac{\pi}{9}-1;\ 2\cos\dfrac{5\pi}{9}-1;\ 2\cos\dfrac{7\pi}{9}-1\right\}.$

Kết luận: Các nghiệm $x\in\left\{2\cos\dfrac{\pi}{9}-1;\ 2\cos\dfrac{5\pi}{9}-1;\ 2\cos\dfrac{7\pi}{9}-1\right\}.$

BT 384. Giải phương trình: $9x^2-28x+21=\sqrt{x-1}.$

Điều kiện: $x\geq 1.$

Lời giải 1. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

- Với $x\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$ thì $(*)\Leftrightarrow (4-3x)^2+(4-3x)=(\sqrt{x-1})^2+\sqrt{x-1}\Leftrightarrow f(4-3x)=f(\sqrt{x-1}).$

Xét $f(t)=t^2+t$ trên $\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$ có $f'(t)=2t+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$

Suy ra: $f(4-3x)=f(\sqrt{x-1})\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=4-3x\Leftrightarrow x=\dfrac{25-\sqrt{13}}{8}\cdot$

- Với $x\in\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ thì $(*)\Leftrightarrow(3x-5)^2+(3x-5)=(\sqrt{x-1})^2+\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow f(3x-5)=f(\sqrt{x-1}).$

Xét $f(t)=t^2+t$ trên $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ có $f'(t)=2t+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$

Suy ra: $f(3x-5)=f(\sqrt{x-1})\Leftrightarrow 3x-5=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{5}{3}\\9x^2-31x+26=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=2,\ x=\dfrac{25-\sqrt{13}}{8}\cdot$

✍ ***Lời giải 2***. Đặt ẩn phụ đưa về hệ.

Đặt $3y-5=\sqrt{x-1}\Rightarrow\begin{cases}9y^2-30y-x+26=0\\9x^2-28x-3y+26=0\end{cases}\Rightarrow (y^2-x^2)-3(y-x)=0$

$\Leftrightarrow(y-x)\cdot(y+x-3)=0\Leftrightarrow y=x$ hoặc $y=3-x.$

Với $y=x\Rightarrow\sqrt{x-1}=3x-5\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{5}{3}\\9x^2-31x+26=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Với $y=3-x\Rightarrow\sqrt{x-1}=4-3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{4}{3}\\9x^2-25x+17=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{25-\sqrt{13}}{8}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x=2,\ x=\dfrac{25-\sqrt{13}}{8}\cdot$

BT 385. Giải phương trình: $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}.\quad(x\in\mathbb{R})$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

✍ ***Lời giải 1***. Sử dụng đơn điệu hàm số

$(*)\Leftrightarrow(x+1)^3+(x+1)=(\sqrt[3]{7x^2+9x-4})^3+\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

$\Leftrightarrow f(x+1)=f(\sqrt[3]{7x^2+9x-4}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ có $f'(t)=3t^2+t>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x+1)=f(\sqrt[3]{7x^2+9x-4})\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\Leftrightarrow x^3-4x^2-6x+5=0$

$\Leftrightarrow(x-5)\cdot(x^2+x-1)=0\Leftrightarrow x=5$ hoặc $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=5,\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Lời giải 2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ.

Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\Rightarrow\begin{cases}y^3=7x^2+9x-4\\ y=x^3-4x^2-5x+6\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow} y^3+y=(x+1)^3+(x+1)$

$\Leftrightarrow y^3-(x+1)^3+(y-x-1)=0\Leftrightarrow(y-x-1)\left[y^2+y(x+1)+(x+1)^2+1\right]=0$

$\Leftrightarrow\left(y-x-1\right)\cdot\left[\left(y+\dfrac{x+1}{2}\right)^2+\dfrac{3(x+1)^2}{4}+1\right]=0\Leftrightarrow y=x+1.$

Với $y=x+1\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\Leftrightarrow(x+1)^3=7x^2+9x-4$

$\Leftrightarrow x^3-4x^2-6x+5=0\Leftrightarrow(x-5)\cdot(x^2+x-1)=0\Leftrightarrow x=5$ hoặc $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có các nghiệm là $x=5,\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot$

BT 386. Giải phương trình: $3x^3-6x^2-3x-17=3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}.\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Nhân 9 vào hai vế phương trình, ta được:

$(*)\Leftrightarrow(3x-3)^3+27(3x-3)=\left[\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}\right]^3+27\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$

$\Leftrightarrow f(3x-3)=f(\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+27t$ có $f'(t)=3t^2+27>0,\forall t\in\mathbb{R},$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(3x-3)=f(\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)})\Leftrightarrow 3x-3=\sqrt[3]{9.(-3x^2+21x+5)}$

$\Leftrightarrow 3x^3-6x^2-12x-8=0\Leftrightarrow 4x^3=(x+2)^3\Leftrightarrow\sqrt[3]{4}.x=x+2\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}-1}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}-1}\cdot$

BT 387. Giải phương trình: $x^3+x\sqrt{x}=(x+4)(x+5).\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow x^3+\sqrt{x^3}=x^2+9x+20$

$\Leftrightarrow x^3+\sqrt{x^3}=(x^2+8x+16)+\sqrt{(x+4)^2}\Leftrightarrow x^3+\sqrt{x^3}=(x+4)^2+\sqrt{(x+4)^2}$

$\Leftrightarrow f(x^3)=f((x+4)^2).$

Vì $x=0$ không là nghiệm nên xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t}$ trên $(0;+\infty)$ có

$f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0,\ \forall t>0.$ Do đó hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty).$

Suy ra: $f(x^3)=f((x+4)^2)\Leftrightarrow x^3=(x+4)^2\Leftrightarrow(x-4)(x^2+3x+4)=0\Leftrightarrow x=4.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 4$.

BT 388. Giải phương trình: $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1}$. $(x \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x \geq \frac{1}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 = 2(\sqrt{3x-1})^3 + (\sqrt{3x-1})^2 \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{3x-1}).$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'(t) = 6t^2 + 2t \geq 0,\ \forall t \geq 0.$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Suy ra: $f(x) = f(\sqrt{3x-1}) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

BT 389. Giải phương trình: $4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0$. $(x \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}\cdot$ Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = \left[(2x+1)+1\right]\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = (\sqrt{2x+1})^3 + \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{2x+1}).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2x) = f(\sqrt{2x+1}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot$

BT 390. Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x+2)\sqrt{3x+1}$. $(x \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}\cdot$ Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = \left[(3x+1)+1\right]\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (\sqrt{3x+1})^3 + \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt{3x+1}).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0,\ \forall t$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x+1) = f(\sqrt{3x+1}) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 0,\ x = 1$.

BT 391. Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x^2+3)\sqrt{x^2+1}$. $(x \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = \left[(\sqrt{x^2+1})^2 + 2\right]\cdot\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) = (\sqrt{x^2+1})^3 + 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt{x^2+1}).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x+1) = f(\sqrt{x^2+1}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x = 0.$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

BT 392. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3} = \dfrac{1}{x+2}\cdot$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 13$ và $x \geq -1$.

$(*) \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+1} - 2(x+2) = \sqrt[3]{2x+1} - 3$

$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{x+1})^2 + 1\right]\sqrt{x+1} = 2x + 1 + \sqrt[3]{2x+1}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + \sqrt{x+1} = (\sqrt[3]{2x+1})^3 + \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt[3]{2x+1}).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt[3]{2x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{2x+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+1})^6 = (\sqrt[3]{2x+1})^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (x+1)^3 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $x = 0, \ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

BT 393. Giải phương trình: $x^3 + (2 + 3\sqrt{5-3x})x - 7\sqrt{5-3x} = 0.$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \leq \dfrac{5}{3}\cdot$ Khi đó: $(*) \Leftrightarrow x^3 + 2x = 7\sqrt{5-3x} - 3x\sqrt{5-3x}$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x = (7-3x)\sqrt{5-3x} \Leftrightarrow x^3 + 2x = \left[2 + (5-3x)\right]\sqrt{5-3x}$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x = (\sqrt{5-3x})^3 + 2\sqrt{5-3x} \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{5-3x}).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x) = f(\sqrt{5-3x}) \Leftrightarrow x = \sqrt{5-3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{29}-3}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{\sqrt{29}-3}{2}\cdot$

BT 394. Giải phương trình: $3x(2 + \sqrt{9x^2+3}) = (x+1)(2 + \sqrt{x^2+2x+4}).$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow(3x)\cdot\left[2+\sqrt{(3x)^2+3}\right]=(x+1)\cdot\left[2+\sqrt{(x+1)^2+3}\right]\Leftrightarrow f(3x)=f(x+1).$

Xét hàm số $f(t)=t\cdot(2+\sqrt{t^2+3})$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f(3x)=f(x+1)\Leftrightarrow 3x=x+1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\cdot$

BT 395. Giải phương trình: $5x\sqrt{25x^2+2}+(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11}+7x+3=0.$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow(2x+3)\sqrt{(2x+3)^2+2}+(2x+3)=(-5x).\sqrt{(-5x)^2+2}+(-5x)$

$\Leftrightarrow f(2x+3)=f(-5x).$

Xét $f(t)=t\sqrt{t^2+2}+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\sqrt{t^2+2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2x+3)=f(-5x)\Leftrightarrow 2x+3=-5x\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{7}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{3}{7}\cdot$

BT 396. Giải phương trình: $(8x-6)\sqrt{x-1}=(2+\sqrt{x-2})(x+4\sqrt{x-2}+3).$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2.$

$(*)\Leftrightarrow(4x-3).\sqrt{4x-4}=(2+\sqrt{x-2}).\left[((\sqrt{x-2})^2+4\sqrt{x-2}+4)+1\right]$

$\Leftrightarrow\left[(\sqrt{4x-4})^2+1\right].\sqrt{4x-4}=(2+\sqrt{x-2}).\left[(\sqrt{x-2}+2)^2+1\right]$

$\Leftrightarrow(\sqrt{4x-4})^3+\sqrt{4x-4}=(2+\sqrt{x-2})^3+(2+\sqrt{x-2})$

$\Leftrightarrow f(\sqrt{4x-4})=f(2+\sqrt{x-2}).$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{4x-4})=f(2+\sqrt{x-2})\Leftrightarrow\sqrt{4x-4}=2+\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow x+2+4\sqrt{x-2}=4x-4\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2}=3x-6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=2\\ x=\dfrac{34}{9}\Rightarrow y=\dfrac{34}{9}\end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $(x;y)=(2;2);\ \left(\dfrac{34}{9};\dfrac{34}{9}\right)\cdot$

BT 397. Giải phương trình: $x^3 + x^2 - 15x + 30 = 4\sqrt[4]{27(x+1)}$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -1$.

Ta có: $VP_{(*)} = 4.\sqrt[4]{3.3.3.(x+1)} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} 3+3+3+x+1 = x+10.$

Mà: $VT_{(*)} = x^3 + x^2 - 15x + 30 \geq x + 10 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 16x + 20 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+5)(x-2)^2 \geq 0$: luôn đúng với mọi $x \geq -1$.

Nghiệm của $(*)$ là các giá trị làm cho dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 2$.

BT 398. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ VT_{(*)} = \sqrt{(2x-3).1} + \sqrt{(5-2x).1} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \dfrac{(2x-3)+1}{2} + \dfrac{(5-2x)+1}{2} = 2 \\ \bullet\ VP_{(*)} = 3x^2 - 12x + 14 = 3(x-2)^2 + 2 \geq 2 \end{cases}.$

Nghiệm của $(*)$ là các giá trị làm cho dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 1$.

BT 399. Giải phương trình: $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} = x^2 - 12x + 38$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $5 \leq x \leq 7$.

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ VT_{(*)} = \sqrt{(7-x).1} + \sqrt{(x-5).1} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \dfrac{(7-x)+1}{2} + \dfrac{x-5+1}{2} = 2 \\ \bullet\ VP_{(*)} = x^2 - 12x + 38 = \left(x-6\right)^2 + 2 \geq 2 \end{cases}.$

Nghiệm của $(*)$ là các giá trị làm cho dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 6$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 6$.

BT 400. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} = 2 - \dfrac{x^4}{4}$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Ta có: $VT_{(*)} = \sqrt{(1-x^2).1} + \sqrt{(1+x^2).1} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \dfrac{(1-x^2)+1}{2} + \dfrac{(1+x^2)+1}{2} = 2.$

Mặt khác: $VP_{(*)} = 2 - \dfrac{x^4}{4} \leq 2.$

Nghiệm của $(*)$ là các giá trị làm cho dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x = 0$.

BT 401. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+6x+12}+\sqrt{5x^2+10x+9}=3-2x^2-4x \quad (*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2+9}+\sqrt{5(x+1)^2+4}=5-2(x+1)^2 \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ VT_{(1)}=\sqrt{3(x+1)^2+9}+\sqrt{5(x+1)^2+4}\ge\sqrt{9}+\sqrt{4}=5 \\ \bullet\ VT_{(1)}=5-2(x+1)^2\le 5 \end{cases}$.

Nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=-1$.

Kết luận: Nghiệm cần tìm của phương trình là $x=-1$.

BT 402. Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\sqrt{2}\le x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\sqrt{2}$.

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{2-x^2}+x)+\left(\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)=4 \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} \bullet\ 1\cdot\sqrt{2-x^2}+1\cdot x \overset{\text{Cauchy–Schwarz}}{\le} \sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{2-x^2+x^2}=2 \\ \bullet\ 1\cdot\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+1\cdot\dfrac{1}{x} \overset{\text{Cauchy–Schwarz}}{\le} \sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=2 \end{cases}$.

Cộng lại, suy ra: $\sqrt{2-x^2}+x+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\le 4$ nên nghiệm của (1) là các giá trị làm cho các dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x}=x \\ \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của phương trình là $x=1$.

BT 403. Giải phương trình: $x\sqrt{x}+\sqrt{12-x}=2\sqrt{3(x^2+1)} \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $0\le x\le 12$.

Ta có: $x\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{12-x} \overset{\text{Cauchy–Schwarz}}{\le} \sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x+12-x}=2\sqrt{3(x^2+1)}$.

Do đó nghiệm của phương trình $(*)$ khi các dấu đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow x\sqrt{12-x}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2(12-x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-12x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0,\ x=\dfrac{6\pm\sqrt{35}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=0,\ x=\dfrac{6\pm\sqrt{35}}{2}$.

BT 404. Giải phương trình: $x+2\sqrt{x+3}+4\sqrt{2-x^2}=3\sqrt{11+x-3x^2} \quad (*) \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

Có: $x+2\sqrt{x+3}+2\sqrt{8-4x^2}\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}\sqrt{1^2+2^2+2^2}.\sqrt{x^2+(\sqrt{x+3})^2+(\sqrt{8-4x^2})}$

Suy ra: $x+2\sqrt{x+3}+4\sqrt{2-x^2}\leq 3\sqrt{11+x-3x^2}$.

Do đó nghiệm của phương trình $(*)$ khi các dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x+3}}{2}=\frac{\sqrt{8-4x^2}}{2}\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

BT 405. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$ $\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq\dfrac{1}{2}\cdot$

Ta có: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}.\sqrt{x+2}+1.\sqrt{2x-1}\overset{B.C.S}{\leq}\sqrt{x+1}.\sqrt{x+2+2x-1}$

Suy ra: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}\leq\sqrt{3x^2+4x+1}$.

Do đó nghiệm của phương trình $(*)$ khi các dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\Leftrightarrow x\left(2x-1\right)=x+2\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

BT 406. Giải phương trình: $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3x^3+2x^2+2\geq 0\\ -3x^3+x^2+2x-1\geq 0\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{1.(3x^3+2x^2+2)}\overset{\text{Cauchy}}{\leq}\dfrac{1+(3x^3+2x^2+2)}{2}=\dfrac{3x^3+2x^2+3}{2}\\ \sqrt{1.(-3x^3+x^2+2x-1)}\overset{\text{Cauchy}}{\leq}\dfrac{1+(-3x^3+x^2+2x-1)}{2}=\dfrac{-3x^3+x^2+2x}{2}\end{cases}$.

Suy ra: $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\leq\dfrac{3x^3+2x^2+3}{2}+\dfrac{-3x^3+x^2+2x}{2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\leq\frac{3x^2+2x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\leq\frac{(4x^2+4x+4)-(x+1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\leq 2x^2+2x+2$$

Do đó nghiệm của phương trình khi các dấu đẳng thức xảy ra $x=-1$.

BT 407. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x+6}=\sqrt{17}$ $\quad(*)\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)^2+(\sqrt{2})^2}+\sqrt{(x+2)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}\qquad(1)$$

Trong mặt phẳng $Oxy,$ chọn: $\vec{u}=(1-x;\sqrt{2}),\ \vec{v}=(x+2;\sqrt{2})$ và $\vec{u}+\vec{v}=(3;2\sqrt{2}).$

Suy ra: $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(1-x)^2+(\sqrt{2})^2},\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{(x+2)^2+(\sqrt{2})^2}$ và $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=17.$

Ta có: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)^2+(\sqrt{2})^2}+\sqrt{(x+2)^2+(\sqrt{2})^2}\ge\sqrt{17}$ (2)

Do đó nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{x+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\Leftrightarrow1-x=x+2\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{2}\cdot$

<u>BT 408.</u> Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{13}$ (*)

<u>Lời giải</u>. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(2x)^2+1^2}+\sqrt{(2-2x)^2+2^2}=\sqrt{13}$ (1)

Trong mặt phẳng $Oxy,$ chọn: $\vec{u}=(2x;1),\ \vec{v}=(2-2x;2)$ và $\vec{u}+\vec{v}=(2;3).$

Suy ra: $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(2x)^2+1^2},\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{(2-2x)^2+2^2}$ và $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}.$

Ta có: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(2x)^2+1^2}+\sqrt{(2-2x)^2+2^2}\ge\sqrt{13}$ (2)

Do đó nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow\dfrac{2x}{1}=\dfrac{2-2x}{2}\Leftrightarrow4x=2-2x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{3}\cdot$

<u>BT 409.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x^2+10x+74}-\sqrt{x^2-6x+10}=10$ (*)

<u>Lời giải</u>. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(x+5)^2+7^2}-\sqrt{(x-3)^2+1^2}=10$ (1)

Trong mặt phẳng $Oxy,$ chọn: $\vec{u}=(x+5;7),\ \vec{v}=(x-3;1)$ và $\vec{u}-\vec{v}=(8;6).$

Suy ra: $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(x+5)^2+7^2},\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{(x-3)^2+1^2}$ và $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=10.$

Ta có: $\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(x+5)^2+7^2}-\sqrt{(x-3)^2+1^2}\le10$ (2)

Do đó nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow\dfrac{x+5}{x-3}=7\Leftrightarrow x=\dfrac{13}{3}\cdot$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{13}{3}\cdot$

<u>BT 410.</u> Giải phương trình: $2\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{9x^2-6x+2}=\sqrt{x^2+2x+2}$ (*)

<u>Lời giải</u>. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(2x-2)^2+2^2}-\sqrt{(3x-1)^2+1^2}=\sqrt{(-x-1)^2+1^2}$ (1)

Trong mặt phẳng Oxy, chọn: $\vec{u}=(2x-2;2)$, $\vec{v}=(3x-1;1)$ và $\vec{u}-\vec{v}=(-x-1;1)$.

Suy ra: $|\vec{u}|=\sqrt{(2x-2)^2+2^2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{(3x-1)^2+1^2}$ và $|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{(-x-1)^2+1^2}$.

Ta có: $|\vec{u}|-|\vec{v}|\le|\vec{u}-\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(2x-2)^2+2^2}-\sqrt{(3x-1)^2+1^2}\le\sqrt{(-x-1)^2+1^2}$ (2)

Do đó nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{2x-2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=0$.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

BT 411. Giải: $\sqrt{x^2-4x+8}+\sqrt{4x^2+12x+10}+\sqrt{9x^2-30x+50}=10$ (*)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+2^2}+\sqrt{(2x+3)^2+1^2}+\sqrt{(5-3x)^2+5^2}=10$ (1)

Chọn: $\vec{u}=(x-2;2)$, $\vec{v}=(2x+3;1)$, $\vec{w}=(5-3x;5)$ và $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(6;8)$. Suy ra:

$|\vec{u}|=\sqrt{(x-2)^2+2^2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{(2x+3)^2+1^2}$, $|\vec{w}|=\sqrt{(5-3x)^2+5^2}$ và $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|=10$.

Ta luôn có bất đẳng thưc véctơ: $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\ge|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+2^2}+\sqrt{(2x+3)^2+1^2}+\sqrt{(5-3x)^2+5^2}\ge 10$ (2)

Do đó nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{2x+3}{1}=\dfrac{5-3x}{5}$: hệ vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình đã cho vô nghiệm $x\in\varnothing$.

BT 412. Giải phương trình: $x+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x^2-10x+16}+3$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

$(*) \Leftrightarrow 1\cdot\sqrt{x-1}+1\cdot(x-3)=\sqrt{2x^2-10x+16}$ (1)

Trong mặt phẳng Oxy, chọn: $\vec{u}=(1;1)$, $\vec{v}=(\sqrt{x-1};x-3)$. Suy ra:

$|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2+(x-3)^2}=\sqrt{x^2-5x+8}$, $\begin{cases}\vec{u}.\vec{v}=\sqrt{x-1}+(x-3)\\ |\vec{u}||\vec{v}|=\sqrt{2x^2-10x+16}\end{cases}$.

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}\le|\vec{u}|.|\vec{v}| \Leftrightarrow 1.\sqrt{x-1}+1.(x-3)\le\sqrt{2x^2-10x+16}$ (2)

Do đó nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases}x>3\\ x^2-7x+10=0\end{cases} \Leftrightarrow x=5$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=5$.

BT 413. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=\sqrt{2}.\sqrt{x^2-2x+2}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $1 \le x \le 3$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chọn: $\vec{u} = (x-1;1)$, $\vec{v} = (\sqrt{x-1};\sqrt{3-x})$.

Suy ra: $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(x-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2-2x+2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{3-x})^2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = (x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2-2x+2} \end{cases}$.

Ta luôn có: $\vec{u} \cdot \vec{v} \le |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow (x-1) \cdot \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2-2x+2}$ (**)

Do đó nghiệm của (*) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (**) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{3-x} = \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ (x-1)^2(3-x) = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array} \right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1$, $x = 2$.

BT 414. Giải phương trình: $(2-x)\sqrt{x} + \sqrt{3-2x} = \sqrt{-x^3 + 7x^2 - 17x + 15}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \le \dfrac{3}{2}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow (2-x) \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{3-2x} = \sqrt{(3-x)(x^2-4x+5)}$ (1)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chọn: $\vec{u} = (2-x;1)$, $\vec{v} = (\sqrt{x};\sqrt{3-2x})$.

Suy ra: $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(2-x)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2-4x+5} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3-2x})^2} = \sqrt{3-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = (2-x)\sqrt{x} + \sqrt{3-2x} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{(3-x)(x^2-4x+5)} \end{cases}$.

Ta luôn có: $\vec{u} \cdot \vec{v} \le |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow (2-x) \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{3-2x} \le \sqrt{(3-x)(x^2-4x+5)}$ (2)

Do đó nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{2-x}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}} \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1$.

BT 415. Giải phương trình: $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 3$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chọn: $\vec{u} = (x;1)$, $\vec{v} = (\sqrt{x+1};\sqrt{3-x})$.

Suy ra: $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{x^2+1} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{3-x})^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 2\sqrt{x^2+1} \end{cases}$.

Ta luôn có: $\vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}|.|\vec{v}| \Leftrightarrow x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \le 2\sqrt{x^2+1}$ (**)

Do đó nghiệm của (*) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (**) xảy ra

$\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow x\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2(3-x) = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array} \right. .$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1,\ x=1+\sqrt{2}.$

BT 416. Giải: $3x\sqrt{5x-6} + \sqrt{-4x^2+19x-12} = \sqrt{36x^3-2x^2-20x+6}$ $\quad(*)\quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2 \le x \le 4.$

$$(*) \Leftrightarrow 3x\sqrt{5x-6} + \sqrt{(4x-3)(4-x)} = \sqrt{(4x-2)\cdot(9x^2+4x-3)} \qquad (1)$$

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ chọn: $\vec{u} = (3x; \sqrt{4x-3}),\ \vec{v} = (\sqrt{5x-6}; \sqrt{4-x}).$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{u}\right| = \sqrt{(3x)^2 + (\sqrt{4x-3})^2} = \sqrt{9x^2+4x-3} \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{(\sqrt{5x-6})^2 + (\sqrt{4-x})^2} = \sqrt{4x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = 3x\sqrt{5x-6} + \sqrt{4x-3}.\sqrt{4-x} \\ \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(4x-2)\cdot(9x^2+4x-3)} \end{cases} .$$

Ta có: $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow 3x\sqrt{5x-6} + \sqrt{4x-3}.\sqrt{4-x} \le \sqrt{(4x-2)\cdot(9x^2+4x-3)}$ $\quad (2)$

Do đó nghiệm của (1) là các giá trị làm cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ hai véctơ $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng chiều

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{5x-6}} = \frac{\sqrt{4x-3}}{\sqrt{4-x}} \Leftrightarrow 3x\sqrt{4-x} = \sqrt{(5x-6)(4x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ 9x^2(4-x) = (4x-3)(5x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ 9x^3 - 16x^2 - 39x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=3.$

BT 417. Giải phương trình: $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$ $\qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1.$ Có: $(*) \Leftrightarrow (x+1-4\sqrt{x+1}+4) + (x^2-6x+9) = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2)^2 + (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Kết luận: So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3.$

BT 418. Giải phương trình: $x^2 - x + 6 = 4\sqrt{1-3x}$ $\qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \le \dfrac{1}{3}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \left[4 - 4\sqrt{1-3x} + (1-3x) \right] + (x^2+2x+1) = 0 \Leftrightarrow (2-\sqrt{1-3x})^2 + (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{1-3x} = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-1.$

BT 419. Giải phương trình: $x^2-4\sqrt{3x+1}+2x+7=2x\sqrt{2-x}$ $\quad(*)\quad$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le 2.$

$$(*)\Leftrightarrow\left[x^2-2x\sqrt{2-x}+(2-x)\right]+\left[4-4\sqrt{3x+1}+(3x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(x-\sqrt{2-x})^2+(2-\sqrt{3x+1})^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{2-x}=0\\2-\sqrt{3x+1}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=1.$

BT 420. Giải phương trình: $4x^2\sqrt{x+2}+4\sqrt{3x-2}=x^4+7x+10$ $\quad(*)\quad$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow\left[x^4-2.x^2.2\sqrt{x+2}+4(x+2)\right]+\left[4-2.2.\sqrt{3x-2}+(3x-2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-2\sqrt{x+2})^2+(2-\sqrt{3x-2})^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2\sqrt{x+2}=0\\2-\sqrt{3x-2}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=2.$

BT 421. Giải phương trình: $2x\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=2x^2+x+2$ $\quad(*)\quad$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0.$ Khi đó: $(*)\Leftrightarrow 4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}=4x^2+2x+4$

$$\Leftrightarrow(x-2\sqrt{x}+1)+(4x^2-2.2x\sqrt{x+3}+x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-1)^2+(2x-\sqrt{x+3})^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-1=0\\2x-\sqrt{x+3}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=1.$

BT 422. Giải phương trình: $x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+2x^2-6x+20=0$ $\quad(*)$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$(*)\Leftrightarrow\left[x^4-2.x^2.\sqrt{x^2-2x+16}+(x^2-2x+16)\right]+(x^2-4x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-\sqrt{x^2-2x+16})^2+(x-2)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\sqrt{x^2-2x+16}=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=2.$

BT 423. Giải phương trình: $4x^2+\sqrt{2x+3}=8x+1$ $\quad(*)\quad$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-\dfrac{3}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow 4x^2-6x+\frac{9}{4}=(2x+3)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2x+3}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|2x-\frac{3}{2}\right| = \left|\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{3}{2}=\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2} \\ 2x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\sqrt{2x+3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+3}=2x-1 \\ \sqrt{2x+3}=2-2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ 2x^2-3x-1=0 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x \le 1 \\ 4x^2-10x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{17}}{4} \text{ hoặc } x=\frac{5-\sqrt{21}}{4}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$, $x=\frac{5-\sqrt{21}}{4}$.

BT 424. Giải phương trình: $9x^2-18x=31-12\sqrt{6x-1}$ $\quad(*)$ $\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \frac{1}{6}$.

$$(*) \Leftrightarrow 36-2.6.\sqrt{6x-1}+(6x-1)=9x^2-2.3x.2+4 \Leftrightarrow (6-\sqrt{6x-1})^2=(3x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|6-\sqrt{6x-1}\right|=\left|3x-2\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-\sqrt{6x-1}=3x-2 \\ 6-\sqrt{6x-1}=2-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{6x-1}=8-3x \\ \sqrt{6x-1}=3x+4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{4}{3} \\ 9x^2+18x+17=0 \end{cases} : \text{ vô nghiệm hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{8}{3} \\ 9x^2-54x+65=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=\frac{5}{3}$.

BT 425. Giải phương trình: $(2x+2)\sqrt{2x-1}+x^3-9x^2+33x-29=0$ $\quad(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left[(2x-1)+3\right]\sqrt{2x-1}+6x-2=(3-x)^3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1})^3+3(2x-1)+3\sqrt{2x-1}+1=(3-x)^3 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}+1)^3=(3-x)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x=1$.

BT 426. Giải phương trình: $3x\sqrt{3x+2}+14\sqrt{3x+2}=27x^3-162x^2+342x-196$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -\frac{2}{3}$. Khi đó phương trình đã cho:

$$\Leftrightarrow (3x+14)\sqrt{3x+2}-18x-20=(3x-6)^3$$

$$\Leftrightarrow \left[(3x+2)+12\right]\sqrt{3x+2}-18x-20=(3x-6)^3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+2})^3-6(3x+2)+12\sqrt{3x+2}-8=(3x-6)^3 \Leftrightarrow (\sqrt{3x+2}-2)^3=(3x-6)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+2} = 3x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ 9x^2 - 27x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x = \frac{7}{3}$.

BT 427. Giải bất phương trình: $(x^2 - 4x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \vee x = 2 \\ \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \vee x > 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 4 \end{array}\right..$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{2\} \cup \left[4; +\infty\right)$.

BT 428. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x+4}$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2 + x + 6 = 0 \\ \begin{cases} -x^2 + x + 6 > 0 \\ \frac{-x-1}{(x+4)(2x+5)} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \vee x = 3 \\ \begin{cases} -2 < x < 3 \\ x < -4 \vee -\frac{5}{2} < x \leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{array}\right..$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x \in [-2; -1] \cup \{3\}$.

BT 429. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2 - 10x + 16} - \sqrt{x-1} \leq x - 3$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 10x + 16} \leq x - 3 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + \sqrt{x-1} \geq 0 \\ x^2 - 5x + 8 - 2(x-3)\sqrt{x-1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + \sqrt{x-1} \geq 0 \\ (x^2 - 6x + 9) - 2(x-3)\sqrt{x-1} + (x-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + \sqrt{x-1} \geq 0 \\ (x - 3 - \sqrt{x-1})^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + \sqrt{x-1} \geq 0 \\ x - 3 - \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + \sqrt{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{x-1} = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + \sqrt{x-1} \geq 0 \\ x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + \sqrt{x-1} \geq 0 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Kết luận: So với điều kiện, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

BT 430. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{3x+3}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3x+3}-\sqrt{3-x}} \ge \dfrac{4}{x}$ $\quad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ x \ne 0 \end{cases}$. Khi đó: $\sqrt{3x+3}+\sqrt{3-x} > 0.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3x+3}+\sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3x+3}-\sqrt{3-x})(\sqrt{3x+3}+\sqrt{3-x})} \ge \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{2x+6+2\sqrt{(3x+3)(3-x)}}{4x} \ge \frac{4}{x}.$$

- Nếu $x \in [-1;0)$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow 2x+6+2\sqrt{(3x+3)(3-x)} \le 16$

$\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+6x+9} \le 5-x \Leftrightarrow 4x^2-16x+16 \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \ge 0:$ luôn đúng.

- Nếu $x \in (0;3]$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow 2x+6+2\sqrt{(3x+3)(3-x)} \ge 16$

$\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+6x+9} \ge 5-x \Leftrightarrow 4x^2-16x+16 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $x \in [-1;0) \cup \{2\}$.

BT 431. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}} < \dfrac{27(12+x-\sqrt{x^2+24x})}{8(12+x+\sqrt{x^2+24x})}$ $\quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}} < \frac{27}{8} \cdot \frac{24+x-2\sqrt{x(24+x)}+x}{24+x+2\sqrt{x(24+x)}+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}} < \frac{27}{8}\frac{(\sqrt{24+x}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{24+x}+\sqrt{x})^2} \Leftrightarrow 8(\sqrt{24+x}+\sqrt{x})^3 < 27(\sqrt{24+x}-\sqrt{x})^3$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{24+x}+\sqrt{x}) < 3(\sqrt{24+x}-\sqrt{x}) \Leftrightarrow 5\sqrt{x} < \sqrt{24+x} \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in [0;1)$.

BT 432. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}} \ge \dfrac{2}{x}$ $\quad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 1.$ Do 2 vế đều dương nên bình phương thì:

$$(*) \Leftrightarrow 2x+2\sqrt{\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)} \ge \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-\frac{1}{x^4}} \ge \frac{2}{x^2}-x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^6-1}}{x^2} \ge \frac{2-x^3}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^6-1} \ge 2-x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^6-1 \ge 0 \\ 2-x^3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x^3 \ge 0 \\ x^6-1 \ge (2-x^3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ x \ge \sqrt[3]{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \le \sqrt[3]{2} \\ 4x^3 \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \sqrt[3]{2} \vee \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \le x \le \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x \ge \sqrt[3]{\frac{5}{4}}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};+\infty\right)$.

BT 433. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\le\sqrt{2x^2+9x+7}$ $(*)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1$ hoặc $x\le -5$.

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(x+2)}+\sqrt{(x+1)(x+5)}\le\sqrt{(x+1)(2x+7)} \quad (1)$$

- Nếu $x=-1$ thì (1) đúng nên $x=-1$ là một nghiệm của (1).
- Nếu $x>-1$, suy ra: $x+1>0,\ x+2>0,\ x+5>0,\ 2x+7>0$.

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}\le\sqrt{2x+7}\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)(x+5)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\(x+2)(x+5)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\-5\le x\le -2\end{cases}:\ \text{vô nghiệm.}$$

- Nếu $x\le -5$, suy ra: $x+1<0,\ x+2<0,\ x+5\le 0,\ 2x+7<0$.

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{-x-2}+\sqrt{-x-5}\le\sqrt{-2x-7}\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)(x+5)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -5\\(x+2)(x+5)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -5\\-5\le x\le -2\end{cases}\Leftrightarrow x=-5.$$

Kết luận: Bất phương trình có 2 nghiệm là $x=-1,\ x=-5$.

BT 434. Giải bất phương trình: $x-3\sqrt{2-x^2}+2x^2\sqrt{2-x^2}\ge 0$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

$$(*)\Leftrightarrow x\ge(3-2x^2)\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow x\ge\sqrt{2-x^2}\left[(\sqrt{2-x^2})^2+(1-x^2)\right]$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2})^3+(1-x^2)\cdot\sqrt{2-x^2}-x\le 0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2})^3-x^2\sqrt{2-x^2}+(\sqrt{2-x^2}-x)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}\cdot\left[(\sqrt{2-x^2})^2-x^2\right]+(\sqrt{2-x^2}-x)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}\cdot(\sqrt{2-x^2}-x)\cdot(\sqrt{2-x^2}+x)+(\sqrt{2-x^2}-x)\le 0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2}-x)\cdot\left[\sqrt{2-x^2}(\sqrt{2-x^2}+x)+1\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2}-x)\cdot(3-x^2+x\sqrt{2-x^2})\le 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}-x\le 0,\ \left(\text{do}: 3-x^2+x\sqrt{2-x^2}>0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}\le x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\2-x^2\le x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\le -1\ \vee\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]\cdot$

BT 435. Giải bất phương trình: $\dfrac{(x+2)^2}{(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1})^2}\le x+8$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}\cdot$ Suy ra: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}>0$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2\cdot(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1})^2}{(x+2)^2} \le x+8 \Leftrightarrow \sqrt{6x^2-x-1} \le 4-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x \ge 0 \\ 2x^2+15x-17 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 1.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]\cdot$

BT 436. Giải bất phương trình: $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})\cdot(1+\sqrt{x^2+2x-3}) \ge 4 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 1$. Suy ra: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1} > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4\cdot(1+\sqrt{x^2+2x-3})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} \ge 4 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+2x-3} \ge \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 1+x^2+2x-3+2\sqrt{x^2+2x-3} \ge x+3+x-1+2\sqrt{(x+3)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -2 \text{ hoặc } x \ge 2.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[2;+\infty\right)\cdot$

BT 437. Giải bất phương trình: $(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-1})(1+\sqrt{x^4+3x^2-4}) \ge 5 \qquad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1 \ge 0 \\ x^4+3x^2-4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1 \end{array}\right.\cdot$ Suy ra $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-1} > 0$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{5\cdot(1+\sqrt{x^4+3x^2-4})}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-1}} \ge 5 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^4+3x^2-4} \ge \sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x^4+3x^2-3+2\sqrt{x^4+3x^2-4} \ge 2x^2+3+2\sqrt{x^4+3x-4}$$

$$\Leftrightarrow x^4+x^2-6 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 2 \Leftrightarrow x \le -\sqrt{2} \text{ hoặc } x \ge \sqrt{2}.$$

Kết luận: So điều kiện, tập cần tìm là $x \in \left(-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right)\cdot$

BT 438. Giải bất phương trình: $\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\sqrt{2x+1} \ge \sqrt{2x+17} \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x}} \ge \sqrt{2x+17}-\sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} \ge \frac{16}{\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}} \Leftrightarrow \sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1} \ge 4\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1})^2 \ge 16x \Leftrightarrow \sqrt{(2x+17)(2x+1)} \ge 6x-9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+17)(2x+1) \ge 0 \\ 6x-9 < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 6x-9 \ge 0 \\ 2x^2-9x+4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -\frac{17}{2} \text{ hoặc } -\frac{1}{2} \le x \le 4.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(0;4\right]\cdot$

BT 439. Giải bất phương trình: $\dfrac{6-3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}}\le\dfrac{1-x}{x}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+5x+2\ge0\\ x\ne0\\ 3x-\sqrt{2x^2+5x+2}\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-2\\ x\ge-\dfrac{1}{2}\\ x\ne0;\ x\ne1\end{cases}$ (i)

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{6-3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}}+1\le\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{6}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}}\le\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow\dfrac{6}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}}-\dfrac{1}{x}\le0\Leftrightarrow\dfrac{3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{x.(3x-\sqrt{2x^2+5x+2})}\le0$ (1)

- Nếu $3x+\sqrt{2x^2+5x+2}=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+5x+2}=-3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le0\\ 7x^2-5x-2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{7}$: thỏa điều kiện (i) và thỏa (1) nên nhận $x=-\dfrac{2}{7}\cdot$

- Nếu $3x+\sqrt{2x^2+5x+2}\ne0\Leftrightarrow x\ne-\dfrac{2}{7}$, thì:

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{(3x+\sqrt{2x^2+5x+2})^2}{x.(3x-\sqrt{2x^2+5x+2})\cdot(3x+\sqrt{2x^2+5x+2})}\le0\Leftrightarrow\dfrac{(3x+\sqrt{2x^2+5x+2})^2}{x.(7x^2-5x-2)}\le0$

Do $(3x+\sqrt{2x^2+5x+2})^2>0$ nên $x.(7x^2-5x-2)<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{2}{7}$ hoặc $0<x<1$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[-\dfrac{1}{2};-\dfrac{2}{7}\right)\cup\left(0;1\right)\cdot$

BT 440. Giải bất phương trình: $9x^2+\sqrt{4x-5}>\sqrt{x}+25$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{5}{4}\cdot$ Suy ra: $\sqrt{4x-5}+\sqrt{x}>0$.

$(*)\Leftrightarrow(9x^2-25)+(\sqrt{4x-5}-\sqrt{x})>0\Leftrightarrow(3x-5)\cdot(3x+5)+\dfrac{3x-5}{\sqrt{4x-5}+\sqrt{x}}>0$

$\Leftrightarrow(3x-5)\cdot\left(3x+5+\dfrac{1}{\sqrt{4x-5}+\sqrt{x}}\right)>0\Leftrightarrow3x-5>0\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{3}\cdot$

Do lượng: $3x+5+\dfrac{1}{\sqrt{4x-5}+\sqrt{x}}>0,\ \forall x\ge\dfrac{5}{4}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)\cdot$

BT 441. Giải bất phương trình: $\sqrt{8x+1}+\sqrt{2x-1}+3x^3-2>2x^2+3x$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 8x+1\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{2}\cdot$

$$(*)\Leftrightarrow (\sqrt{8x+1}-3)+(\sqrt{2x-1}-1)+3x^3-2x^2-3x+2>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\cdot(x-1)}{\sqrt{8x+1}+3}+\frac{2\cdot(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)\cdot(3x-2)\cdot(x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left[\frac{8}{\sqrt{8x+1}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+(3x-2)\cdot(x+1)\right]>0\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Do lượng: $\dfrac{8}{\sqrt{8x+1}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+(3x-2)\cdot(x+1)>0,\ \forall x\ge \dfrac{1}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(1;+\infty\right)\cdot$

BT 442. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x-2}+3x^3-8x\le \sqrt{7-x}+17x^2-9$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 3x-2\ge 0 \\ 7-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\le x\le 7.$

$$(*)\Leftrightarrow (\sqrt{3x-2}-4)+(1-\sqrt{7-x})+(3x^3-17x^2-8x+12)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\cdot(x-6)}{\sqrt{3x-2}+4}+\frac{x-6}{1+\sqrt{7-x}}+(x-6)\cdot(x+1)\cdot(3x-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)\cdot\left[\frac{3}{\sqrt{3x-2}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{7-x}}+(x+1)\cdot(3x-2)\right]\le 0\Leftrightarrow x\le 6.$$

Do lượng: $\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{7-x}}+(x+1)\cdot(3x-2)>0,\ \forall x\in\left[\dfrac{2}{3};7\right]\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[\dfrac{2}{3};6\right]\cdot$

BT 443. Giải bất phương trình: $3\sqrt{x^2+91}\le 3\sqrt{x^2+7}+10x-12$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Do $3\sqrt{x^2+91}<3\sqrt{x^2+7}$ nên cần điều kiện: $10x-12\ge 0.$

$$(*)\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+91}-10)-(\sqrt{x^2+7}-4)\le \frac{10}{3}x-10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}+4}-\frac{10}{3}\cdot(x-3)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left[(x+3)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{1}{\sqrt{x^2+7}+4}\right)-\frac{10}{3}\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left[\frac{(x+3)\cdot(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+91}-6)}{(\sqrt{x^2+91}+10)\cdot(\sqrt{x^2+7}+4)}-\frac{10}{3}\right]\Leftrightarrow x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge 3.$$

Do ta luôn có lượng: $\dfrac{(x+3)\cdot(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+91}-6)}{(\sqrt{x^2+91}+10)\cdot(\sqrt{x^2+7}+4)}-\dfrac{10}{3}<0,\ \forall x\geq\dfrac{6}{5}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in[3;+\infty)$.

BT 444. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x-4}}{x-\sqrt{5x-4}}\geq 1$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x>4$.

Giả sử $x-\sqrt{5x-4}>0\Leftrightarrow x>\sqrt{5x-4}\Leftrightarrow x^2>5x-4\Leftrightarrow(x-1)(x-4)>0,\ \forall x>4$.

Do đó $x-\sqrt{5x-4}>0$ thì $(*)\Leftrightarrow\sqrt{x}+2-\sqrt{x-4}\geq x-\sqrt{5x-4}$

$\Leftrightarrow -x+\sqrt{x}+2+(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x-4})\geq 0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-2)+\dfrac{4x}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x-4}}\geq 0$: luôn đúng $\forall x>4$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $x\in(4;+\infty)$.

BT 445. Giải bất phương trình: $x^2+x-\sqrt{2x-1}\leq 3-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $2x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{2}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5}$.

$(*)\Leftrightarrow(x^2+x-2)+(1-\sqrt{2x-1})\leq(2-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5})$

$\Leftrightarrow(x-1)\cdot(x+2)-\dfrac{2\cdot(x-1)}{1+\sqrt{2x-1}}\leq\dfrac{-x^3-x^2-x+3}{4+2a+a^2}$

$\Leftrightarrow(x-1)\cdot(x+2)-\dfrac{2\cdot(x-1)}{1+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{(x-1)\cdot(x^2+2x+3)}{(a+1)^2+3}\leq 0$

$\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left[x+2-\dfrac{2}{1+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{(x+1)^2+2}{(a+1)^2+3}\right]\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1$.

Do ta luôn có: $\forall x>\dfrac{1}{2}$ thì $x+2+\dfrac{(x+1)^2+3}{(a+1)^2+3}>2>\dfrac{2}{1+\sqrt{2x-1}}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]\cdot$

BT 446. Giải bất phương trình: $(x+2)\sqrt{x+1}>27x^3-27x^2+12x-2$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x\geq -1$.

$(*)\Leftrightarrow(3x-1)^3+3x-1<(\sqrt{x+1})^3+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow f(3x-1)<f(\sqrt{x+1})$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(3x-1)<f(\sqrt{x+1})\Leftrightarrow 3x-1<\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\3x-1<0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}3x-1\geq 0\\9x^2-7x<0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq x\leq\dfrac{7}{9}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[-1; \dfrac{7}{9}\right]\cdot$

BT 447. Giải bất phương trình: $(2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x+6})(x-1) > x+6 \quad (*) \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$. Do $x = 1$ không thỏa $(*)$ nên xét $x > 1$.

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x+6} > \frac{x+6}{x-1}\cdot$$

Xét $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x+6}$ trên $(1;+\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+6}} > 0,\ \forall x > 1.$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x+6}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ có: $g'(x) = -\dfrac{7}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x > 1.$

Do đó hàm số $g(x)$ luôn nghịch biến trên nửa khoảng $(1;+\infty)$.

Nếu $x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(2) = 8 \\ g(x) \geq f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \leq 8 \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$: vô nghiệm.

Nếu $x > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f > f(2) = 8 \\ g(x) < f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > 8 > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$: luôn có nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (2;+\infty)$.

BT 448. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} < \sqrt{4x^2 + 11x - 6} \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow x - 1 + x^2 + 5x + 6 + 2\sqrt{(x-1)(x+2)(x+3)} < 4x^2 + 11x - 6$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x+3)} \cdot \sqrt{x+2} \leq 3x^2 + 5x - 11$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \cdot \sqrt{x+2} < 3.(x^2 + 2x - 3) - (x+2) \qquad (**)$$

Chia 2 vế của $(**)$ cho lượng $x + 2 > 0$, ta được:

$$(**) \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x+2}} < 3 \cdot \frac{x^2+2x-3}{x+2} - 1 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x^2+2x-3}{x+2} - 2\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x+2}} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x+2}} > 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{6} \\ x > 1 + \sqrt{6} \end{array}\right.\cdot$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (1 + \sqrt{6}; +\infty)$.

BT 449. Giải bất phương trình: $\sqrt{4x^2 + 13x - 173} + 6\sqrt{x-3} \geq \sqrt{2x^2 - x - 1} \quad (*)$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \dfrac{\sqrt{2937} - 13}{8}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 13x - 173} \geq \sqrt{2x^2 - x - 1} - 6\sqrt{x-5} \qquad (1)$$

Nhận xét $\sqrt{2x^2-x-1}-6\sqrt{x-5}=\dfrac{2x^2-37x+179}{\sqrt{2x^2-x-1}+6\sqrt{x-5}}>0,\ \forall x\geq\dfrac{\sqrt{2937}-13}{8}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow\ 4x^2+13x-173\ \geq 2x^2-x-1+36(x-5)-12\sqrt{(2x+1)(x-1)(x-5)}$

$\Leftrightarrow 2x^2-22x+8+12\sqrt{(2x+1)(x-5)}.\sqrt{x-1}\geq 0$

$\Leftrightarrow 2x^2-9x-5+12\sqrt{2x^2-9x-5}.\sqrt{x-1}-13(x-1)\geq 0$ (2)

Đặt $\sqrt{2x^2-9x-5}=a;\ \sqrt{x-1}=b\ (a>0;\ b>0)$ thì

(2) $\Leftrightarrow a^2+12ab-13b^2\geq 0\Leftrightarrow (a-b)(a+13b)\geq 0\Leftrightarrow a\geq b$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{2x^2-9x-5}\geq\sqrt{x-1}\ \Leftrightarrow x^2-5x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}\vee\ x\leq\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$.

Kết luận: Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left[\dfrac{5+\sqrt{33}}{2};+\infty\right)$

BT 450. Giải bất phương trình: $\sqrt{4x^3-x-12}>\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^3-x-6}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}4x^3-x-12\geq 0\\ x\geq 1\\ x^3-x-6\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-3)(2x^2+3x+4)\geq 0\\ x\geq 1\\ (x-2)(x^2+2x+3)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 2.$

(*) $\Leftrightarrow 4x^3-x-12\geq x^3-x-6+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+3)}$

$\Leftrightarrow 2x^3-5>2\sqrt{(x-1)(x^2+2x+3}.\sqrt{(x-2)(x^2+x+1)}$

$\Leftrightarrow x^3+x^2+x-3-2\sqrt{x^3+x^2+x-3}.\sqrt{x^3-x^2-x-2}+x^3-x^2-2>0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^3+x^2+x-3}-\sqrt{x^3-x^2-x-2})^2>0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2+x-3}\neq\sqrt{x^3-x^2-x-2}$

$\Leftrightarrow x^3+x^2+x-3\neq x^3-x^2-x-2\Leftrightarrow 2x^2+2x-1\neq 0$: luôn đúng $\forall x\geq 2$.

Kết luận: Bất phương trình đã cho có nghiệm $x\geq 2$.

BT 451. Giải bất phương trình: $2(x+1)\leq 3\sqrt{x-1}+\sqrt{4x^2+9x+3}$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải 1. Điều kiện: $x\geq 1$.

(*) $\Leftrightarrow\ 2(x+1)-3\sqrt{x-1}\leq\sqrt{4(x^2+2x+1)+x-1}$ (1)

Đặt $x+1=a,\ \sqrt{x-1}=b,\ (a>0;\ b\geq 0)$

(1) $\Leftrightarrow 2a-3b\leq\sqrt{4a^2+b^2}\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a<3b\\ \begin{cases}2a\geq 3b\\ 4a^2-12ab+9b^2\leq 4a^2+b^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a<3b\\ \begin{cases}2a\geq 3b\\ b(2b-3a)\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$

Xét các trường hợp xảy ra sau:

- $2a<3b\Leftrightarrow 2x+2<3\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 4x^2+8x+4<9x-9\Leftrightarrow 4x^2-x+13<0$ vô nghiệm
- $\begin{cases}2a\geq 3b\\ b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2\geq 3\sqrt{x-1}\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

- $\begin{cases} 2a \ge 3b \\ 2b \le 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 \ge 2\sqrt{x-1} \\ 3x + 3 \ge 3\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - x + 13 \ge 0 \\ 9x^2 + 14x + 13 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Kết luận: So với hợp điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $S = [1;+\infty)$.

Lời giải 2. Điều kiện: $x \ge 1$.

$(*) \Leftrightarrow 2(x+1) - 3\sqrt{x-1} \le \sqrt{4(x^2+2x+1) + x - 1}$ (1)

Nhận xét: $2(x+1) - 3\sqrt{x-1} = \dfrac{4x^2 - x + 13}{2(x+1) + 3\sqrt{x-1}} > 0\ \forall x \ge 1.$

Đặt $x + 1 = a;\ \sqrt{x-1} = b$ $(a > 0; b \ge 0; 2a > 3b)$ thì (1) trở thành

(1) $\Leftrightarrow 2a - 3b \le \sqrt{4a^2 + b^2} \Leftrightarrow 4a^2 - 12ab + 9b^2 \le 4a^2 + b^2 \Leftrightarrow b(2b - 3a) \le 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 3a \ge 2b > 0 \end{array}\right.$

Xét các khả năng:

- Trường hợp 1. Nếu $b = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Trường hợp 2. Nếu $3a \ge 2b > 0$ hiển nhiên do $3a > 2a > 3b > 2b$.

Kết luận: So với hợp điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $S = [1;+\infty)$.

BT 452. Giải bất phương trình: $\dfrac{2 - x + \sqrt{x}}{\sqrt{2(x^2 - 5x + 9)} - 1} \le 1$ $(*)$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải 1. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 5x + 9 \ge 0 \\ 2(x^2 - 5x + 9) \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$

Nhận xét rằng: $\sqrt{2(x^2 - 5x + 9)} - 1 = \dfrac{2x^2 - 10x + 17}{\sqrt{2(x^2 - 5x + 9)} + 1} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$(*) \Leftrightarrow 2 - x + \sqrt{x} \le \sqrt{2(x^2 - 5x + 9)} - 1 \Leftrightarrow 3 - x + \sqrt{x} \le \sqrt{2(x^2 - 5x + 9)}$

$\Leftrightarrow 3 - x + \sqrt{x} \le \sqrt{2(x^2 - 6x + 9 + x)}$

Đặt $3 - x = a;\ \sqrt{x} = b$ $(b \ge 0)$ ta thu được $a + b \le \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ (1)

Chú ý rằng $\forall a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$ ta có: $(a - b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2ab \le a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a + b \le |a + b| \le \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

Do đó (1) nghiệm đúng với $\forall a \in R; b \ge 0$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0;+\infty)$.

Lời giải 2. Điều kiện: $x \ge 0;\ x^2 - 5x + 9 \ge 0;\ 2(x^2 - 5x + 9) \ne 1 \Leftrightarrow x \ge 0$.

Nhận xét: $2(x^2 - 5x + 9) - 1 = 2x^2 - 10x + 17 = 2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} > 0\ \forall x \in R.$

Suy ra: $\sqrt{2(x^2-5x+9)}-1>0$.

$(*) \Leftrightarrow 2-x+\sqrt{x} \le \sqrt{2(x^2-5x+9)-1} \Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x} \le \sqrt{2(x^2-5x+9)}$ (1)

Dễ thấy (1) thỏa mãn với $x=0$.

Xét trường hợp $x>0$ ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}+1 \le \sqrt{2\left(x-5+\dfrac{9}{x}\right)}$

Đặt $\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=t \Rightarrow \dfrac{9}{x}+x=t^2+6$, ta thu được:

$$t+1 \le \sqrt{2(t^2+1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ \begin{cases} t\ge -1 \\ t^2+2t+1 \le 2t^2+2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ \begin{cases} t\ge -1 \\ (t-1)^2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t\ge -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow t\in \mathbb{R}.$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[0;+\infty)$.

BT 453. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5} \le \sqrt{2x^2+4x+8}$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải 1***. Điều kiện: $x\ge 1$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5} \le \sqrt{2(x-1)+2(x^2+x+5)}$.

Đặt $\sqrt{x-1}=a$; $\sqrt{x^2+x+5}=b$ $(a\ge 0;\ b>0)$ ta được:

$a+b \le \sqrt{2a^2+2b^2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$: luôn đúng.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $S=[1;+\infty)$.

✍ ***Lời giải 2***. Điều kiện: $x\ge 1$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5} \le \sqrt{2(x-1)+2(x^2+x+5)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+5}}+1 \le \sqrt{2.\dfrac{x-1}{x^2+x+5}+2}$. Đặt $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+5}}=t$ $(t\ge 0)$

Suy ra: $t+1 \le \sqrt{2t^2+2} \Leftrightarrow t^2+2t+1 \le 2t^2+2 \Leftrightarrow (t-1)^2 \ge 0$: luôn đúng.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $S=[1;+\infty)$.

✍ ***Lời giải 3***. Điều kiện: $x\ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky (Cauchy – Schwarz), ta có

$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5})^2=(1.\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2+x+5})^2 \le (1^2+1^2)(x-1+x^2+x+5)$

$=2x^2+4x+8 \Rightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5} \le \left|\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5}\right| \le \sqrt{2x^2+4x+8}$.

Như vậy $(*)$ hiển nhiên đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $S=[1;+\infty)$.

BT 454. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{6(x^2-2x+4)}-2x} \ge \dfrac{1}{2}$ $(*)$ $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải 1. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 2x + 4 \ge 0 \\ \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} \ne 2x \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$

Với $x \ge 0$, suy ra: $\sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} - 2x = \dfrac{2(x-3)^2 + 6}{\sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} + 2x} > 0, \ \forall x \ge 0.$

$(*) \Leftrightarrow 2(\sqrt{x} - 2) \ge \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} - 2x \Leftrightarrow 2x - 4 + 2\sqrt{x} \ge \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)}$

$\Leftrightarrow 2(x - 2) + 2\sqrt{x} \ge \sqrt{6(x-2)^2 + 12x}$ (1)

Đặt $x - 1 = u;\ \sqrt{x} = v$ thu được $2u + 2v \ge \sqrt{6u^2 + 12v^2}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \ge 0 \\ 4u^2 + 8uv + 4v^2 \ge 6u^2 + 12v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \ge 0 \\ (u - 2v)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \ge 0 \\ u = 2v \end{cases}$

$\Leftrightarrow u = 2v\ (u \ge 0, v \ge 0) \Rightarrow \begin{cases} u = 2v \\ u \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2\sqrt{x} \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} - 1)^2 = 3 \\ x \ge 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3}.$

Kết luận: Bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải 2. Điều kiện: $x \ge 0$.

Nhận xét: với $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} = \sqrt{4x^2 + 2(x-3)^2 + 6} > \sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x$

Suy ra: $\sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} - 2x > 0.$

$(*) \Leftrightarrow 2(\sqrt{x - 2}) \ge \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} - 2x \Leftrightarrow 2x - 4 + 2\sqrt{x} \ge \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)}$ (1)

Xét $x = 0$ không thỏa mãn bất phương trình (1).

Xét trường hợp $x > 0$ ta có (1) $\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) + 2 \ge \sqrt{6\left(x - 2 + \dfrac{4}{x}\right)}$ (2)

Đặt $\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = t \Rightarrow t^2 + \dfrac{4}{x} - 4;$ (2) trở thành: $2t + 2 \ge \sqrt{6(t^2 + 2)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2 \ge 0 \\ 4t^2 + 8t + 4 \ge 6t^2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ 2(t-2)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ (t-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x + \dfrac{4}{x} - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 8x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3}.$

Kết luận: Bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

_BT 455._ Giải bất phương trình: $\dfrac{6 - x + 2\sqrt{x}}{3 - \sqrt{3x^2 - 14x + 27}} \ge 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 3 - \sqrt{3x^2 - 14x + 27} \ne 0 \end{cases}$

Nhận xét $3-\sqrt{3x^2-14x+27}=3-\sqrt{3\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\frac{32}{3}}\le 3-\sqrt{\frac{32}{3}}<0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$6-x+2\sqrt{x}\ge 3-\sqrt{3x^2-14x+27}\Leftrightarrow 3-x+2\sqrt{x}\ge\sqrt{3(x^2-6x+9)+4x}$ (1)

Đặt $3-x=u$; $2\sqrt{x}=v$ ($v\ge 0$) ta có (1) $\Leftrightarrow u+v\ge\sqrt{3u^2+v^2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\u^2+v^2+2uv\ge 3u^2+v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\u(u-v)\le 0\end{cases}$

Xét các khả năng xảy ra:

- $\begin{cases}u+v\ge 0\\u\ge 0\\u\le v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x+2\sqrt{x}\ge 0\\3-x\ge 0\\3-x\le 2\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\sqrt{x}-3\le 0\\x\le 3\\x+2\sqrt{x}-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}\le 3\\x\le 3\\\sqrt{x}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 3.$
- $\begin{cases}u+v\ge 0\\u\le 0\\u\ge v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x+2\sqrt{x}\ge 0\\3-x\le 0\\3-x\ge 2\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\sqrt{x}-3\le 0\\x\ge 3\\x+2\sqrt{x}-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}\le 3\\x\ge 3\\\sqrt{x}\le 1\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết luận: Bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[1;3]$.

BT 456. Giải bất phương trình: $\dfrac{3\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}-5}{2\sqrt{5x^2-2x+6}-5}\le 1$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\2\sqrt{5x^2-2x+6}\ne 5\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Do đó: $\forall x>\frac{1}{2}\Rightarrow(2x-1)(10x+1)>0\Leftrightarrow 10x^2-8x-1>0$

Suy ra: $4.(5x^2-2x+6)>25\Rightarrow 2\sqrt{5x^2-2x+6}>5$.

$(*)\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}-5\le 2\sqrt{5x^2-2x+6}-5$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}\le 2\sqrt{5(x^2+1)-(2x-1)}$ (1)

Đặt $\sqrt{2x-1}=v$; $\sqrt{x^2+1}=u$ ($u>0$; $v>0$) thì:

(1) $\Leftrightarrow u+3v\le 2\sqrt{5u^2-v^2}\Leftrightarrow u^2+6uv+9v^2\le 4(5u^2-v^2)\Leftrightarrow 19u^2-6uv-13v^2\ge 0$

$\Leftrightarrow(u-v)(19u+13v)\ge 0\Leftrightarrow u\ge v\Rightarrow x^2-2x+2\ge 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Kết luận: Kết hợp tất cả các trường hợp ta thu được nghiệm $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

BT 457. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}-6}{\sqrt{11x^2+5x+35}-6}\ge 1$ (*) ($x\in\mathbb{R}$)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge \frac{1}{3}\cdot$

Nhận xét: $11x^2 + 5x + 35 > 36 \Rightarrow \sqrt{11x^2+5x+35} - 6 > 0\ \forall \ge \frac{1}{3}\cdot$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} + 2\sqrt{x^2+x+3} - 6 \ge \sqrt{11x^2+5x+35} - 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-1} + 2\sqrt{x^2+x+3} \ge \sqrt{11(x^2+x+3) - 2(3x-1)} \qquad (1)$$

Đặt $\sqrt{3x-1} = a;\ \sqrt{x^2+x+3} = b,\ (a \ge 0;\ b > 0)$ ta thu được

$$(1) \Leftrightarrow a + 2b \ge \sqrt{11b^2 - 2a^2} \Leftrightarrow a^2 + 4ab + 4b^2 \ge 11b^2 - 2a^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 4ab - 7b^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(3a+7b) \le 0 \Leftrightarrow a \le b \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} \le \sqrt{x^2+x+3} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 \ge 0:\ \forall x.$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$

BT 458. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5} + 2\sqrt{x-4} - 10}{\sqrt{x^3+4x^2-6x-4} - 10} \ge 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải 1. Điều kiện: $\begin{cases} x^3 + 4x - 5 \ge 0 \\ x^3 + 4x^2 - 6x - 4 \ne 10 \\ x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ne 4 \\ x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 4$; trên $(4; +\infty)$ có $f'(x) = 3x^2 + 8x - 6 > 0$, $\forall x > 4$.

Suy ra hàm số liên tục, đồng biến trên miền $(4; +\infty)$.

Do đó $f(x) > \underset{x \in (4;+\infty)}{Min} f(x) = f(4) = 100 \Rightarrow \sqrt{f(x)} > 10.$

Với điều kiện x > 4, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+4x-5} + 2\sqrt{x-4} - 10 \ge \sqrt{x^3+4x^2-6x-4} - 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+4x-5} + 2\sqrt{x-4} \ge \sqrt{x^3+4x^2-6x-4}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 + 4x - 16 + 4\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)(x-4)} \ge x^3 + 4x^2 - 6x - 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 17 \le 4\sqrt{(x-1)(x-4)(x^2+x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 5x + 4) + x^2 + x + 5 \le 4\sqrt{x^2-5x+4}.\sqrt{x^2+x+5}$$

$$\Leftrightarrow 3.\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+5} + 1 \le 4\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+5}}$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x+5}} = t\ \ (t \ge 0)$ thu được $3t^2 + 1 \le 4t \Leftrightarrow (t-1)(3t-1) \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le t \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+5}} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 5 \le 9(x^2 - 5x + 4) \\ x^2 - 5x + 4 \le x^2 + x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 46x + 29 \ge 0 \\ 6x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{23+\sqrt{297}}{8} \\ x \le \dfrac{23-\sqrt{297}}{8} \end{array}\right.$$

Kết luận: So với điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S = \left[\dfrac{23+\sqrt{297}}{8}; +\infty\right)$.

Lời giải 2. Điều kiện $\begin{cases} x^3 + 4x - 5 \ge 0 \\ x^3 + 4x^2 - 6x - 4 \ne 10 \\ x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ne 4 \\ x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$

Khi đó, ta có: $x^3 + 4x^2 - 6x - 4 = (x-4)(x^2 + 8x) + 26x - 4 > 26.4 - 4 = 100$

Suy ra: $\sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4} - 10 > 0.$

Bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{x^3 + 4x - 5} + 2\sqrt{x-4} - 10 \ge \sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4} - 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 4x - 5} + 2\sqrt{x-4} \ge \sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 + 4x - 16 + 4\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)(x-4)} \ge x^3 + 4x^2 - 6x - 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 17 \le 4\sqrt{(x-1)(x-4)(x^2+x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 5x + 4) + x^2 + x + 5 \le 4\sqrt{x^2 - 5x + 4}.\sqrt{x^2 + x + 5} \qquad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = u$; $\sqrt{x^2 + x + 5} = v$ $(u \ge 0; v > 0)$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow 3u^2 + v^2 \le 4uv \Leftrightarrow (u - v)(3u - v) \le 0 \Leftrightarrow \frac{u^2 - v^2}{u + v}.\frac{9u^2 - v^2}{3u + v} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (u^2 - v^2)(9u^2 - v^2) \le 0 \Leftrightarrow (6x + 1)(8x^2 - 46x + 29) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{23+\sqrt{297}}{8}.$$

Kết luận: So với điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S = \left[\dfrac{23+\sqrt{297}}{8}; +\infty\right)$.

BT 459. Giải bất phương trình: $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x^2+x+1}} \le 1 \qquad (*) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x} \le x + \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 1 - x + \sqrt{x} \le \sqrt{(1-x)^2 + 3x} \qquad (**)$

Đặt $1 - x = u$; $\sqrt{x} = v$ $(v \ge 0)$ thì $(**) \Leftrightarrow u + v \le \sqrt{u^2 + 3v^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v < 0 \\ \begin{cases} u + v \ge 0 \\ u^2 + 3v^2 \ge u^2 + 2uv + v^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v < 0 \\ \begin{cases} u + v \ge 0 \\ v(v - u) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v \ge 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ u + v < 0 \\ \begin{cases} u + v \ge 0 \\ v \ge u \end{cases} \end{array}\right. .$$

· Nếu: $\begin{cases} u+v\ge 0\\ v=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x+\sqrt{x}\ge 0\\ \sqrt{x}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

· Nếu: $u+v<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x}-1>0\\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.$

· Nếu: $\begin{cases} u+v\ge 0\\ v\ge u\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x+\sqrt{x}\ge 0\\ 1-x\ge \sqrt{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x}-1\le 0\\ x+\sqrt{x}-1\le 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm là $S=\left[0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

BT 460. Giải bất phương trình: $\dfrac{2\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^3+2x-3}-4}{\sqrt{x^3+8x^2+2x-27}-4}\le 1$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2\ge 4\\ x^3+2x-3\ge 0\\ x^3+8x^2+2x-27\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)\ge 0\\ (x-1)(x^2+x+3)\ge 0\\ x^3+8x^2+2x-27\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2.$

Nhận xét $x^3+8x^2+2x-27=x(x-2)(x+10)+22x-27\ge 22.3-27=17$

Suy ra: $\sqrt{x^3+8x^2+2x-27}>\sqrt{17}>4$. Do đó:

(*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^3+2x-3}\le\sqrt{x^3+2x-3+8(x^2-4)}$ (1)

Đặt $\sqrt{x^2-4}=u;\ \sqrt{x^3+2x-3}=v$ $(u\ge 0;\ v>0)$ thì:

(1) $\Leftrightarrow 2u+v\le\sqrt{8u^2+v^2}\Leftrightarrow 4u^2+4uv+v^2\le 8u^2+v^2\Leftrightarrow 4u(u-v)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0\\ u\ge v\end{array}\right.\cdot$

· Nếu: $u=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-2\end{array}\right.$

· Nếu: $u\ge v\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4}\ge\sqrt{x^3+2x-3}\Leftrightarrow x^3-x^2+2x+1\ge 0$

$\Leftrightarrow x(x^2-x+2)+1\ge 0$: luôn đúng với mọi $x\ge 2$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=\left[2;+\infty\right)\cdot$

BT 461. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}-6}{\sqrt{11x^2+5x+35}-6}\ge 1$ (*) $(x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{3}\cdot$

Nhận xét: $11x^2+5x+35>36\Rightarrow\sqrt{11x^2+5x+35}-6>0\ \forall\ge\dfrac{1}{3}\cdot$

(*) $\Leftrightarrow\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}-6\ge\sqrt{11x^2+5x+35}-6$

$\Leftrightarrow\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}\ge\sqrt{11(x^2+x+3)-2(3x-1)}.$

Đặt $\sqrt{3x-1}=a;\ \sqrt{x^2+x+3}=b,\ (a\ge 0;\ b>0)$ ta thu được

$a+2b\ge\sqrt{11b^2-2a^2}\Leftrightarrow a^2+4ab+4b^2\ge 11b^2-2a^2\Leftrightarrow 3a^2+4ab-7b^2\le 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(3a+7b)\le 0\Leftrightarrow a\le b\Leftrightarrow \sqrt{3x-1}\le\sqrt{x^2+x+3}\Leftrightarrow x^2-2x+4\ge 0:\ \forall x.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $S=\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

BT 462. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^3+2x-3}+2(x+1)\le\sqrt{5x^3+4x^2+18x-11}.$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x^3+2x-3\ge 0\\5x^3+4x^2+18x-11\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$\sqrt{x^3+2x-3}+2(x+1)\le\sqrt{5(x^3+2x-3)+4(x^2+2x+1)}$

Đặt $\sqrt{x^3+2x-3}=u;\ x+1=v\ \ (u\ge 0;\ v>0)$ thu được

$u+2v\le\sqrt{5u^2+4v^2}\Leftrightarrow u^2+4uv+4v^2\le 5u^2+4v^2\Leftrightarrow u(u-v)\ge 0$

- Với: $u=0\Leftrightarrow x^3+2x-3=0\Leftrightarrow x=1.$
- Với: $u\ge v\Leftrightarrow\sqrt{x^3+2x-3}\ge x+x+1\Leftrightarrow x^3+2x-3\ge x^2+2x+1$

  $\Leftrightarrow x^3-x^2-4\ge 0\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+2)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm là $S=\{1\}\cup[2;+\infty)$.

BT 463. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+x-2}\le\sqrt{3x^3+4x-4}\qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x+2\ge 0\\x^3+x-2\ge 0\\3x^3+4x-4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\(x-1)(x^2+x+2)\ge 0\\3x^3+4x-4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+x-2}\ge\sqrt{3(x^3+x-2)+x+2}$

Đặt $\sqrt{x+2}=a;\ \sqrt{x^3+x-2}=b\ (a>0;\ b\ge 0)$ ta thu được

$a+b\ge\sqrt{3a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\ge 3a^2+b^2\Leftrightarrow a(a-b)\le 0\Leftrightarrow a\le b$

$\Leftrightarrow x+2\le x^3+x-2\Leftrightarrow x^3\ge 4\Leftrightarrow x\ge\sqrt[3]{4}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=[\sqrt[3]{4};+\infty)$.

BT 464. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-2}\le\sqrt{5x^2-6x+2}\qquad (*)\qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải 1. Điều kiện: $x\ge 2.$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-2}\le\sqrt{5(x^2-x)-(x-2)}\Leftrightarrow 1+\sqrt{\frac{x-2}{x^2-x}}\le\sqrt{5-\frac{x-2}{x^2-x}}\qquad(1)$

Đặt $\sqrt{\frac{x-2}{x^2-x}}=t\ \ (t\ge 0)$ ta thì (1) $\Leftrightarrow\ 1+t\le\sqrt{5-t^2}\Leftrightarrow t^2+2t+1\le 5-t^2$

$\Leftrightarrow t^2+t-2\le 0\Leftrightarrow (t-1)(t+2)\le 0\Leftrightarrow t\le 1\Leftrightarrow x-2\le x^2-x\Leftrightarrow x^2+2\ge 0$: luôn đúng.

Kết luận: Tập nghiệm củabất phương trình là $S=[2;+\infty)\cdot$

Lời giải 2. Điều kiện: $x \ge 2$.

$(*) \Leftrightarrow x^2 - 2 + 2\sqrt{x^2 - 3x^2 + 2x} \le 5x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x} \le 3x^2 - 3x + 2$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x \le 4x^4 + 8x^2 + 4 - 12x(x^2+1) + 9x^2$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 14x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 14x + 4 + x \ge 0.$

Nhận thấy: $4x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 14x + 4 + x \ge 0 = 2(x^2 - 2x + 1)(2x^2 - 3x + 2) + x$

$= 2(x-1)^2(2x^2 - 3x + 2) + x \ge 0 = 2(x^2 - 2x + 1)(2x^2 - 3x + 2) + x$

$= 2(x-1)^2(2x^2 - 3x + 2) + x > 0,\ \forall x \ge 2.$

Kết luận: Tập nghiệm củabất phương trình là $S=[2;+\infty)\cdot$

_BT 465._ Giải bất phương trình: $x - 3\sqrt{x} + 2 \le \sqrt{x^2 + 7x + 4}$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow x + 2 - 3\sqrt{x} \le \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 3x} \Leftrightarrow x + 2 - 3\sqrt{x} \le \sqrt{(x+2)^2 + 3x}$ (1)

Đặt $x + 2 = a;\ \sqrt{x} = b\ (a > 0;\ b \ge 0)$ ta thu được:

$$(1) \Leftrightarrow a - 3b \le \sqrt{a^2 + 3b^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 3b \\ \begin{cases} a \ge 3b \\ a^2 - 6ab + 9b^2 \le a^2 + 3b^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 3b \\ \begin{cases} a \ge 3b \\ b(a-b) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.\cdot$$

- Với: $a < 3b \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$
- Với: $\begin{cases} a \ge 3b \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3\sqrt{x} + 2 \ge 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$
- Với: $\begin{cases} a \ge 3b \\ a - b \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3\sqrt{x} + 2 \ge 0 \\ x - \sqrt{x} + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \ge 2 \\ \sqrt{x} \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4 \\ x \le 1 \end{array}\right.\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=[0;+\infty)\cdot$

_BT 466._ Giải bất phương trình: $\sqrt{3x^2 - 12x + 5} \le \sqrt{x^3 - 1} + \sqrt{x^2 - 2x}$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 3x^2 - 12x + 5 \ge 0 \\ x \ge 1 \\ x(x-2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$

$(*) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 5 \le x^3 + x^2 - 2x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)x(x-2)}$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 10x - 6 + 2\sqrt{(x-1)(x-2)}.\sqrt{(x^2+x+1)x} \ge 0$

$\Leftrightarrow (x^3 + x^2 + x) - 3(x^2 - 3x + 2) + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}.\sqrt{x^3 + x^2 + x} \ge 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3.\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2 + x} + 2\sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2 + x}} \ge 0$ (1)

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2 + x}} = t\ (t \ge 0)$ thì $(1) \Leftrightarrow 1 - 3t^2 + 2t \ge 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le t \le 1$

Suy ra: $t \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \le x^3 + x^2 + x \Leftrightarrow x^3 + 4x + 2 \ge 0$: luôn đúng $\forall x \ge 2$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $S = \left[2; +\infty\right)\cdot$

BT 467. Giải bất phương trình: $5\sqrt{x-5} + 3\sqrt{2x^2 - x - 17} \ge 4\sqrt{x^2 - 1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 5$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{18x^2 - 9x - 153} \ge 4\sqrt{x^2 - 1} - 5\sqrt{x - 5}$ (1)

Ta có: $4\sqrt{x^2 - 1} - 5\sqrt{x - 5} = \dfrac{16x^2 - 25x + 109}{4\sqrt{x^2 - 1} + 5\sqrt{x - 5}} > 0,\ \forall x \ge 5$. Do đó:

$(1) \Leftrightarrow 18x^2 - 9x - 153 \ge 16x^2 - 16x + 25 - 125 - 20\sqrt{(x+1).(x-1).(x-5)}$

$\Leftrightarrow x^2 - 17x - 6 + 10.\sqrt{(x+1).(x-1).(x-5)} \ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 5) + 10.\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2 - 6x + 5} - 11.(x+1) \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x+1} + 10\cdot\sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x+1}} - 11 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x+1}} \ge 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{7 + \sqrt{33}}{2} \vee x \le \dfrac{7 - \sqrt{33}}{2}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S = \left[\dfrac{7 + \sqrt{33}}{2}; +\infty\right)\cdot$

BT 468. Giải bất phương trình: $3\sqrt{81x^4 + 4} \ge 27x^2 + 42x + 6$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Có $81x^4 + 4 = 81x^4 + 36x^2 + 4 - 36x^2 = (9x^2 + 2)^2 - (6x)^2 = (9x^2 - 6x + 2)(9x^2 + 6x + 2)$.

$(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{9x^2 - 6x + 2}.\sqrt{9x^2 + 6x + 2} \ge 5(9x^2 + 6x + 2) - 2(9x^2 + 6x + 2)$

Đặt $\sqrt{9x^2 + 6x + 2} = u$; $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} = v$ $(u > 0; v > 0)$ quy về

$3uv \ge 5u^2 - 2v^2 \Leftrightarrow u(5u + 2v) - v(5u + 2v) \le 0 \Leftrightarrow (u - v)(5u + 2v) \le 0 \Leftrightarrow u \le v$

$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 6x + 2} \le \sqrt{9x^2 - 6x + 2} \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 2 \le 9x - 6x + 2 \Leftrightarrow x \le 0$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; 0\right]\cdot$

BT 469. Giải bất phương trình: $4x^2 - 25x + 14 \le 3\sqrt{x^3 - 31x + 30}$ (*) $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x^3 - 31x + 30 \ge 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5)(x + 6) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ -6 \le x \le 1 \end{array}\right.$.

$(*) \Leftrightarrow 4(x^2 - 6x + 5) - (x + 6) \le 3\sqrt{(x^2 - 6x + 5)(x + 6)}$

$\Leftrightarrow 4(x^2 - 6x + 5) - (x + 6) \le 3\sqrt{x^2 - 6x + 5}.\sqrt{x + 6}$ (1)

Đặt $\sqrt{x^2 - 6x + 5} = a$; $\sqrt{x + 6} = b$ $(a \ge 0; b \ge 0)$ ta có

(1) $\Leftrightarrow 4a^2 - b^2 \le 3ab \Leftrightarrow (a-b)(4a+b) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a+b=0 \\ a \le b \end{array}\right.$.

- Với: $4a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \\ x = -6 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

- Với: $a \le b \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \le x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{7-\sqrt{53}}{2} \le x \le \dfrac{7+\sqrt{53}}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện ta có tập nghiệm là $S = \left[\dfrac{7-\sqrt{53}}{2}; 1\right] \cup \left[5; \dfrac{\sqrt{53}}{2}\right]$.

BT 470. Giải bất phương trình: $\sqrt{2(4x^2 - x - 6)} - \sqrt{2x-3} < \sqrt{2x^2 + x - 1}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 8x^2 - 2x - 12 \ge 0 \\ x \le \dfrac{3}{2} \\ 2x^2 + x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3}{2}$.

(*) $\Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 12 < 2x^2 + x - 1 + 2x - 3 + 2\sqrt{(2x-1)(x+1)(2x-3)}$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 8 < 2\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x^2 - x - 3}$

$\Leftrightarrow 3(2x^2 - x - 3) - (2x - 1) < 2\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x^2 - x - 3}$ (1)

Đặt $\sqrt{2x-1} = u$; $\sqrt{2x^2 - x - 3} = v$ ($u > 0$; $v \ge 0$). Khi đó:

(1) Û $3v^2 - u^2 < 2uv \Leftrightarrow (v-u)(3v+u) < 0 \Leftrightarrow v < u$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x - 3} < \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < x < 2$.

Kết luận: So với điều kiện ta thu được tập nghiệm là $S = \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$.

BT 471. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + \sqrt{x(x^2 - x + 1)} \le \sqrt{\dfrac{(x^2+1)^3}{x}}$ (*)

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$.

Chia cho $\sqrt{x(x^2+1)} > 0$ ta được: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x(x^2+1)}} + \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}} \le \sqrt{\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}{x + \frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}} \le \frac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1}{x + \frac{1}{x}}} + \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}} \le x + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}\le x+\frac{1}{x}$$ và đặt $y=x+\frac{1}{x}\overset{Cauchy}{\ge} 2.$ Khi đó:

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\le y \Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{1}{y}}\le y-\sqrt{y-\frac{1}{y}}$$ và do 2 vế dương khi $\forall y\ge 2$:

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{y}\le y^2-2y\sqrt{y-\frac{1}{y}}+y-\frac{1}{y}\Leftrightarrow y^2-2y\sqrt{y-\frac{1}{y}}+y-1\ge 0$$ và chia cho y:

$$\Leftrightarrow \left(y-\frac{1}{y}\right)-2\sqrt{y-\frac{1}{y}}+1\ge 0\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-\frac{1}{y}}-1\right)^2\ge 0:$$ luôn đúng.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là: $x\in(0;+\infty)$.

BT 472. Giải bất phương trình: $8x^2-8x+3\le 8x\sqrt{2x^2-3x+1}$ $\quad(*)\quad$ $(x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x^2-3x+1\ge 0\Leftrightarrow x\le \frac{1}{2}$ hoặc $x\ge 1$.

Đặt $t=2\sqrt{2x^2-3x+1}\ge 0,$ suy ra: $t^2=8x^2-12x+4.$

Xét phương trình: $8x^2-8x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1}$ $\quad$ (1)

$(1)\Leftrightarrow t^2-4xt+4x-1=0$ có $\Delta'_t=(2x-1)^2,$ suy ra: $t=4x-1$ hoặc $t=1.$

Do đó $(1)\Leftrightarrow (t-1)\cdot(t-4x+1)=0$ hay $(*)\Leftrightarrow (t-1)\cdot(t-4x+1)\le 0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{2x^2-3x+1}-1)\cdot(2\sqrt{2x^2-3x+1}-4x+1)\le 0$

Đặt: $f(x)=2\sqrt{2x^2-3x+1}-1$ và $g(x)=2\sqrt{2x^2-3x+1}-4x+1.$

$f(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-3x+1}=1\Leftrightarrow 4.(2x^2-3x+1)=1\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}\cdot$

$g(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-3x+1}=4x-1\Leftrightarrow \begin{cases}4x-1\ge 0\\ 8x^2+4x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}-1}{4}\cdot$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$		$\frac{\sqrt{7}-1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	|	−		////		−	0	+	
$g(x)$		+	|	+	0	−		////		−	|	−	
$f(x)\cdot g(x)$		+	0	−	0	+		////		+	0	−	

Dựa vào bảng xét dấu $\Rightarrow x\in\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{3}}{4};+\infty\right)$ là tập nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của bất phương trình là: $\Rightarrow x\in\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{3}}{4};+\infty\right)$

BT 473. Giải bất phương trình: $(2x+1)\sqrt{x+1}\ge x^2+2x-1$ $\quad(*)\quad$ $(x\in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1$.

$(*) \Leftrightarrow \left[2.(x+1)-1\right]\sqrt{x+1} \ge (x+1)^2 - 2$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x+1} > 0$, suy ra: $x+1 = t^2$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow (2t^2-1)\cdot t \ge t^4 - 2$

$\Leftrightarrow t^4 - 2t^3 + t - 2 \le 0 \Leftrightarrow (t+1)\cdot(t-2)\cdot(t^2-t+1) \le 0 \Leftrightarrow t \le 2.$

Suy ra: $\sqrt{x+1} \le 2 \Leftrightarrow x+1 \le 4 \Leftrightarrow x \le 3.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[-1;3\right]\cdot$

BT 474. Tìm tham số m để: $m\sqrt{x^2-2x+2} = x+2$ $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt ?

Lời giải. Do $\sqrt{x^2-2x+2} > 1$ nên $(*) \Leftrightarrow m = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}\cdot$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ có $f'(x) = \dfrac{4-3x}{\sqrt{(x^2-2x+2)^3}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}\cdot$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Ta có: $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \sqrt{10}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Kết luận: Từ bảng biến thiên, suy ra: $m \in (1;\sqrt{10})$.

BT 475. Tìm m để phương trình $m\sqrt{x^2+2} = x+m$ $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt ?

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow m = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-1}$, (do: $\sqrt{x^2+2}-1 > 0$).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-1}$ trên ℝ có $f'(x) = \dfrac{2-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}.(\sqrt{x^2+2}-1)^2}\cdot$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ hoặc $x = \sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \in (-\sqrt{2};\sqrt{2})$ là giá trị cần tìm.

BT 476. Tìm tham số m để phương trình: $2x+1 = m\sqrt{x^2+1}$ $(*)$ có nghiệm ?

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow m = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=\dfrac{2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=0 \Leftrightarrow x=2.$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	2

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

$f(2)=\sqrt{5}$.

Kết luận: Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x\in\left(-2;\sqrt{5}\right]$.

BT 477. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ $(*)$ có hai nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{2}$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow x^2+mx+2=(2x+1)^2$

$\Leftrightarrow 3x^2+4x-1=mx \Leftrightarrow 3x+4-\dfrac{1}{x}=m$ (do $x=0$ thì $(*)$ vô nghiệm)

Xét hàm số $f(x)=3x+4-\dfrac{1}{x}$ trên $D=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{0\}$ có $f'(x)=3+\dfrac{1}{x^2}>0$.

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{0\}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	//////		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	//////	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m\ge\dfrac{9}{2}$.

BT 478. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m$ $(*)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}$ trên đoạn $[0;6]$ có:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{2x}}+\frac{1}{2\sqrt[4]{2x(6-x)}}+\frac{1}{2\sqrt{6-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)}_{g(x)>0,\ \forall x\in(0;6)}.$$

- Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}=0 \Leftrightarrow 2x=6-x \Leftrightarrow x=2$.

Dấu của $f'(x)$ chính là dấu của $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}$ do $g(x)>0$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2		6	$+\infty$
$f'(x)$	//////		$+$	0	$-$		//////
$f(x)$	//////	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}+6$	$\searrow$	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$	//////

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\in\left[2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6};\ 3\sqrt{2}+6\right)$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

BT 479. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$ có nghiệm thực duy nhất ?

Lời giải. Điều kiện: $x\le 1$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4-13x+m}=1-x$

$\Leftrightarrow x^4-13x+m=(1-x)^4 \Leftrightarrow 4x^3-6x^2-9x=1-m$.

- Xét hàm số $f(x)=4x^3-6x^2-9x$ trên $(-\infty;1]$ có: $f'(x)=12x^2-12x-9$.

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-12x-9=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2} \vee x=\dfrac{3}{2}$ (loại).

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	//////	//////
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-11	//////

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$, $f(1)=-11$.

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m<-11$ hoặc $m=\dfrac{5}{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

BT 480. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$?

Lời giải. Do $m>0$ nên cần điều kiện là $x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$. Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow \left(x^2+2x-8\right)^2 = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)^2(x+4)^2 = m(x-2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x-2)(x+4)^2 - m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ m=(x-2)(x+4)^2 \quad (1) \end{array}\right.$$

- Đến đây, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ chứng minh (1) có đúng 1 nghiệm $x>2,\ \forall m>0$.
- Xét $f(x)=(x-2)(x+4)^2$ trên $(2;+\infty)$ có: $f'(x)=3x^2+12x>0, \forall x>2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	(gạch bỏ)		+
$f(x)$	(gạch bỏ)	0 ↗	$+\infty$

Ta có: $\lim\limits_{x® 2^{+}} \mathrm{f}(x) = 0$, $\lim\limits_{x® +¥} \mathrm{f}(x) = +¥$.

- Từ bảng biến thiên, chứng tỏ rằng với $m>0$ thì (1) luôn có đúng một nghiệm $x>2,$ nghĩa là phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt (đpcm).

<u>*BT 481.*</u> Tìm m để phương trình: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$ có nghiệm thực ?

<u>*Lời giải*</u>. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ trên $\mathbb{R}$ có:

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$ có $f'(x)=0$

$\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(2x-1)\ge 0 \\ (2x+1)^2\left(x^2-x+1\right)=(2x-1)^2\left(x^2-x+1\right) \end{cases}$: vô nghiệm.

- Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	1

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\in(-1;1)$.

<u>*BT 482.*</u> Tìm tham số m để: $\sqrt[4]{x^2+2x+4}-\sqrt{x+1}=m$ có đúng một nghiệm ?

<u>*Lời giải*</u>. Điều kiện: $x\ge -1$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt[4]{x^2+2x+4}-\sqrt{x+1}$ trên $\left[-1;+\infty\right)$

$f'\left(x\right)=\dfrac{x+1}{2\sqrt[4]{\left(x^2+2x+4\right)^3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Vì: $x^2+2x+4=\left(x+1\right)^2+3>\left(x+1\right)^2$

Nên $\dfrac{x+1}{2\sqrt[4]{\left(x^2+2x+4\right)^3}}<\dfrac{x+1}{2\sqrt[4]{\left(x+1\right)^6}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\Rightarrow f'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(-1;+\infty\right)$.

- Ta có: $f\left(-1\right)=\sqrt[4]{3}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^2+2x+4}-\sqrt{x+1}\right)$ `

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+4-\left(x+1\right)^2}{\left(\sqrt[4]{x^2+2x+4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x+1\right)}=0$$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		$+\infty$
$f'(x)$	(gạch)		$-$	
$f(x)$	(gạch)	$\sqrt[4]{3}$	$\searrow$	0

- Để phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow 0<x\le\sqrt[4]{3}$.

BT 483. Tìm tham số m để: $(m-2)(1+\sqrt{x^2+1})=x^2-m$ có nghiệm thực ?

Lời giải. Đặt: $t=\sqrt{x^2+1}\ge 1$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left(m-2\right)\left(1+t\right)=t^2-1-m\Leftrightarrow m=t+\dfrac{1}{t+2},\ \left(t\ge 1\right)$ $\qquad(1)$

- Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\dfrac{1}{t+2}$ trên $\left[1;+\infty\right)$ có $f'\left(t\right)=1-\dfrac{1}{\left(t+2\right)^2}$.

$\Leftrightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{t^2+4t+3}{\left(t+2\right)^2}>0,\ \forall t\ge 1\Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

- Để $\left(*\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có nghiệm trên $\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow m\ge f\left(1\right)\Leftrightarrow m\ge\dfrac{4}{3}$.

BT 484. Tìm m để: $\sqrt{x^2-4x+5}=m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương ?

Lời giải.

- Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+5}$. Khi đó: $t'=\dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x+5}}$. Cho $t'=0\Leftrightarrow x=2$.

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
t'	(gạch)		$-$	0	$+$	
t	(gạch)	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy với mỗi $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$ thì $(*)$ có hai nghiệm $x > 0$.

$(*) \Leftrightarrow t^2 + t - 5 = m \; (1)$ và yêu cầu $\Leftrightarrow$ tìm m để (1) có nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$.

- Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 5$ trên $\left(1;\sqrt{5}\right)$ có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left(1;\sqrt{5}\right)$.

- Bảng biến thiên

t	$-\infty$	1		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$+$		//////
$f(t)$	//////	-3	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	//////

- Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(t) = -3$ và $\lim\limits_{x \to \sqrt{5}^-} f(t) = \sqrt{5}$.

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \in \left(-3;\sqrt{5}\right)$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

BT 485. Tìm tham số m để: $6 + x + 2\sqrt{(4-x)(2x-2)} = m + 4(\sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2})$ có nghiệm thực ?

Lời giải. Điều kiện: $1 \le x \le 4$. Đặt $t = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}$ với $x \in [1;4]$.

Ta có: $t' = \dfrac{2\sqrt{4-x} - \sqrt{2x-2}}{2\sqrt{4-x}\sqrt{2x-2}}$. Cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

x	$-\infty$	1		3		4	$+\infty$
t'	//////		$+$	0	$-$		//////
t	//////	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\sqrt{6}$	//////

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t \in \left[\sqrt{3};3\right]$.

$(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = m \; (1)$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $t \in \left[\sqrt{3};3\right]$.

- Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t + 4$ trên đoạn $\left[\sqrt{3};3\right]$ có $f'(t) = 2t - 4$.

Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

t	$-\infty$	$\sqrt{3}$		2		3	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$-$	0	$+$		//////
$f(t)$	//////	$7-4\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	//////

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \in \left[0;1\right]$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

BT 486. Tìm m để: $2(x+\sqrt{4-x^2})-x\sqrt{4-x^2}+2-3m=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải. Điều kiện: $-2 \le x \le 2$.

- Đặt: $t = x+\sqrt{4-x^2} \Rightarrow t' = \dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		$\sqrt{2}$		2	$+\infty$
t'			$+$	0	$-$		
t		-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t \in \left[-2;2\sqrt{2}\right]$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow -t^2+4t+8=6m,\ \left(1\right)$.

- Từ bảng biến thiên, nhận thấy rằng:

Ứng với $t = 2\sqrt{2}$ thì phương trình $t = x+\sqrt{4-x^2}$ cho 1 nghiệm x.

Ứng với mỗi $t \in \left[-2;2\right)$ thì phương trình $t = x+\sqrt{4-x^2}$ cho 1 nghiệm x.

Ứng với mỗi $t \in \left[2;2\sqrt{2}\right)$ thì phương trình $t = x+\sqrt{4-x^2}$ cho 2 nghiệm x.

- Xét hàm số $f\left(t\right) = -t^2+4t+8$ trên $[-2;2\sqrt{2}]$ có $f'\left(t\right) = -2t+4 \Rightarrow f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

t	$-\infty$	-2		2		$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'\left(t\right)$			$+$	0	$-$		
$f\left(t\right)$		-4	$\nearrow$	12	$\searrow$	$8\sqrt{2}$	

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow 8\sqrt{2} < 6m \le 12 \Leftrightarrow \dfrac{4\sqrt{2}}{3} < m \le 2$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\left[\begin{array}{l} 6m = 2 \\ 8\sqrt{2} = 6m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{4\sqrt{2}}{3} \\ m = 2 \end{array}\right.$

BT 487. Tìm tham số m để: $\sqrt{x}+\sqrt{4-x}-\sqrt{m+4x-x^2} = 0$ có nghiệm thực ?

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \le 4$. Khi đó: $\left(*\right) \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{4-x} = \sqrt{m+4x-x^2}$

$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{4x-x^2}=m+4x-x^2 \Leftrightarrow -\left(4x-x^2\right)+2\sqrt{4x-x^2}+4=m \qquad (1)$

- Đặt $t=\sqrt{4x-x^2} \Rightarrow t'=\dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$. Cho $t'=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
t'	//////		$+$	0	$-$		//////
t	//////	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	//////

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t\in\left[0;2\right]$.

$(1) \Leftrightarrow -t^2+2t+4=m$. Xét hàm số $f\left(t\right)=-t^2+2t+4$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ có:

$f'\left(t\right)=-2t+2$. Cho $f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=1$.

t	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$+$	0	$-$		//////
$f(t)$	//////	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	//////

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\in\left(4;5\right)$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

<u>BT 488.</u> Tìm tham số m để: $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm thực ?

<u>***Lời giải***</u>. Điều kiện: $x\ge 1$. Khi đó: $3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} \qquad (1)$

- Đặt: $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x+1}} \Rightarrow 0\le t<1$ và $(1) \Leftrightarrow m=-3t^2+2t$.
- Xét hàm số $f\left(t\right)=-3t^2+2t$ trên $\left[0;1\right)$ có $f'\left(t\right)=-6t+2$. Cho $f'\left(t\right)=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$ và có $\lim\limits_{t\to 1^-} f\left(t\right)=-1$.

t	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$+$	0	$-$		//////
$f(t)$	//////	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	//////

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\in\left(-1;\dfrac{1}{3}\right]$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

BT 489. Tìm tham số m để $m(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2)=\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ có nghiệm thực ?

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$. Đặt: $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 2\sqrt{1-x^4}=2-t^2$

$t'=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Cho $t'=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
t'	//////		$-$	0	$+$		//////
t	//////	$\sqrt{2}$	↘	0	↗	$\sqrt{2}$	//////

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$(*)\Leftrightarrow m(t+2)=2-t^2+t\Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2+t+2}{t+2},\ t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$f'(t)=\dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2}=0\Leftrightarrow t=0$

- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$ có .

t	$-\infty$	0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$-$		//////
$f(t)$	//////	1	↘	$\sqrt{2}-1$	//////

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\in\left[\sqrt{2}-1;1\right]$.

BT 490. Tìm tham số m để: $|1+x|+(4-m)|x-1|=(m-1)\sqrt{x^2-1}$ có nghiệm ?

Lời giải.

- Điều kiện: $|x|\ge 1$. Do $x=1$ thì $(*)$ vô nghiệm nên ta xét $\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x>1\end{array}\right.\ (a)$

$(*)\Leftrightarrow \dfrac{|1+x|}{|x-1|}+4-m=(m-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}+(1-m)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+4-m=0\ (1)$

- Đặt: $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}},(t\ge 0,\ t\ne 1)$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$.
- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$ trên $[0;+\infty)\backslash\{1\}$ có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$.
- Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3\end{array}\right.$ (loại) và $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2+t+4}{t+1}=+\infty$.

t	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$	
$f(t)$		4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \in (3;+\infty)$.

BT 491. Tìm m để: $2mx = 2x^2 - 3\sqrt{2x+4x^3} + 1$ có hai nghiệm phân biệt ?

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0$. Do $x = 0$ không là nghiệm nên xét $x > 0$. Chia hai vế cho $2x^2+1>0$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow (2x^2+1) - 3\sqrt{2x(2x^2+1)} = 2mx \Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{\frac{2x}{2x^2+1}} = m.\frac{2x}{2x^2+1}\ (1)$$

- Đặt: $t = \sqrt{\frac{2x}{2x^2+1}} = \sqrt{\frac{1}{x+\frac{1}{2x}}} \overset{Cauchy}{\le} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x\frac{1}{2x}}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ và $t \ge 0 \Rightarrow t \in \left[0;\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$.

$(1) \Leftrightarrow 1 - 3t = mt^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} = m,\ (2)$ (do $t = 0$ không là nghiệm).

- Nhận thấy ứng với mỗi $t \in \left(0;\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$ cho ta hai nghiệm của x.
- Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t}$ trên $\left(0;\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$ có $f'(t) = \frac{1}{t^2}\left(3 - \frac{2}{t}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$.

t	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$		
$f(t)$		$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$\sqrt{2} - 3\sqrt[4]{2}$	

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m = -\frac{9}{4}$ hoặc $m > \sqrt{2} - 3\sqrt[4]{2}$.

BT 492. Tìm tham số m để: $m(x+4)\sqrt{x^2+2} = 5x^2 + 8x + 24$ có nghiệm ?

Lời giải.

$(*) \Leftrightarrow m(x+4)\sqrt{x^2+2} = (x+4)^2 + 4(x^2+2)$. Do $x = -4$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình $\Leftrightarrow m = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{4\sqrt{x^2+2}}{x+4}$ (1)

- Đặt: $t=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$ có $t'=\dfrac{2-4x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}\Rightarrow t'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}t=\pm 1$.

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
t'		$+$		$+$	0	$-$	
t	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị của t là $t\in\left(-1;3\right]\backslash\left\{0\right\}$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow m=t+\dfrac{4}{t},\ \left(2\right)$. Để $\left(1\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\left(2\right)$ có nghiệm $t\in\left(-1;3\right]\backslash\left\{0\right\}$.

- Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\dfrac{4}{t}$ trên $t\in\left(-1;3\right]\backslash\left\{0\right\}$ có $f'\left(t\right)=\dfrac{t^2-4}{t^2}=0\Leftrightarrow t=2$.
- Ta có: $\lim\limits_{t\to -1^+}f\left(t\right)=-5,\ \lim\limits_{t\to 0^-}f(t)=-\infty,\ \lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=+\infty$ và $f\left(2\right)=4,\ f\left(3\right)=\dfrac{13}{3}$.

t	$-\infty$	-1		0		2		3	$+\infty$
$f'\left(t\right)$	//////		$-$	‖	$-$	0	$+$		//////
$f\left(t\right)$	//////	-5	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$	//////

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\in\left(-\infty;-5\right)\cup\left[4;+\infty\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

BT 493. Tìm tham số m để: $3x^2+2x+3=m(x+1)\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm ?

Lời giải. Ta có: $\left(*\right)\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)=m\left(x+1\right)\sqrt{x^2+1}\ \left(1\right)$.

Do $x=-1$ không là nghiệm của $\left(1\right)$ nên: $\left(1\right)\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+2.\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=m\qquad\left(2\right)$

- Đặt: $t=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow t'=\dfrac{1-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=0\Rightarrow x=1$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$		$+$	0	$-$	
t	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị $t \in \left(-1;\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$.

$(2) \Leftrightarrow m = t + \frac{2}{t}$, (3). Để (2) có nghiệm $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $\forall t \in \left(-1;\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$.

- Xét hàm số $f(t) = t + \frac{2}{t}$ trên $(-1;\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ có $f'(t) = \frac{t^2 - 2}{t^2} \le 0,\ \forall t \in \left(-1;\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$.
- Ta có: $\lim\limits_{t \to -1^-} f(t) = -3,\ \lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = -\infty,\ \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$ và bảng biến thiên là

t	$-\infty$	-1		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	//////		$-$	‖	$-$		//////
$f(t)$	//////	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	//////

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m < -3 \vee m \ge 2\sqrt{2}$.

BT 494. Tìm tham số m để phương trình: $10x^2 + 8x + 4 = m(2x+1)\sqrt{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow m(2x+1)\sqrt{x^2+1} = 2(2x+1)^2 + 2(x^2+1) \qquad (1)$

Do $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm nên $(1) \Leftrightarrow m = 2.\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 2.\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1} \qquad (2)$

- Đặt: $t = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow t' = \frac{2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \Rightarrow x = 2$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \pm 2$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
t'		$+$		$+$	0	$-$	
t	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ tập giá trị $t \in \left(-2;\sqrt{5}\right] \setminus \{0\}$. Khi đó: $(2) \Leftrightarrow m = 2t + \frac{2}{t},\ (3)$

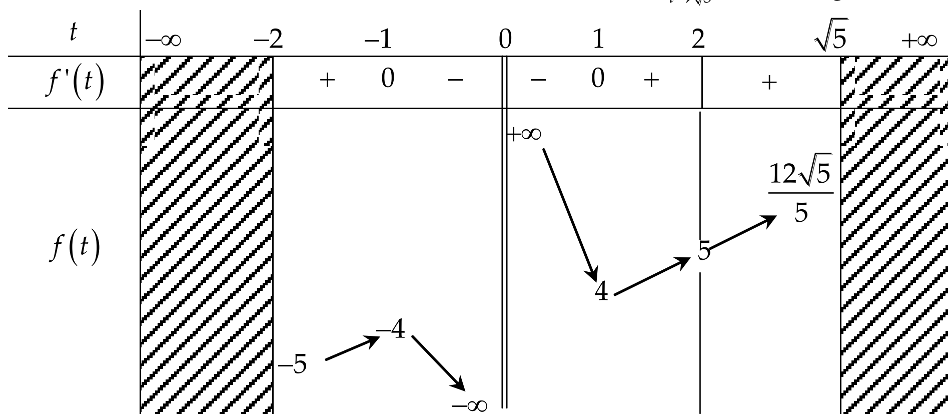
- Dựa vào bảng biến thiên, ta lại có:

Ứng với $t = \sqrt{5}$ thì phương trình $t = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ cho một nghiệm x.

Ứng với mỗi $t \in (-2;2)$ thì phương trình $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ cho một nghiệm x.

Ứng với mỗi $t \in \left[2;\sqrt{5}\right)$ thì phương trình $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ cho hai nghiệm x.

- Xét hàm số $f(t) = 2t + \dfrac{2}{t} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{2t^2-2}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.
- Ta có: $\lim\limits_{t\to 2^+} f(t) = -5,\ \lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = -\infty,\ \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = +\infty,\ \lim\limits_{t\to \sqrt{5}^-} f(t) = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.



- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \in (-5;-4) \cup (4;5)$ v $\left\{ \dfrac{12\sqrt{5}}{5} \right\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

BT 495. Tìm m để: $(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0$ có nghiệm ?

Lời giải. Điều kiện: $-3 \le x \le 1$. Đặt: $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2\sin\alpha \\ \sqrt{1-x} = 2\cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$(*) \Leftrightarrow 2(4m-3)\sin\alpha + 2(3m-4)\cos\alpha + m - 1 = 0\ (1)$

- Đặt: $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$, *do* $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0;1] \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2};\ \cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

$(1) \Leftrightarrow (4m-3)\dfrac{4t}{1+t^2} + (3m-4)\dfrac{2-2t^2}{1+t^2} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}$.

- Xét hàm số $f(t) = \dfrac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}$ trên $[0;1]$ có: $f'(t) = \dfrac{-52t^2-8t-60}{\left(5t^2-16t-7\right)^2} < 0$.

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến $[0;1] \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} g(t) = g(1) = \dfrac{7}{9}$ và $\max\limits_{[0;1]} g(t) = g(0) = \dfrac{9}{7}$.

- Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[0;1]} g(t) \le m \le \max\limits_{[0;1]} g(t) \Leftrightarrow \dfrac{7}{9} \le m \le \dfrac{9}{7}$.

BT 496. Tìm tham số m để: $m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right)=2\sqrt{x^2-x^4}+|x|+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm thực ?

Lời giải. Điều kiện: $|x|\le 1$. Đặt: $t=|x|+\sqrt{1-x^2}$ nên $t\in\left[1;\sqrt{2}\right]$. Khi đó:

$\Rightarrow t^2=1+2|x|\sqrt{1-x^2}=1+2\sqrt{x^2-x^4}$ nên $(*)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$.

- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$ có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0,\ \forall t\in\left[1;\sqrt{2}\right]$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$ nên để phương trình có nghiệm thì

$\min\limits_{\left[1;\sqrt{2}\right]} f(t)\le m\le \max\limits_{\left[1;\sqrt{2}\right]} f(t)\Leftrightarrow f(1)\le m\le f\left(\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\le m\le 2\sqrt{2}-1$.

BT 497. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}=m$ có nghiệm ?

Lời giải.

- Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt{m+x}\ge 0\\ v=\sqrt{m-x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2=m+x\\ v^2=m-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2+v^2=2m\\ u+v=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=m\\ uv=\dfrac{m^2-2m}{2}\end{cases}$.
- Do đó u,v là hai nghiệm của phương trình: $t^2-mt+\dfrac{m^2-2m}{2}=0\ (1)$
- Để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm không âm

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ge 0\\ S\ge 0\\ P\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2\left(m^2-2m\right)\ge 0\\ m\ge 0\\ m^2-2m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4m\ge 0\\ m\ge 0\\ m^2-2m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m\ge 2\end{array}\right.$.

BT 498. Tìm tham số m để: $\sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}=m$ có nghiệm duy nhất ?

Lời giải.

Điều kiện cần:

- Do $f(x)=\sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}=f(-x)$ nên nếu x_o là một nghiệm của $(*)$ thì $-x_o$ cũng là nghiệm của (*). Vì vậy để phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_o=-x_o\Leftrightarrow x_o=0$. Với $x_o=0$ thì $(*)\Leftrightarrow m=3$.

Điều kiện đủ:

- Với $m=3,$ thì $(*)\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}=3\ (1)$
- Đặt $t=\sqrt[6]{1-x^2},\ (0\le t\le 1)\Rightarrow\begin{cases}t^2=\sqrt[3]{1-x^2}\\ t^3=\sqrt{1-x^2}\end{cases}$ thì $(1)\Leftrightarrow t^3+2t^2-3=0$

$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow \sqrt[6]{1-x^2}=1\Leftrightarrow 1-x^2=1\Leftrightarrow x=0$: là nghiệm duy nhất.

- Vậy với $m=3$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

✍ **Lưu ý**: Ta có thể giải bằng phương pháp hàm số hoặc đặt $\begin{cases} u=\sqrt{1-x^2} \\ v=\sqrt[3]{1-x^2} \end{cases}$.

BT 499. Tìm tham số m để phương tình $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt ?

✍ ***Lời giải***.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-3\right)^2}=m\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-4}-1\right|+\left|\sqrt{x-4}-3\right|=m \quad (1)$

- Đặt: $t=\sqrt{x-4}\geq 0$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow |t-1|+|t-3|=m\ (2)$. Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực $\Leftrightarrow (2)$ có đúng hai nghiệm $t\in[0;+\infty)$.
- Xét hàm số $f(t)=|t-1|+|t-3|$ trên $[0;+\infty)$ có:

$$f(t)=\begin{cases} 4-2t\ \ khi: 0\leq t\leq 1 \\ 2\ \ khi: 1\leq t\leq 3 \\ 2t-4\ khi: t\geq 3 \end{cases} \Rightarrow f'(t)=\begin{cases} -2\ \ khi: 0\leq t\leq 1 \\ 0\ \ khi: 1\leq t\leq 3 \\ 2\ khi: t\geq 3 \end{cases}.$$

- Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(t)$	(gạch bỏ)	$-$	0	0 $+$	
$f(t)$	(gạch bỏ)	4 ↘	2 —	2 ↗	$+\infty$

- Để phương trình có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow m\in(2;4]$.

BT 500. Tìm m để: $(m-1)\cdot\sqrt{(x^2+2)^3}+(x+4)\cdot(11x^2-8x+8)=0$ có nghiệm ? có đúng 4 nghiệm thực phân biệt ?

✍ ***Lời giải***. Có: $(*)\Leftrightarrow (m-1)\sqrt{(x^2+2)^3}-(x+4)\left[(x+4)^2-12(x^2+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\sqrt{(x^2+2)^3}-(x+4)^3+12(x+4)(x^2+2)=0$

$\Leftrightarrow m-1-\left(\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}\right)^3+\dfrac{12(x+4)}{\sqrt{x^2+2}}=0\Leftrightarrow m=\left(\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}\right)^3-\dfrac{12(x+4)}{\sqrt{x^2+2}}+1,\ (*)$

- Đặt: $t=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}\Rightarrow t'=\dfrac{2-4x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}=\pm 1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
t'		+	0	−	
t	-1	↗	3	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên Þ tập giá trị của t là $t \in (-1;3]$.

$(1) \Leftrightarrow m = t^3 - 12t + 1,\ (2)$. Dựa vào bảng biến thiên, ta lại có:

Ứng với $t = 3$ thì phương trình: $t = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$ có đúng một nghiệm.

Ứng với $t \in (-1;1]$ thì phương trình: $t = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$ có đúng một nghiệm.

Ứng với $t \in (1;3)$ thì phương trình: $t = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$ có đúng hai nghiệm.

- Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t + 1$ có $f'(t) = 3t^2 - 12$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
- Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1		1		2		3	$+\infty$
$f'(t)$	//////		−		−	0	+		//////
$f(t)$	//////	12	↘	−10	↘	−15	↗	−8	//////

- Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \in (-15;-10)$ thỏa yêu cầu bài toán.

BT 501. Tìm m để: $(x^2+1)^2+m=x\sqrt{x^2+2}+4$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt ?

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow x^2.(x^2+2)-x\sqrt{x^2+2}=3-m,$ (1). Đặt: $t=x\sqrt{x^2+2}\Rightarrow t^2=x^2.(x^2+2).$

Ta có: $t'=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}>0$ nên t đồng biến với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow t^2-t=3-m,$ (2) và ứng với mỗi t thì $t=x\sqrt{x^2+2}$ cho một nghiệm x, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(t)=t^2-t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=2t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\cdot$

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $3-m>-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m<\dfrac{13}{4}\cdot$

BT 502. Tìm tham số m để: $\sqrt{x^4-4x^3+16x+m}+\sqrt[4]{x^4-4x^3+16x+m}=6$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

✍ ***Lời giải***. Đặt $t=\sqrt[4]{x^4-4x^3+16x+m}\ge 0.$

Phương trình đã cho tương đương với: $t^2+t-6=0\Leftrightarrow t=2.$

Suy ra: $\sqrt[4]{x^4-4x^3+16x+m}=2\Leftrightarrow m=-x^4+4x^3-16x+16$ (1)

Xét hàm số: $f(x)=-x^4+4x^3-16x+16$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=-4x^3+12x^2-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	27	↘	0	↘	$-\infty$

Kết luận: Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m\in(-\infty;27).$

BT 503. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy+x+y=3\\x^2+y^2+x+y=12\end{cases}$ (i) $(x,y\in\mathbb{R}).$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$, $(S^2\ge 4P).$

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} P+S=3 \\ S^2+S-2P=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=3-S \\ S^2+3S-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=3 \\ P=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S=-6 \\ P=9 \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-6 \\ xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\{(0;3);(3;0);(-3;-3)\}\cdot$

BT 504. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$ (i) $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy.(x+y)+(xy)^3=17 \\ (x+y)+xy=5 \end{cases}$ (ii). Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$, $(S^2 \ge 4P)$.

$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} S^3-3PS+P^3=17 \\ S+P=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ 18S^2-90S+108=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\{(1;2);(2;1)\}\cdot$

BT 505. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$ (i) $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $S=x+y,\ P=xy,\ (S^2\ge 4P)$.

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2-P=7 \\ (S^2-2P)^2-2P^2+P^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2=P+7 \\ P=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=\pm 3 \\ P=2 \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\{(1;2);(2;1);(-1;-3);(-3;-1)\}\cdot$

BT 506. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y)=3(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$ (i) $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $a=\sqrt[3]{x};\ b=\sqrt[3]{y}$. Khi đó:

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 2.(a^3+b^3)=3.(a^2b+ab^2) \\ a+b=6 \end{cases}$ (ii). Đặt $\begin{cases} S=a+b \\ P=ab \end{cases}$, $(S^2\ge 4P)$.

$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} 2S.(S^2-3P)=3SP \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 4 \\ \sqrt[3]{y} = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 8 \\ y = 64 \end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \{(8;64);(64;8)\}\cdot$

BT 507. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+xy} + 3\sqrt{xy} = 4\sqrt{3} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2} \end{cases}$ (i) $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0,\ y \geq 0.$

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+y)^2 - xy} + \sqrt{3xy} = 4\sqrt{3} \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 8 \end{cases}$ (ii). Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = \sqrt{xy} \end{cases}$ $(S \geq 0;\ P \geq 0;\ S^2 \geq 2P)\cdot$

$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{S^2 - P^2} + P.\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ S + 2P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 8 - 2P \\ \sqrt{(8-2P)^2 - P^2} = 4\sqrt{3} - P\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 8 - 2P \\ P \leq 4 \\ (8-2P)^2 - P^2 = 3.(4-P)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 8 - 2P \\ P \leq 4 \\ 8P = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ S = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \{(2;2)\}\cdot$

BT 508. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (5x-4y)(3x+2y) = 7y - 2x & (1) \\ (5y-4x)(3y+2x) = 7x - 2y & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow (x-y)\cdot(23x+23y+9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 23x + 23y + 9 = 0 \end{array}\right.$.

Với $x = y$, suy ra $(1) \Leftrightarrow 5x^2 = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$

Với $y = -\dfrac{9+23x}{23}$, suy ra $(1) \Leftrightarrow \left(5x + \dfrac{9+23x}{23}\right)\left(3x - 2\cdot\dfrac{9+23x}{23}\right) = 7\cdot\dfrac{9+23x}{23} - 2x$

$\Leftrightarrow (138x+9)\cdot(69x-18) = 63 + 115x$: vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \{(0;0);(1;1)\}\cdot$

BT 509. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (6x+4y)(x^2+y^2-1) = 5y(x^2+1) & (1) \\ (6y+4x)(x^2+y^2-1) = 5x(y^2+1) & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow (x-y)\cdot(2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3 = 0 \end{array}\right.$.

Xét các trường hợp và thế vào phương trình (1), từ đó tìm ra được tập nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \{(0;0);(-1;-1);(1;1)\}\cdot$

BT 510. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{7-y}=4 & (1) \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{7-x}=4 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -1 \le x \le 7 \\ -1 \le x \le 7 \end{cases}$.

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}=\sqrt{y+1}-\sqrt{7-y} \Leftrightarrow f(x)=f(y)$.

Do $x=-1;\ x=7;\ y=-1;\ y=-7$ không là nghiệm hệ nên xét $x,\ y \in (-1;7)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+1}-\sqrt{7-t}$ trên khoảng $(-1;7)$ có:

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{7-t}}>0,\ \forall t \in (-1;7)$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(-1;7)$.

Suy ra: $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(7-x)}=4 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm là $(x;y)=(3;3)$.

BT 511. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=2 & (1) \\ x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}=2 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Lấy $(1)-(2) \Rightarrow x\sqrt{1+y^2}-x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+x^2}-y\sqrt{1+y^2}=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\cdot(\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+y^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.$.

Với $y=x$, suy ra: $(1) \Leftrightarrow x\sqrt{1+x^2}=1 \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \Rightarrow y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Với $y=-x$, suy ra: $(1) \Leftrightarrow x\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{1+x^2}=2 \Leftrightarrow 0=2$: vô lý.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}};\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\right\}$.

BT 512. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=x-y^2 & (1) \\ y\sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}=y-x^2 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $(1-x^2)\cdot(1-y^2) \ge 0$.

Lấy $(1)-(2) \Leftrightarrow (x-y)\cdot\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-y^2)}=x-y+x^2-y^2$

$\Leftrightarrow (x-y)\cdot\left[\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-y^2)}-1-x-y\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ \sqrt{(1-x^2)\cdot(1-y^2)}=x+y+1 \end{array}\right.$.

Với $y=x$, thì $(1) \Leftrightarrow x\sqrt{(1-x^2)^2}=x-x^2 \Leftrightarrow x\left(\left|1-x^2\right|-1+x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$.

Với $\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-y^2)}=x+y+1,$ thì $(1)\Leftrightarrow x.(x+y+1)=x-y^2$

$$\Leftrightarrow x^2+xy+y^2=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\{(0;0);(1;1)\}$.

BT 513. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=3\\ 2y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=1\end{cases}\quad(i)\qquad(x,y\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0,\ y\neq 0.$

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}1+\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{2x}\\ 1-\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2y}\end{cases}\overset{+}{\underset{-}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}=2\\ \dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{2}{x^2+y^2}\end{cases}\overset{nhân}{\Rightarrow}\begin{cases}\dfrac{9}{4x^2}-\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{4}{x^2+y^2}\\ \dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9y^4-8x^2y^2-x^4=0\\ \dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y^2-x^2)\cdot(9y^2+x^2)=0\\ \dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=x^2\\ \dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm x\\ \dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(1;1);\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

BT 514. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+\dfrac{78y}{x^2+y^2}=20\\ y+\dfrac{78x}{x^2+y^2}=15\end{cases}\quad(*)\qquad(x,y\in\mathbb{R}).$

Lời giải. Điều kiện: $x^2+y^2\neq 0$. Đặt $z=x+iy,\ (x;y\in\mathbb{R}).$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{78y}{x^2+y^2}=20\\ yi+\dfrac{78xi}{x^2+y^2}=15i\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}x+\frac{78y}{x^2+y^2}+yi+\frac{78xi}{x^2+y^2}=20+15i$$

$$\Leftrightarrow(x+yi)+78\cdot\frac{xi+y}{x^2+y^2}=20+15i\Leftrightarrow z+78.\frac{i}{z}=20+15i$$

$$\Leftrightarrow z^2-(20+15i).z+78i=0\text{ có }\Delta=175-288i\Rightarrow\sqrt{|\Delta|}=16+9i.$$

Suy ra: $z = 18 + 12i$ hoặc $z = 2 + 3i$. Do đó: $(x;y) = (2;3),\ (18;12)$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \left\{(2;3),(18;12)\right\}\cdot$

Lưu ý: ta có thể giải như các bài trước bằng phương pháp cộng.

BT 515. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = x + 2xy & (1) \\ 2y^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = 2y - xy & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x \le 2$ và $y \ge 1$.

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow 2x^2 - 2y^2 = 3xy + x - 2y \Leftrightarrow (x-2y)(2x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 1 - 2x \end{array}\right.$.

Với $x = 2y \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \ge 2 \\ x \le 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$: thử lại thấy không thỏa nên loại.

Với $y = 1 - 2x$ thì phương trình $(1) \Leftrightarrow 6x^2 - 3x - 34 + \sqrt{2-x} + \sqrt{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow 3.(x+2).(2x-5) - \dfrac{x+2}{\sqrt{2-x}+2} - \dfrac{2.(x+2)}{\sqrt{-2x}+2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 5.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \left\{(-2;5)\right\}\cdot$

BT 516. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 & (1) \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 18 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Nhân chéo 2 phương trình được: $2(x^2 - 2xy + 3y^2) = 2x^2 - 13xy + 15y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = y \end{array}\right.$.

Với $y = 0$, suy ra: $(1) \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Với $x = y$, suy ra: $(1) \Leftrightarrow 2x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \left\{(\pm 3;0);\left(\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\cdot$

BT 517. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - x(y-1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$ (i) $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình. Xét $x^2 + y^2 \ne 0$.

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 3y - x \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$ và nhân chéo 2 phương trình với nhau.

Suy ra: $(x-2y)\cdot(2x^2 - xy + y^2) = (3y - x)\cdot(x^2 + xy - 3y^2)$

Chia hai vế cho lượng x^2, và đặt $t = \dfrac{y}{x}$, được: $7t^3 - 3t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 1 \\ t = \dfrac{3}{7} \end{array}\right.$.

Suy ra mối liên hệ giữa $x,\ y$ và thay vào phương trình đầu tìm được nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm $S = (x;y) = \left\{(0;0);(1;1);(-1;1);\left(\dfrac{7}{43};\dfrac{3}{43}\right)\right\}$.

BT 518. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 & (1) \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Từ (1), suy ra: $y = \dfrac{x^2 + x}{2x - 1}$, (do $x = \dfrac{1}{2}$ thì (1) vô nghiệm).

Thế vào (2), khai triển và rút gọn, ta thu được: $4x^5 - 12x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(4x^2+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \{(0;0);(1;1);(2;2)\}$.

BT 519. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 49 = 0 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Do $x = 0$ không là nghiệm hệ nên từ (1), suy ra: $y^2 = \dfrac{-49 - x^3}{3x}$ (3)

$(2) \Leftrightarrow x^2 + 17x - \dfrac{49 + x^3}{3x} = 8y(1+x) \Leftrightarrow 2x^3 + 51x^2 - 49 = 24xy.(x+1)$

$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(2x^2 + 49x - 49) - 24xy.(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ 2x^2 + 49x - 49 - 24xy = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$ hoặc $y = \dfrac{2x^2 + 49x - 49}{24x}$ (4)

Thế (4) vào (3), suy ra: $\left(\dfrac{2x^2 + 49x - 49}{24x}\right)^2 = \dfrac{-49 - x^3}{3x}$. Khai triễn, rút gọn được:

$4x^4 + 4x^3 + 45x^2 + 94x + 49 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (4x^2 - 4x + 49) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm là $S = (x;y) = \{(-1;4);(-1;-4)\}$.

BT 520. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2y + x = 2 & (1) \\ 2x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(2) \Rightarrow x^2 = \dfrac{y^2 + 2y + 2}{2}$, thế vào (1): $\dfrac{y^2 + 2y + 2}{2} + y^2 + 2y + (y+1)x = 2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3y^2+6y-2}{2\left(y+1\right)}$ (do $y=-1$ không là nghiệm). Thế vào $\left(2\right)$, khai triễn và rút gọn: $7y^4+28y^3+10y^2-36y=0 \Leftrightarrow y\left(y+2\right)\left(7y^2+14y-18\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\dfrac{-7+5\sqrt{7}}{7} \\ x=-\dfrac{4\sqrt{7}}{7} \end{cases} \vee \begin{cases} y=\dfrac{-7-5\sqrt{7}}{7} \\ x=\dfrac{4\sqrt{7}}{7} \end{cases}.$$

Kết luận: $S=(x;y)=\left\{(1;0);(-1;-2);\left(-\dfrac{4\sqrt{7}}{7};\dfrac{-7+5\sqrt{7}}{7}\right);\left(\dfrac{4\sqrt{7}}{7};\dfrac{-7-5\sqrt{7}}{7}\right)\right\}$.

BT 521. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y+3xy=4x^2+9y & (1) \\ 7y+6=2x^2+9x & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

➢ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \left(1\right)\Rightarrow y=\dfrac{4x^2}{2x^2+3x-9} \\ \left(2\right)\Rightarrow y=\dfrac{2x^2+9x-6}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{4x^2}{2x^2+3x-9}=\dfrac{2x^2+9x-6}{7}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2\right)\left(2x-1\right)\left(2x^2+9x-27\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\dfrac{16}{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{-9\pm3\sqrt{33}}{4} \\ y=3 \end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm là $S=(x;y)=\left\{\left(-2;-\dfrac{16}{7}\right);\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{7}\right);\left(\dfrac{-9\pm3\sqrt{33}}{4};3\right)\right\}$.

BT 522. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8(x^3-1)+6xy^2=y(12x^2+y^2) & (1) \\ (x^2+y-4x)(x^2+y^2-2x-5)=14 & (2) \end{cases}$

➢ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3=8 \Leftrightarrow \left(2x-y\right)^3=2^3 \Leftrightarrow 2x-y=2 \Rightarrow y=2x-2$

Thay vào $\left(2\right)\Rightarrow\left[\left(x^2-2x\right)-2\right].\left[5\left(x^2-2x\right)-1\right]=14$

$\Leftrightarrow 5\left(x^2-2x\right)^2-11\left(x^2-2x\right)-12=0 \Leftrightarrow x^2-2x=3 \vee x^2-2x=-\dfrac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{5} \\ y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{5} \\ y=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

BT 523. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 & (1) \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x-y-1}$

$\Leftrightarrow x = x - y + 2\sqrt{x-y-1} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x-y-1} \Leftrightarrow y^2 = 4(x-y-1)$

$\Leftrightarrow (y+2)^2 = 4x \Leftrightarrow y + 2 = 2\sqrt{x} \qquad (3)$

$(2) \Leftrightarrow \left(y + \sqrt{x}\right)^2 = y^2x \Leftrightarrow y + \sqrt{x} = y\sqrt{x} \qquad (4)$

$(3),(4) \Rightarrow \begin{cases} y + 2 = 2\sqrt{x} \\ y + \sqrt{x} = y\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{y+2}{2} \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0,25 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

So với điều kiện, nghiệm hệ là: $(x;y) = \{(0,25;-1);(4;2)\}$.

BT 524. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 & (1) \\ (x+y)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0$.

Chia hai vế của (1) cho được: $(1) \Leftrightarrow x + y = \dfrac{3}{x} - 1$.

$(2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{x} - 1\right)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

BT 525. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (1) \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \boxed{x^3 + y^3} \\ \qquad \downarrow \Rightarrow x^2y + 2xy^2 - y^3 - 2x^3 = 0 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2.1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 - \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 2.\left(\dfrac{x}{y}\right) + 1 = 0$ (do $y = 0$ thì hệ vô nghiệm)

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = 1 \vee \dfrac{x}{y} = -1 \vee \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3} \\ y = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases}$.

BT 526. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y(x^2-y^2)=3x \\ x(x^2+y^2)=10y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Nhân chéo hai vế: $20y^2\left(x^2-y^2\right)=3x^2\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow 3x^4+20y^4-17x^2y^2=0$

Với $y=0\Rightarrow x=0$. Với $y\neq 0$ ta được: $3\left(\dfrac{x}{y}\right)^4-17\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+20=0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2=4 \vee \left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{5}{3}\Leftrightarrow x^2=4y^2 \vee x^2=\frac{5}{3}y^2.$$

Với $x^2=4y^2\Rightarrow\begin{cases} 2y.3y^2=3x \\ x.5y^2=10y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2y^3=x \\ xy=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2y^4=2 \\ x=2y^3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{cases}$.

Với $x^2=\dfrac{5}{3}y^2\Rightarrow\begin{cases} 4y^3=9x \\ 4xy=15 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4y^3=9x \\ 16y^4=135 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\pm\dfrac{\sqrt[4]{135}}{2} \\ x=\pm\dfrac{15}{2\sqrt[4]{135}} \end{cases}$.

BT 527. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-2y^3=x+4y \\ 13x^2-41xy+21y^2=-9 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Nhân chéo hai vế, ta được: $-9\left(x^3-2y^3\right)=\left(x+4y\right)\left(13x^2-41xy+21y^2\right)$

$\Leftrightarrow 22x^3+11x^2y-143xy^2+66y^3=0$. Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên

$$\Leftrightarrow 22\left(\frac{x}{y}\right)^3+11\left(\frac{x}{y}\right)^2-143\left(\frac{x}{y}\right)+66=0\Leftrightarrow\frac{x}{y}=-3 \vee \frac{x}{y}=2 \vee \frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=-3y \\ 29y^3+y=0 \end{cases}\vee\begin{cases} x=2y \\ y^3-y=0 \end{cases}\vee\begin{cases} y=2x \\ 15x^3+9x=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}\vee\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

BT 528. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2y^2=xy+2y \\ 2x^3+3xy^2=2y^2+3x^2y \end{cases}$ (*) $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+2y^2-xy=2y \\ 2x^3+3xy^2-3x^2y=2y^2 \end{cases}$. Nhân chéo hai vế ta thu được:

$$2y^2\left(x^2+2y^2-xy\right)=2y\left(2x^3+3xy^2-3x^2y\right)\Leftrightarrow y\left(y-x\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}\vee\begin{cases} y=x \\ 2x^2=2x \end{cases}\vee\begin{cases} x^2-xy+y^2=0 \\ x^2-xy+2y^2=2y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}\vee\begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}.$$

BT 529. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - xy^2 + y^3 = 1 \\ 4x^4 - y^4 = 4x - y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Nhân chéo hai vế, ta được: $(4x - y)(x^3 - xy^2 + y^3) = 4x^4 - y^4$

$\Leftrightarrow -4x^2y^2 + 5xy^3 - x^3y = 0 \Leftrightarrow xy(4xy - 5y^2 + x^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \vee \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{149}} \\ y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{149}} \end{cases}.$$

BT 530. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(y^3 - x^3) = 7 \\ x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} xy^3 - x^4 = 7 \\ x^4 + x^3y - y^3x - x^2y^2 = 9x - 9y \end{cases}$ và nhân chéo vế theo vế sẽ đưa được về phương trình đẳng cấp bậc bốn và chia cho $x^4 \neq 0$.

BT 531. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0 & (1) \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow (y + x)(2y - x) = 0 \Leftrightarrow y = -x \vee x = 2y$.

Với $y = -x \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Với $x = 2y \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 + 13y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-13 \pm \sqrt{157}}{2} \\ x = -13 \pm \sqrt{157} \end{cases}$.

BT 532. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + x - y = 0 & (1) \\ x^2 - 3y + 4y^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow (x - y)(x - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee x = 2y - 1$.

Với $x = y$, thì $(2) \Rightarrow 5x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$.

Với $x = 2y - 1$, thì $(2) \Rightarrow 8y^2 - 7y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ hoặc $y = \dfrac{7}{8} \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$.

BT 533. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3+2x^2y-xy=y^2-x-y & (1) \\ 2x^3-xy+x^2=4 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(2)\Leftrightarrow(x+y)(2x^2-y+1)=0\Leftrightarrow y=-x \vee y=2x^2+1$

Với $y=-x\Rightarrow\begin{cases} y=-x \\ 2x^3+2x^2-4=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

Với $y=2x^2+1\Rightarrow\begin{cases} y=2x^2+1 \\ x^2-x-4=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \\ y=10+\sqrt{17} \end{cases}\vee\begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ y=10-\sqrt{17} \end{cases}$.

BT 534. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-2y^2+xy+x-y=0 & (1) \\ x^3-y^3+2x^2y+y^2=-1 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow(x-y)(x+2y+1)=0\Leftrightarrow x=y \vee x=-2y-1$.

Với $x=y\Rightarrow\begin{cases} x=y \\ 2y^3+y^2+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$.

Với $x=-2y-1\Rightarrow\begin{cases} x=-2y-1 \\ -3y^2-4y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}\vee\begin{cases} y=-\dfrac{4}{3} \\ x=\dfrac{5}{3} \end{cases}$.

BT 535. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+4xy+y^2+2x+y=2 & (1) \\ 8\sqrt{1-2x}+y^2-9=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\le\dfrac{1}{2}$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow(2x+y)^2+(2x+y)-2=0$

$\Leftrightarrow(2x+y-1)(2x+y+2)=0\Leftrightarrow y=1-2x\ge 0 \vee 1-2x=y+3\ge 0$.

Với: $y=1-2x,$ thì $(2)\Rightarrow 8\sqrt{y}=9-y^2\Leftrightarrow\begin{cases} 0\le y\le 3 \\ y^4-18y^2+17=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$.

Với $1-2x=y+3,$ thì $(2)\Rightarrow 8\sqrt{y+3}+(y-3)(y+3)=0$

$\Leftrightarrow y=-3\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $8+(y-3)\sqrt{y+3}=0$ (3)

Đặt: $t=\sqrt{y+3}\ge 0$ thì $(3)\Leftrightarrow 8+(t^2-6)t=0\Leftrightarrow t^3-6t+8=0$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-6t+8$ có $f'(t)=3t^2-6=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$

Hàm số $f(t)$ đạt cực đại tại $(-\sqrt{2};8+4\sqrt{2})$ và đạt cực tiểu tại $(\sqrt{2};8-4\sqrt{2})$.

Vì $f(0)=8>0$ và $8-4\sqrt{2}>0$ nên $f(t)=0$ không có nghiệm khi $t\geq 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm: $(x;y)=\left\{(0;1),\left(\frac{1}{2};-3\right)\right\}$.

BT 536. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2y-4x^2+4y^3+16xy=16y^2 & (1) \\ \sqrt{x-2y}+\sqrt{x+y}=2\sqrt{3} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$ thì $(1)\Leftrightarrow (x-2y)^2(x+y-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ y=4-x \end{array}\right.$

Với $x=2y$ thì $(2)\Rightarrow \sqrt{3y}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow y=4\Rightarrow x=8$.

Với $y=4-x$ thì $(2)\Rightarrow \sqrt{3x-8}+2=2\sqrt{3}\Leftrightarrow x=8-\frac{8\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\frac{8\sqrt{3}}{3}-4$.

BT 537. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2-8xy^2-xy+4y^3=0 & (1) \\ 16x^3+2x-8y^2+5=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow (x-4y^2)(2x-y)=0\Leftrightarrow x=4y^2 \vee y=2x$.

Với $x=4y^2\Rightarrow \begin{cases} x=4y^2 \\ 1024y^6+5=0 \end{cases}$: vô nghiệm.

Với $y=2x\Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 16x^3-32x^2+2x+5=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{19}}{4} \\ y=\frac{3\pm\sqrt{19}}{2} \end{cases}$.

BT 538. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=5x-y-2 & (1) \\ x^2+y^2+x+y=4 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow (x+y-2)(2x-y-1)=0\Leftrightarrow y=2-x \vee y=2x-1$.

Với $y=2-x$, thế vào $(2)\Rightarrow 2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$.

Với $y=2x-1$, thế vào $(2)\Rightarrow 5x^2-x-4=0\Rightarrow x=-\frac{4}{5}\Rightarrow y=-\frac{13}{5}$.

BT 539. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2+x+3y=xy+3 \\ 2y^2-3xy-9x^2+3x=y \end{cases}$ $(*)$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2+1-y)=0 \\ (y-3x)(2y+3x-1)=0 \end{cases}\Rightarrow (x;y)=\left\{(3;-4),(3;9),(-1;2),\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)\right\}$.

BT 540. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+5x-xy=3y-6 & (1) \\ 4x^2y-3xy+2y^2=9 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow(x+3)(x+2-y)=0\Rightarrow(x;y)=\left\{\left(-3;\dfrac{-45\pm3\sqrt{233}}{4}\right),(-1;1),\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right)\right\}$.

BT 541. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2y^2+y=x^2y+2xy+x & (1) \\ 5\sqrt{x^2-2y-2}+\sqrt[3]{y^2-2x-4}=4 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x^2-2y-2\ge0\Leftrightarrow x\le1-\sqrt{3}\ \vee\ x\ge1+\sqrt{3}$.

$(1)\Leftrightarrow(x-y)(x^2-2y-1)=0\Leftrightarrow x=y\ \ \left(do: x^2-2y-1=(x^2-2y-2)+1>1>0\right)$

$(2)\Rightarrow5\sqrt{x^2-2x-2}+\sqrt[3]{x^2-2x-4}=4$.

Xét hàm số $f(x)=5\sqrt{x^2-2x-2}+\sqrt[3]{x^2-2x-4}$ trên $\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$

Có: $f'(x)=(2x-2)\left[\dfrac{5}{2\sqrt{x^2-2x-2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-2x-4)^2}}\right]=0\Leftrightarrow x=1$ (loại).

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		//////		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		//////		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x)=4$ có nhiều nhất hai nghiệm trên $\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$.

Mà $f(x)=4=f(-1)=f(3)\Leftrightarrow x=-1=y$ và $x=3=y$.

BT 542. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}+x+y=5 & (1) \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\le5;\ y\le1;\ xy-y\ge0$.

$(1)\Leftrightarrow y+2\sqrt{y(x-1)}+(x-1)=4$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}+\sqrt{x-1}\right)^2=2^2\Leftrightarrow\underbrace{\left(\sqrt{y}+\sqrt{x-1}+2\right)}_{>0}\left(\sqrt{y}+\sqrt{x-1}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{y}+\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2-\sqrt{y}\Leftrightarrow x=5-4\sqrt{y}+y \qquad (3)$

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{5-x}=1-\sqrt{1-y}\Leftrightarrow x=3+2\sqrt{1-y}+y \qquad (4)$

$(3),(4) \Rightarrow \sqrt{1-y} = 1 - 2\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{1-y} + 2\sqrt{y} = 1 \Leftrightarrow 4\sqrt{y-y^2} = -3y$

$\Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 5$ (thỏa điều kiện).

BT 543. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy & (1) \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x^2 - 2y \geq 1$ thì $(1) \Leftrightarrow (x-y)(x^2 - 2y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Với $x = y$ thì $\Leftrightarrow \sqrt[3]{14 - x^3} = 2\sqrt{x^2 - 2x - 1} + 2 - x \qquad (3)$

Đặt: $\begin{cases} u = 2 - x \\ v = \sqrt{x^2 - 2x - 1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u^3 - 6v^2 = 14 - x^3$.

$(3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{u^3 - 6v^2} = 2v + u \Leftrightarrow 8v^3 + 12v^2u + 6vu^2 + 6v^2 = 0$

$\Leftrightarrow v\left(8v^2 + 12uv + 6u^2 + 6v\right) = 0 \Leftrightarrow v\left[\left(v\sqrt{6} + u\sqrt{6}\right)^2 + 2v^2 + 6v\right] = 0$

$\Leftrightarrow v = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1 \pm \sqrt{2}$.

BT 544. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (y-1)\sqrt{x+y} + (x+y-1)\sqrt{y} + x = 0 & (1) \\ 8x^3 - 4y + \sqrt{3(x-y)+4} = 1 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $y \geq 0,\ x + y \geq 0,\ 3.(x-y) + 4 \geq 0.$

$(1) \Leftrightarrow (y-1)\sqrt{x+y} + (x+y-1)\cdot(\sqrt{y} - 1) + (y-1) = 0$

$\Leftrightarrow (y-1).\sqrt{x+y} + \dfrac{(x+y-1)\cdot(y-1)}{\sqrt{y}+1} + (y-1) = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)\left(\sqrt{x+y} - 1 + \dfrac{x+y-1}{\sqrt{y}+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(x+y-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{y}+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 1 - x \end{array}\right.$. Suy ra: $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

BT 545. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + y(x-1)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} & (1) \\ (\sqrt{x+2} + \sqrt{2y - x + 6})(\sqrt{2y-1} - 3) = 4 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0,\ y \geq \dfrac{1}{2},\ x + y.(x-1) \geq 0,\ 2y - x + 6 \geq 0.$

$(1) \Leftrightarrow \left[\sqrt{x + y.(x-1)} - y\right] + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x + xy - y - y^2}{\sqrt{x + y.(x-1)} + y} + \dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)\cdot\left[\frac{1+y}{\sqrt{x+y.(x-1)+y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Do lượng $\dfrac{1+y}{\sqrt{x+y.(x-1)+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0,\ \forall x\ge 0,\ y\ge \dfrac{1}{2}\cdot$

$(1)\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})\cdot(\sqrt{2x-1}-3)=4$ (3)

Từ (3), suy ra: $\sqrt{2x-1}-3>0 \Leftrightarrow x>5.$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}>0$ trên (5; +∞) có

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}>0\,\forall x>5.$$

Do đó hàm số $f(x)$ là hàm số dương và đồng biến trên (5; +∞).

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{2x-1}-3>0\forall x\in(5;+\infty)$ có $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}>0,\ \forall x>5$.

Do đó hàm số $g(x)$ là hàm số dương và đồng biến trên (5; +∞).

Suy ra hàm số $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ là hàm số đồng biến.

Do đó phương trình (3) sẽ có nghiệm duy nhất và $h(7)=6$, suy ra: $x=y=7$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(7;7)\}\cdot$

BT 546. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{xy}=3y & (1)\\ \sqrt{y-1}+\sqrt{x-1}+x+y=6 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1,\ y\ge 1$.

$$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{x^2+xy+2y^2}-2y)+\sqrt{xy}-y=0\Leftrightarrow\frac{x^2+xy-2y^2}{\sqrt{x^2+xy+2y^2}+2y}+\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(x+2y)}{\sqrt{x^2+xy+2y^2}+2y}+\frac{x.(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0\Leftrightarrow x=y.$$

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=3-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x^2-7x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\{(2;2)\}\cdot$

BT 547. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}=x+1 & (1)\\ 4\sqrt{2x+1}+x-2y+2=0 & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2}\cdot$

$(2)\Leftrightarrow 4.\sqrt{2x+1}+3x+2=2.(x+y)$ và $3x+2>0,\ \forall x\ge -\dfrac{1}{2}\Rightarrow 4\sqrt{2x+1}+3x+2>0$

nên để hệ có nghiệm thì cần thêm điều kiện kéo theo là $x+y>0$.

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}\right)+\left[\sqrt{x^2+3x-y}-(x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2-x-y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{x-y-1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)\cdot(x+y)-(x+y)}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{x-y-1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+y)\cdot(x-y-1)}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{x-y-1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y-1)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}\right)=0\Leftrightarrow y=x-1.$$

Do có: $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+3x-y}+\sqrt{4x+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x-y}+x+1}>0,\ \forall x\ge-\dfrac{1}{2},\ x+y>0.$

$$(2)\Leftrightarrow 4\sqrt{2x+1}=x-4\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge4\\16.(2x+1)=(x-4)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=40\Rightarrow y=39.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(40;39)\}\cdot$

BT 548. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+\sqrt{x+y-1}=y^3+\sqrt{2y-1} & (1)\\x^3-y^3+5=xy+\sqrt{x-1} & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge1,\ y\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(1)\Leftrightarrow(x^3-y^3)+\left(\sqrt{x+y-1}-\sqrt{2y-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)+\frac{x-y}{\sqrt{x+y-1}+\sqrt{2y-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\cdot\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+\frac{1}{\sqrt{x+y-1}+\sqrt{2y-1}}\right]=0\Leftrightarrow x=y.$$

Do lượng: $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{x+y-1}+\sqrt{2y-1}}>0,\ \forall x\ge1,\ y\ge\dfrac{1}{2}\cdot$

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+x^2-5\Leftrightarrow(\sqrt{x-1}-1)+x^2-4=0\Leftrightarrow\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+2\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\cdot\ \text{Do}\ \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+2>0,\ \forall x\ge1.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(2;2)\}\cdot$

BT 549. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{y^4+1}=y & (1) \\ x^2+2x(y+1)+y^2-2y+1=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1$. Khi đó: $(2)\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+2x-2y+1=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2+2(x+y)+1=4y \Leftrightarrow (x+y+1)^2=4y,$ (3) và suy ra: $y\ge 0.$

$(1)\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-\sqrt{y^4+1})+(\sqrt[4]{x+1}-y)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y^4+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^4+1}}+\frac{x-y^4+1}{(\sqrt[4]{x+1}+y)\cdot(\sqrt{x+1}+y^2)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y^4+1)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y^4+1}}+\frac{1}{(\sqrt[4]{x+1}+y)\cdot(\sqrt{x+1}+y^2)}\right]=0$$

$\Leftrightarrow x-y^4+1=0\Leftrightarrow x=y^4-1.$

$(3)\Leftrightarrow (y^4+y)^2=4y\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\Rightarrow x=-1 \\ y^7+2y^4+y-4=0 \quad (4) \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(y)=y^7+2y^4+y-4$ trên $[0;+\infty]$ có $f'(y)=7y^4+8y^3+1>0,\ \forall y\ge 0.$

Suy ra $f(y)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ và có $f(y)=f(1)=0\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=0.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(-1;0);(0;1)\right\}\cdot$

BT 550. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1)=8x^2y^3 & (1) \\ x^2y-x+2=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)4y^2=8x^2y^3(\sqrt{4y^2+1}-1)$ (do $y=0$ không là nghiệm)

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-3x^2y+2=2x^2y.(\sqrt{4y^2+1}-1)$. Thế $2=x-x^2y$ vào, được:

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-4x^2y+x=2x^2y(\sqrt{4y^2+1}-1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=2x^2y(\sqrt{4y^2+1}+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}=2y\sqrt{4y^2+1}+2y\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(2y\right).$$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{t^2+1}+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f\left(2y\right)\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=2y\Rightarrow y=\dfrac{1}{2x}\cdot$

$(2)\Leftrightarrow \dfrac{x}{2}-x+2=0\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=\dfrac{1}{8}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{\left(4;\dfrac{1}{8}\right)\right\}\cdot$

BT 551. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y)+\sqrt{x+y}=\sqrt{2y}(\sqrt{2y^3}+1) & (1) \\ x^2y-5x^2+7(x+y)-4=6\sqrt[3]{xy-x+1} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} y \ge 0 \\ x+y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x+2y \ge 0$.

$(1) \Leftrightarrow x^2+xy-2y^2=\sqrt{2y}-\sqrt{x+y}$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=\dfrac{y-x}{\sqrt{2y}+\sqrt{x+y}} \Leftrightarrow (x-y)\cdot\left(x+2y+\dfrac{1}{\sqrt{2y}+\sqrt{x+y}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=y$ và thay vào $(2) \Rightarrow x^3-5x^2+14x-4=6\sqrt[3]{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+6x+4=8x^2-8x+8+3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=\left(\sqrt[3]{8x^2-8x+8}\right)^3+3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$

$\Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\sqrt[3]{8x^2-8x+8}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$: đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{8x^2-8x+8} \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$ (thỏa mãn điều kiện).

BT 552. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}=3x+\sqrt{7x^2+7}+2 & (1) \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $3y^2-2y+3x^2+6 \ge 0$.

$(1) \Leftrightarrow (y-3x-2)+\dfrac{3y^2-4x^2-2y-1}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}=0$

$\Leftrightarrow (y-3x-2)+\dfrac{(3y^2-4x^2-3y+3x+1)+(y-3x-2)}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}=0$

$\Leftrightarrow (y-3x-2)+\dfrac{(y-3x-2)}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}=0$

Do từ (2) có: $3y^2-4x^2-3y+3x+1=0$

$\Leftrightarrow (y-3x-2)\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}\right)=0 \Leftrightarrow y=3x+2.$

$(2) \Leftrightarrow 23x^2+30x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=-\dfrac{7}{23} \Rightarrow y=\dfrac{25}{23} \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(-1;-1);\left(-\dfrac{7}{23};\dfrac{25}{23}\right)\right\}$.

BT 553. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y+2)\sqrt{x+1}=\sqrt{y} & (1)\\ (4-\sqrt{1-x})\sqrt{x+1}=3y-2+2\sqrt{1-x} & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$ và $y\ge 0$.

Do $x=-1$ không thỏa mãn hệ nên xét trong điều kiện: $-1<x\le 1$ và $y\ge 0$.

$$(1)\Leftrightarrow (x-y+2)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=\sqrt{y}-\sqrt{x+1}\Leftrightarrow (x-y+1)\sqrt{x+1}=\frac{y-x-1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+1}}\right)=0\Leftrightarrow y=x+1.$$

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\cdot(4-\sqrt{1-x})=3x+1+2\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{1+x}-\sqrt{(1-x)(1+x)}-2\sqrt{1-x}=3x+1=2(1+x)-(1-x) \qquad (3)$$

Đặt $a=\sqrt{1+x}>0$ và $b=\sqrt{1-x}\ge 0$ thì $(3)\Leftrightarrow 4a-ab-2b=2a^2-b^2$

$$\Leftrightarrow 2a^2-(4-b)\cdot a-b^2+2b=0\Leftrightarrow (2a-b)\cdot(a+b-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=2a\\ a+b=2\end{array}\right..$$

Với $b=2a,$ suy ra: $\sqrt{1-x}=2\sqrt{1+x}\Leftrightarrow 1-x=4.(1+x)\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow y=\dfrac{2}{5}\cdot$

Với $a+b=2,$ suy ra: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ $S=(x;y)=\left\{(0;1);\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{2}{5}\right)\right\}\cdot$

BT 554. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x+y}+x+3y=6+(x+y-4)\sqrt{y} & (1)\\ \sqrt{x-2y}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{x-y-7} & (2)\end{cases}$

Lời giải. $x\ge 2y\ge 0$ và $x-y-7\ne 0.$

$$(1)\Leftrightarrow (1-y)\cdot(\sqrt{x+y}-2)+(x+y-4)\cdot(1-\sqrt{y})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-y)\cdot(x+y-4)}{\sqrt{x+y}+2}+\frac{(x+y-4)\cdot(1-y)}{1+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)\cdot(x+y-4)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{y}}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\ x+y-4=0\end{array}\right..$$

Với $y=1,$ suy ra: $(2)\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{x-8}\Leftrightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}}=\dfrac{5}{x-8}$

$$\Leftrightarrow 5(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1})=-3(x-8)\Leftrightarrow 5(\sqrt{x-2}-1)+5(\sqrt{x+1}-2)+3(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+1}+2}+3\right)=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Với $y=4-x$, suy ra: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}=0,\ \left(x\in\left[\dfrac{8}{3};+\infty\right)\backslash\left\{\dfrac{11}{2}\right\}\right)\cdot$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}$ trên $\left[\dfrac{8}{3};+\infty\right)\backslash\left\{\dfrac{11}{2}\right\}$ có:

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{10}{(2x-11)^2}=\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}}{2.\sqrt{(3x-8)(x+1)}}+\frac{10}{(2x-11)^2}$$

$$=\frac{6x+17}{2.\sqrt{(3x-8)(x+1)}.(\sqrt{9x+9}-\sqrt{3x-8})}>0,\ \forall x\in\left[\frac{8}{3};+\infty\right)\backslash\left\{\frac{11}{2}\right\}.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên các nửa khoảng $\left[\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{11}{2};+\infty\right)\cdot$

Mà ta có: $f(3)=f(8)=0,$ nên $\left[\begin{array}{l} x=3\Rightarrow y=1\\ x=8\Rightarrow y=-4\end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(3;1)\}\cdot$

BT 555. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}.\sqrt{x+xy+1}=y^2 & (1)\\ (x-1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x-y}+\sqrt{y-2}+4x=3y & (2)\end{cases}$

__Lời giải__. Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -1,\ x^2+x-y\ge 0\\ y\ge 2,\ x+xy+1>0\end{cases}\cdot$ Đặt $a=\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}.$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}-y=\frac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}}-y$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+y^2+xy)\cdot(x-y+1)}{a^2+ay+y^2}=\frac{y.(y+1)(y-x-1)}{\sqrt{x+xy+1}}\Leftrightarrow y=x+1.$$

$$(2)\Leftrightarrow (x-1).\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\cdot(\sqrt{x-1}-1)+(\sqrt{x-1}-1)+(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+x-2=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=3.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(2;3)\}\cdot$

BT 556. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5}-y & (1)\\ \sqrt{x^2+16(y-x)}+y=2\sqrt{xy} & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0,\ y \geq 5$.

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+16.(y-x)} - y = 2\cdot(\sqrt{xy}-y) \Leftrightarrow \frac{x^2+16.(y-x)-y^2}{\sqrt{x^2+16.(y-x)}+y} = \frac{2.(xy-y^2)}{\sqrt{xy}+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)\cdot(x+y)+16\cdot(y-x)}{\sqrt{x^2+16.(y-x)}+y} + \frac{2y\cdot(y-x)}{\sqrt{xy}+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)(16-x-y)}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+y} + \frac{2y(y-x)}{\sqrt{xy}+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\cdot\left[\frac{16-(x+y)}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+y} + \frac{2y}{\sqrt{xy}+y}\right] = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Do từ $(2) \Leftrightarrow x+y = 3\cdot(1\cdot\sqrt{x+3}+1\cdot\sqrt{y-5}) \overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} 3\cdot\sqrt{2\cdot(x+y-5)}$

$$\Leftrightarrow x+y \leq 3\cdot\sqrt{2\cdot(x+y-5)} \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 18\cdot(x+y-5)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 18\cdot(x+y)+40 \leq 0 \Leftrightarrow 9-\sqrt{41} \leq (x+y) \leq 9+\sqrt{41} < 16.$$

Suy ra: $16-(x+y) > 0$ nên $\dfrac{16-(x+y)}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+y} + \dfrac{2y}{\sqrt{xy}+y} > 0,\ \forall \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 5 \end{cases}$.

Với $y = x$, thì $(1) \Leftrightarrow 2x = 3(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}) \Leftrightarrow 4x^2 = 9(2x-2+2\sqrt{x^2-2x-15})$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x^2-2x-15} = 2x^2-9x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-9x+9 \geq 0 \\ 81(x^2-2x-15) = (2x^2-9x+9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm của hệ là $S = (x;y) = \{(6;6)\}$.

BT 557. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+3xy+2x+y=0 & (1) \\ x^2+2xy+2y^2+3x=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow x^2+(y-1)x+y-2y^2 = 0$ có $\Delta_x = (3y-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 1-2y \end{array}\right.$.

Với $y = x$ thì $(2) \Leftrightarrow 5x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \vee x = y = -\dfrac{3}{5}$.

Với $y = 1-2y$ thì $(2) \Leftrightarrow y^2-4y+2 = 0 \Leftrightarrow y = 2\mp\sqrt{2} \Rightarrow x = -3\pm 2\sqrt{2}$.

BT 558. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^4+y^2-3x^2+2y+xy+4=0 \\ x^2(3+2y^2)+(x-y)^2 = 9y^2+4y+6 \end{cases}$ $(*)$

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^4+y^2-3x^2+2y+xy+4=0 & (1) \\ x^2y^2+2x^2-4y^2-2y-xy-3=0 & (2) \end{cases}$

Lấy $(1)+(2)$ được: $2y^4+x^2y^2-3y^2-x^2+1=0$ có $\Delta_{y^2}=\left(x^2+1\right)^2$

$\Rightarrow y^2=1 \vee y^2=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right) \Leftrightarrow y=\pm 1 \vee y^2=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)$.

Với $y=1$ thì $(2)\Leftrightarrow 3x^2-x-9=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{109}}{6}$.

Với $y=-1$ thì $(2)\Leftrightarrow 3x^2+x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{6}$.

Với $y^2=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$. Lúc đó viết phương trình (2) dạng:

$(2)\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)y^2-(2+x)y+2x^2-3=0$ có: $\Delta_y=-8x^4+45x^2+4x-44$

$\Rightarrow \Delta_y=\left(-8x^4+24x^2-20\right)+20\left(x^2-1\right)+4(x-1)<0$, $\forall x\in[-1;1]$.

$\Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm khi $y^2=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)$.

<u>**BT 559.**</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 & (1) \\ x^2y+x^2+2y-22=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

<u>***Lời giải***</u>. Lấy $(1)+2.(2)$ được: $x^4+2x^2y+y^2-2x^2-2y-35=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y\right)^2-2\left(x^2+y\right)-35=0 \Leftrightarrow x^2+y=7 \vee x^2+y=-5$.

Với $y=7-x^2$ thì $(2)\Leftrightarrow x^4-6x^2+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=5 \end{cases}$.

Với $y=-x^2-5$ thì $(2)\Leftrightarrow x^4+6x^2+32=0$: vô nghiệm.

<u>**BT 560.**</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x^2y+3x=y^2(5y-7x) \\ (x+y)^3+x^2y=2y^3+x(y^2-6) \end{cases}$ $(*)$ $(x;y\in\mathbb{R})$

<u>***Lời giải***</u>. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x^2y+3x+7xy^2-5y^3=0 & (1) \\ x^3+4x^2y+2xy^2+6x-y^3=0 & (2) \end{cases}$

Lấy $2.(1)-(2)$ được: $x^3-6x^2y+12xy^2-9y^3=0 \Leftrightarrow (x-2y)^3=y^3$.

$\Leftrightarrow x=3y$. Thế vào $(1)\Leftrightarrow 34y^3+9y=0 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=0$.

<u>**BT 561.**</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=91 & (1) \\ 4x^2+3y^2=16x+9y & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Lấy $(1) - 3.(2)$ được: $x^3 + y^3 - 91 - 12x^2 - 9y^2 + 48x + 27y = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 27 - 27y + 9y^2 - y^3 \Leftrightarrow (x-4)^3 = (3-y)^3$

$\Leftrightarrow x = 7 - y$ và $(2) \Leftrightarrow 7y^2 - 49y + 84 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \Rightarrow x = 3 \\ y = 3 \Rightarrow x = 4 \end{array}\right.$.

BT 562. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - y^4 = 1215 & (1) \\ 2x^3 - 4y^3 = 9(x^2 - 4y^2) - 18(x - 8y) & (2) \end{cases}$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Lấy $(1) - 6.(2)$ được: $(x-3)^4 = (y-6)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = y - 6 \\ x - 3 = 6 - y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y - 9 \\ x = 9 - y \end{array}\right.$.

Thế vào (1) và giải ra tìm được nghiệm: $(x; y) = \{(6;3); (-6;-3)\}$.

BT 563. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 + 3x^2y = -28 & (1) \\ x^2 - 6xy + y^2 = 6x - 10y & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Lấy $(1) + 3.(2) \Rightarrow (y^3 + 3y^2 + 30y + 28) + (3x^2y + 3x^2) - 18xy - 18x = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)(y^2 + 2y + 28) + 3x^2(y+1) - 18x(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)(y^2 + 2y + 1 + 3x^2 - 18x + 27) = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)\left[(y+1)^2 + 3(x-3)^2\right] = 0 \Leftrightarrow y = -1 \Rightarrow x = \pm 3$.

BT 564. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 5xy^2 - 8 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 5xy - 5y^2 + x + 10y = 10 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Lấy $(1) + 2.(2)$ được: $(x^3 + 4x^2 + 2x - 28) + (5xy^2 - 10y^2) - 10xy + 20y$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 6x + 14) + 5y^2(x-2) - 10y(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 6x + 9 + 5y^2 - 10y + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+3)^2 + 5(y-1)^2\right] = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0$.

BT 565. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^2 = (x - y)(xy - 1) & (1) \\ x^3 - x^2 + y + 1 = xy(x - y + 1) & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Lấy $2.(2) - (1)$ được: $(x-1)\left[y^2 - (x+3)y + x^2 - x - 2\right] = 0$

Với $x=1,$ thế vào $(2)\Rightarrow$ vô nghiệm.

Với $y^2-(x+3)y+x^2-x-2=0$ kết hợp (1) được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2-(x+3)y+x^2-x-2=0 & (3) \\ x^3+y^2=(x-y)(xy-1) & (4) \end{cases}$$

Lấy $2.(4)-(1)$ được: $(2x+1)\left[y^2-(x-1)y+x^2-x+2\right]=0$

Với $x=-\dfrac{1}{2},$ thế vào $(1)\Rightarrow y=\dfrac{5\pm 3\sqrt{5}}{4}$.

Với $y^2-(x-1)y+x^2-x+2=0$ kết hợp (3) được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2-(x-1)y+x^2-x+2=0 \\ y^2-(x+3)y+x^2-x-2=0 \end{cases} \Rightarrow y=-1\Rightarrow x^2+2=0:$$ vô nghiệm.

BT 566. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+xy^2+x-5y=0 & (1) \\ 2xy+y^2-5y+1=0 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in \mathbb{R})$.

Lời giải. Lấy $x.(2)-(1)\Rightarrow y\left(x^2-5x+5\right)=0\Leftrightarrow y=0\ \vee\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

Với $y=0,$ thế vào $(2)\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Với $x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},$ thế vào $(2)\Leftrightarrow y^2-\sqrt{5}y+1=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Với $x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2},$ thế vào $(2)\Leftrightarrow y^2+\sqrt{5}y+1=0\Leftrightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

BT 567. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2y^2-6xy-3y^2=-9 & (1) \\ 6x^2y-y^2-9x=0 & (2) \end{cases}$ $(x,y\in \mathbb{R})$

Lời giải. Lấy $(1)+(2)$ ta được: $4x^2y^2-4y^2+6x^2y-6xy-9x+9=0$

$\Leftrightarrow 4y^2\left(x^2-1\right)+6xy(x-1)-9(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[4y^2(x+1)+6xy-9\right]=0\Leftrightarrow x=1\ \vee\ 4y^2(x+1)+6xy-9=0$.

Với $x=1,$ thì $(2)\Leftrightarrow -y^2+6y-9=0\Leftrightarrow x=3$.

Với $4y^2(x+1)+6xy-9=0$. Do $x=0$ không là nghiệm của hệ nên nhân hai vế cho $x\neq 0$ được: $4y^2x(x+1)+6x^2y-9x=0 \qquad (3)$

$(2)\Leftrightarrow 6x^2y-9x=y^2$ và kết hợp với (3) được: $4y^2x(x+1)+y^2=0$

$\Leftrightarrow y^2\left(4x^2+4x+1\right)=0\Leftrightarrow y^2(2x+1)^2=0\Leftrightarrow y=0\ \vee\ x=-\dfrac{1}{2}$.

Với $y=0$, thế vào $(1)\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Với $x=-\frac{1}{2}$, thê vào $(1)\Leftrightarrow -2y^2+3y+9=0\Leftrightarrow y=3 \vee y=-\frac{3}{2}$.

BT 568. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 9x^4+24y^3-xy^2+7y^2=16-x+24y & (1)\\ 8y^3+9y^2+20y-\sqrt[3]{6y+1}+15=x & (2)\end{cases}$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(1)\Rightarrow 9x^4+24y^3+7y^2-24y-16=x(y^2-1)\Leftrightarrow (y^2-1)(3y+4)^2=x(y^2-1)$

$\Leftrightarrow (y^2-1)\left[(3y+4)^2-x\right]=0\Leftrightarrow y=\pm 1 \vee x=(3y+4)^2$.

Với $y=1$, thế vào $(2)\Rightarrow x=52-\sqrt[3]{7}$. Với $y=-1$, thế vào $(2)\Rightarrow x=\sqrt[3]{5}-4$.

Với $x=(3y+4)^2$, thay vào $(2)\Rightarrow 8y^3-4y-\sqrt[3]{6y+1}-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6y+1}+\left(\sqrt[3]{6y+1}\right)^3=(2y)+(2y)^3 \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{6y+1}\right)=f(2y)$.

Xét hàm số $f(t)=t+t^3$ có $f'(t)=1+3t^2>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f\left(\sqrt[3]{6y+1}\right)=f(2y)\Leftrightarrow \sqrt[3]{6y+1}=2y\Leftrightarrow 4y^3-3y=\frac{1}{2} \qquad (3)$

Đặt $y=\cos u,\ u\in[0;\pi]$. Khi đó: $(3)\Leftrightarrow 4\cos^3 u-3\cos u=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 3u=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow u=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $u\in[0;\pi]\Rightarrow u=\frac{\pi}{9} \vee u=\frac{5\pi}{9} \vee u=\frac{7\pi}{9}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\cos\frac{\pi}{9}\\ y=\left(4+3\cos\frac{\pi}{9}\right)^2\end{cases} \vee \begin{cases} x=\cos\frac{5\pi}{9}\\ y=\left(4+3\cos\frac{5\pi}{9}\right)^2\end{cases} \vee \begin{cases} x=\cos\frac{7\pi}{9}\\ y=\left(4+3\cos\frac{7\pi}{9}\right)^2\end{cases}.$$

BT 569. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2 & (1)\\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2,\ y\le\frac{16}{3}$.

$(1)\Leftrightarrow x^3-y^3+3.(x-y)=3x^2+3y^2+2$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=y^3+3y^2+3y+1\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3\Leftrightarrow y=x-2.$

$$(2) \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+2}-\frac{x+4}{3}\right)+\left(\sqrt{22-3x}-\frac{14-x}{3}\right)=x^2-x-2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\frac{9\left(x+2\right)-x^2-8x-16}{9\left(\sqrt{x+2}+\frac{x+4}{3}\right)}\right]+\left[\frac{9\left(22-3x\right)-x^2+28x-196}{9\left(\sqrt{22-3x}+\frac{14-x}{3}\right)}\right]=x^2-x-2$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\cdot\left[1+\frac{4}{9\sqrt{x+2}+3.(x+4)}+\frac{1}{9\sqrt{22-3x}+3.(14-x)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(2;0),(-1;-3)\right\}$.

BT 570. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3y^2+1+2y(x+1)=4y\sqrt{x^2+2y+1} & (1) \\ y(y-x)=3-3y & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x^2+2y+1\ge 0$.

$$\left(1\right) \Leftrightarrow 4y^2-4y\sqrt{x^2+2y+1}+x^2+2y+1=x^2-2xy+y^2$$

$$\Leftrightarrow \left(2y-\sqrt{x^2+2y+1}\right)^2=\left(x-y\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2\mathrm{y}+1}=3y-x \\ \sqrt{x^2+2y+1}=x+y \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} \sqrt{x^2+2\mathrm{y}+1}=3y-x \\ y\left(y-x\right)=3-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-x\ge 0 \\ 6xy=9y^2-2y-1 \\ xy=y^2+3y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=1 \\ y=\frac{17}{3}\Rightarrow x=\frac{415}{51} \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} \sqrt{x^2+2y+1}=x+y \\ y\left(y-x\right)=3-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\ge 0 \\ 2xy=-y^2+2y+1 \\ xy=y^2+3y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=1 \\ y=-\frac{7}{3}\Rightarrow x=\frac{41}{21}\ \left(L\right) \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là: $S=(x;y)=\left\{(1;1),\left(\frac{415}{51};\frac{17}{3}\right)\right\}$.

BT 571. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+x^2y^2+xy^2=x^3y+x^2y+y^3 & (1) \\ \sqrt{x^2+y+1}+y=7 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x^2+y+1\ge 0,\ y\le 7$.

$$(1) \Leftrightarrow (x^2-y)\cdot(x^2+y^2-xy)=0 \Leftrightarrow (x^2-y)\cdot\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]=0 \Leftrightarrow y=x^2.$$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2y+1} = 7-y \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 7 \\ 2y+1 = 49-14y+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \{(2;4);(-2;4)\}\cdot$

BT 572. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2+(y^2-y-1)\sqrt{x^2+2}-y^3+y=0 & (1) \\ 2x+xy+2+(x+2)\sqrt{y^2+4x+4}=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $y^2+4x+4 \ge 0.$

$(1) \Leftrightarrow (x^2+2-y\sqrt{x^2+2}) + \left[(y^2-1)\sqrt{x^2+2} - y.(y^2-1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}\cdot(\sqrt{x^2+2}-y) + (y^2-1)\cdot(\sqrt{x^2+2}-y) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2}-y)(\sqrt{x^2+2}+y^2-1) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+2},\ (\text{do}: \sqrt{x^2+2}-1+y^2 > 0)$

$(2) \Leftrightarrow 2x + x\sqrt{x^2+2} + 2 + (x+2)\sqrt{x^2+4x+6} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)+(x+2)\cdot\sqrt{(x+2)^2+2} = (-x)+(-x)\cdot\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow f(x+2) = f(-x).$

Xét hàm số $f(t) = t + t.\sqrt{t^2+2}$ có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x+2) = f(-x) \Leftrightarrow x+2 = -x \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = \sqrt{3}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \{(-1;\sqrt{3})\}\cdot$

BT 573. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3+(4-x)y^2+4y-x^2-2x=0 & (1) \\ 3.(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{4(x-y+1)}) = (x+1)^2-8(y-1) & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 1.$

$(1) \Leftrightarrow x^2+(y^2+2)\cdot x - 2y^3-4y^2-4y = 0 \Leftrightarrow (x-2y)\cdot(x+y^2+2y+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y)\cdot\left[x+(y+1)^2+1\right] = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2},$ do có $x+(y+1)^2+1 \ge 0,\ \forall x \ge 1.$

$(2) \Leftrightarrow 3.(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}) = x^2-2x+9 \qquad (3)$

Ta có: $\begin{cases} \circ\ \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1).1} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{x}{2} \\ \circ\ \sqrt[3]{2x+4} = \dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{8\cdot 8\cdot(2x+4)} \overset{Cauchy}{\le} \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2x+20}{3} = \dfrac{x+10}{6} \end{cases}$

Cộng vế theo vế, suy ra: $3.(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}) \le \dfrac{3x}{2} + \dfrac{x+10}{2} = 2x+5 \qquad (4)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1=1 \\ 2x+4=8 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Ta lại có: $x^2-2x+9 \ge 2x+5 \Leftrightarrow (x-2)^2 \ge 0$: luôn đúng (5)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Từ (3), (4), (5), suy ra nghiệm phương trình (3) là $x=2 \Rightarrow y=1$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(2;1)\}\cdot$

BT 574. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+1=2x+2y & (1) \\ (2x-y).y=1+2y & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Từ $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow \begin{cases} -1\le x-1\le 1 \\ -1\le y-1\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}.$

Do $x=y=0$ không là nghiệm hệ nên xét $x;\ y\in(0;2]\cdot$

Lấy $(1)+(2)$, suy ra: $x^2+y^2+1+2xy-y^2=2x+2y+1+2y$

$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(2xy-4y)=0 \Leftrightarrow x.(x-2)+2y.(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2).(x+2y)=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=1,$ do $x+2y\ge 0$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(2;1)\}\cdot$

BT 575. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 & (1) \\ x(x-2y+2)=-1 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lấy $(1)+(2) \Rightarrow y^2-2(x+1)\cdot y+2x^2+2=0$ có biệt số: $\Delta'_y=-(x-1)^2\le 0.$

Để hệ có nghiệm thì $\Delta'_y=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1,$ thế vào $(2) \Rightarrow y=2.$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(1;2)\}\cdot$

BT 576. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+y^4-4xy^3=1 & (1) \\ 4x^2+2y^2-4xy=2 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

✍ ***Lời giải***. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lấy $(1)-(2)$, được: $y^4-2y^2-4xy^3+4xy+1=0 \Leftrightarrow (y^2-1)^2-4xy\cdot(y^2-1)=0$

$$\Leftrightarrow (y-1)\cdot(y+1)\cdot(y^2-1-4xy)=0 \Leftrightarrow y=1 \vee y=-1 \vee x=\frac{1-y^2}{4y}\cdot$$

Với $y=1,$ thế vào $(1) \Leftrightarrow 4x^2-4x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1.$

Với $y=-1,$ thế vào $(1) \Leftrightarrow 4x^2+4x=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=0.$

Với $x=\dfrac{1-y^2}{4y}$, thế vào (1) $\Leftrightarrow (1-y^2)\cdot(8y^4+5y^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\pm 1 \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{\sqrt{57}-5}}{4} \end{array}\right.$.

Kết luận: Tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(0;\pm 1);(\pm 1;\pm 1);\left(\dfrac{1-y^2}{4y};\pm\dfrac{\sqrt{\sqrt{57}-5}}{4}\right)\right\}$.

BT 577. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-y^4=240 & (1) \\ x^3-2y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) & (2) \end{cases}$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lấy $(1)-8\cdot(2) \Rightarrow x^4-8x^3+24x^2-32x+16=y^4-16y^3+96y^2-256y+256$

$\Leftrightarrow (x-2)^4=(y-4)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=y-4 \\ x-2=-y+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-2 \\ x=6-y \end{array}\right.$.

Với $x=y-2$, thế vào (1) $\Leftrightarrow x^3+3x^2+4x+32=0 \Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow y=-2.$

Với $x=6-y$, thế vào (1) $\Leftrightarrow x^3-9x^2+36x-64=0 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=2.$

Kết luận: Tập nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\{(-4;-2);(4;2)\}$.

BT 578. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 15+x^4=y^4 \\ -16x+12x^2-4x^3=2y+3y^2+2y^3 \end{cases}$ (i)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 15+x^4-y^4=0 & (1) \\ -16x+12x^2-4x^2-2y-3y^2-2y^3=0 & (2) \end{cases}$

Lấy $(1)+2\cdot(2)$, được: $15-32x+24x^2-8x^3+x^4=y^4+4y^3+5y^2+4y$

$\Leftrightarrow (x-2)^4=(y+1)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-3 \\ y=1-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=-1 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\{(1;-2);(-1;2)\}$.

BT 579. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3-3y^2=9 & (1) \\ x^2+y^2=x-4y & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Lấy $(1)-3\cdot(2) \Rightarrow x^3-y^3-3y^2-9-3\cdot(x^2+y^2-x+4y)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+2)^3 \Leftrightarrow x-1=y+2 \Leftrightarrow x=y+3.$

$$(2) \Leftrightarrow 2y^2+9y+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-9+\sqrt{33}}{4} \Rightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4} \\ y=\dfrac{-9-\sqrt{33}}{4} \Rightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4} \end{array}\right..$$

Kết luận: Tập nghiệm là $S=\left\{\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{4};\dfrac{-9+\sqrt{33}}{4}\right);\left(\dfrac{3-\sqrt{33}}{4};\dfrac{-9-\sqrt{33}}{4}\right)\right\}.$

BT 580. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-2y+\sqrt{2x+y+2xy+1}=1 & (1) \\ \sqrt[3]{3y+1}=8x^3-2y-1 & (2) \end{cases} \quad (x\ge 0)$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $2x+y+2xy+1\ge 0 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1)\ge 0.$

Do $x\ge 0$ nên $2x+1>0,$ suy ra: $y+1\ge 0.$

$$(1) \Leftrightarrow (2x+1)-2.(y+1)+\sqrt{(2x+1)\cdot(y+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}-\sqrt{y+1})\cdot(\sqrt{2x+1}+2\sqrt{y+1})=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=\sqrt{y+1} \Leftrightarrow y=2x.$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{6x+1})^3+\sqrt[3]{6x+1}=(2x)^3+(2x)$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{6x+1})=f(2x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1}=2x \Leftrightarrow 4x^3-3x=\frac{1}{2} \qquad (3)$$

Do $x>1$ không là nghiệm của (3) nên xét $x\in[0;1]\cdot$

Đặt $x=\cos t,\ t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\cdot$ Khi đó: $(3)\Leftrightarrow \cos 3t=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z})$

Do $x\in[0;1]$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên $t=\dfrac{\pi}{9}\cdot$ Suy ra: $x=\cos\dfrac{\pi}{9}\Rightarrow y=2\cos\dfrac{\pi}{9}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\cos\dfrac{\pi}{9};2\cos\dfrac{\pi}{9}\right)\right\}\cdot$

BT 581. Giải hệ: $\begin{cases} 6x^3-y^3+x^2y+2xy^2=0 & (1) \\ (x^2+y-3)\sqrt{x^2+y-8}+(x^2-y-5)\sqrt{y-x^2}=4-x^2 & (2) \end{cases}$

✍ ***Lời giải***. Điều kiện: $\begin{cases} y-x^2\ge 0 \\ x^2+y-8\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge x^2\ge 0 \\ y=8-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2} \end{cases}.$

$$(1) \Leftrightarrow (3x-y)\cdot(y^2+xy+2x^2)=0 \Leftrightarrow (3x-y)\cdot\left[\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{7x^2}{4}\right]=0$$

$\Leftrightarrow y=3x,$ do $x=y=0$ không phải là nghiệm hệ.

$$(2) \Leftrightarrow (x^2+3x-3)\cdot\sqrt{x^2+3x-8}-(-x^2+3x+5)\cdot\sqrt{-x^2+3x}=4-x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(x^2+3x-8)+5\right]\sqrt{x^2+3x-8}-\left[(-x^2+3x)+5\right]\sqrt{-x^2+3x}=4-x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{x^2+3x-8})^3+5.\sqrt{x^2+3x-8}\right]-\left[(\sqrt{-x^2+3x})^3+5.\sqrt{-x^2+3x}\right]=4-x^2$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{x^2+3x-8})-f(\sqrt{-x^2+3x})=4-x^2 \qquad (3)$$

Điều kiện là $\frac{\sqrt{41}-3}{2}\le x\le 3.$

Xét hàm số $f(t)=t^3+5t$ có $f'(t)=3t^2+5>0,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $\begin{cases}\sqrt{x^2+3x-8}>\sqrt{-x^2+3x}\Leftrightarrow x^2>4\Leftrightarrow 4-x^2<0\\ f(\sqrt{x^2+3x-8})>f(\sqrt{-x^2+3x})\Leftrightarrow f(\sqrt{x^2+3x-8})-f(\sqrt{-x^2+3x})>0\end{cases}$

Suy ra phương trình (3) vô nghiệm.

Nếu $\begin{cases}\sqrt{x^2+3x-8}<\sqrt{-x^2+3x}\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow 4-x^2>0\\ f(\sqrt{x^2+3x-8})<f(\sqrt{-x^2+3x})\Leftrightarrow f(\sqrt{x^2+3x-8})-f(\sqrt{-x^2+3x})<0\end{cases}$

Suy ra phương trình (3) vô nghiệm.

Do đó phương trình (3) chỉ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sqrt{x^2+3x-8}=\sqrt{-x^2+3x}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow y=6\\ x=-2 \qquad (L)\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(2;6)\right\}\cdot$

BT 582. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}}+1\right)=18\end{cases} \qquad (i)$

Lời giải. Điều kiện: $x\ne 0;\ y\ne 0$. Đặt $a=\frac{1}{\sqrt[3]{x}};b=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+b^3=9\\ (a+b)(a+1)(b+1)=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^3-3ab(a+b)=9\\ (a+b)(ab+a+b+1)=18\end{cases} \qquad (ii)$$

Đặt $\begin{cases}S=a+b\\ P=ab\end{cases},(S^2\ge 4P)$ thì $(ii)\Leftrightarrow\begin{cases}S^3-3SP=9\\ S(P+S+1)=18\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3SP=S^3-9\\ (S-3)(S^2+6S+21)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\ P=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{8} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$ (thỏa mãn điều kiện).

BT 583. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(3y-2) = -8 \\ x(y^3+2) = -6 \end{cases}$ (i) $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Do $x = 0$ không là nghiệm hệ. Với $x \neq 0$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2 = -\dfrac{8}{x^3} \\ y^3 + 2 = -\dfrac{6}{x} \end{cases}$ (ii)

Đặt $t = -\dfrac{2}{x}$ thì $(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2 = t^3 \\ y^3 + 2 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + 2 - 3y = 0 \\ y^3 + 2 - 3t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow t^3 - y^3 + 3(t - y) = 0 \Leftrightarrow (t - y)\left[\left(t + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 3\right] = 0 \Leftrightarrow t = y.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^3 - 3y + 2 = 0 \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$ là các nghiệm hệ.

BT 584. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{13}{2} \\ 3y^2x + x^3 = \dfrac{35}{2} \end{cases}$ (i) $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2) \\ a^3 + b^3 = 2(x^3 + 3y^2x) \end{cases}$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 13 \\ (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \dfrac{(a+b)^2 - 13}{2} \\ (a+b)^3 - 39(a+b) + 70 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -7 \\ ab = 18 \end{cases} (VN) \vee \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{2-\sqrt{22}}{2} \\ b=\dfrac{2+\sqrt{22}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{2+\sqrt{22}}{2} \\ b=\dfrac{2-\sqrt{22}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ x=-\dfrac{\sqrt{22}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{\sqrt{22}}{2} \end{cases}.$$

BT 585. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2(3x^2+2xy+3y^2-20)+1=0 \\ 2x^2-5x-2xy+5y=0 \end{cases}$ (i)

Lời giải. Ta có: $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2(3x^2+2xy+3y^2)+1=20(x-y)^2 & (1) \\ 2x(x-y)=5(x-y) & (2) \end{cases}$

Do $x=y$ không là nghiệm nên chia (1) cho $(x-y)^2$ và (2) cho $x-y$ thì hệ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x^2+y^2\right)+2xy+\dfrac{1}{\left(x-y\right)^2}=20 \\ 2x+\dfrac{1}{x-y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(x-y\right)^2+\dfrac{1}{\left(x-y\right)^2}\right]+2\left(x+y\right)^2=20 \\ \left(x-y+\dfrac{1}{x-y}\right)+x+y=5 \end{cases}$$

Đặt: $a=x-y+\dfrac{1}{x-y}$, $\left(|a|\ge 2\right)$; $b=x+y$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2=22 \\ a+b=5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{14}{3} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+\dfrac{1}{x-y}=2 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{14}{3} \\ x+y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y=\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3} \\ x+y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x-y=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3} \\ x+y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{4+\sqrt{10}}{3} \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{10}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{4-\sqrt{10}}{3} \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$ là các nghiệm.

BT 586. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4(x^2+xy+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=\dfrac{85}{3} \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{13}{3} \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\neq -y$ thì $(i)\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+(x-y)^2=\dfrac{85}{3} \\ \left[(x+y)+\dfrac{1}{x+y}\right]+(x-y)=\dfrac{13}{3} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=x+y+\dfrac{1}{x+y} \\ b=x-y,\ \left(|a|\geq 2\right) \end{cases}$ thì hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 9\left(a^2-2\right)+3b^2=85 \\ a+b=\dfrac{13}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(a^2-2\right)+b^2=\dfrac{85}{3} \\ a+b=\dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{13}{3}-a;\ |a|\geq 2 \\ 4a^2-\dfrac{26}{3}a-\dfrac{140}{9}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{10}{3} \\ b=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{10}{3} \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y \\ 3y^2-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}.$

BT 587. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{\left(x+y\right)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\neq -y$ thì $\left(i\right)\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+(x-y)^2=7 \\ \left(x+y\right)+\dfrac{1}{x+y}+\left(x-y\right)=3 \end{cases}$ (ii)

Đặt $\begin{cases} a=x+y+\dfrac{1}{x+y} \\ b=x-y;\left(|u|\geq 2\right) \end{cases}$ thì $\left(ii\right)\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(a^2-2\right)+b^2=7 \\ a+b=3;\ |a|\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a;|a|\geq 2 \\ 2a^2-3a-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ (thỏa điều kiện).

BT 588. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+6xy-\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{9}{8}=0 \\ 2y-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{5}{4}=0 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\neq y$ thì $(i)\Leftrightarrow\begin{cases} 16(x+y)^2-8\left(y-x+\dfrac{1}{y-x}\right)^2+25=0 \\ 4(x+y)+4\left(y-x+\dfrac{1}{y-x}\right)+5=0 \end{cases}$

Đặt: $a=x+y;\ b=y-x+\dfrac{1}{y-x},(|b|\geq 2)$ thì hệ $\Leftrightarrow\begin{cases} 16a^2-8b^2+25=0 \\ 4a+4b+5=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{5}{4} \\ b=-\dfrac{5}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y+x=\dfrac{5}{4} \\ y-x=-2 \end{cases}\vee\begin{cases} y+x=\dfrac{5}{4} \\ y-x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{13}{8} \\ y=-\dfrac{3}{8} \end{cases}\vee\begin{cases} x=\dfrac{7}{8} \\ y=\dfrac{3}{8} \end{cases}.$$

BT 589. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2y^2+3xy+3=0 \\ \dfrac{x-y+18}{(x+y)^2}=9\sqrt{x-y} \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x-y}\geq 0 \\ b=x+y\neq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2=x-y \\ b=x+y \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2x=a^2+b \\ 2y=b-a^2 \end{cases}$ nên:

$\Rightarrow x^2+2y^2+3xy=\dfrac{3b^2-ba^2}{2}$ thì $(i)\Leftrightarrow\begin{cases} 3b^2-ba^2+6=0 \\ a^2+18=9b^2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 9b^2-3ba^2+18=0 & (ii) \\ a^2-9b^2a+18=0 \end{cases}\overset{-}{\Rightarrow}(9b^2-a^2)+3ab(3b-a)=0$

$\Leftrightarrow(3b-a)(3b+a+3ab)=0\Leftrightarrow a=3b\ \vee\ 3b+a+3ab=0$.

Với $3ab=-(3b+a)$ thì $(ii)\Rightarrow 9b^2+a(3b+a)+18=0$

$\Leftrightarrow 3b^2+3ab+a^2+18=0\Leftrightarrow 3\left(b+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+18=0$: vô nghiệm.

Với $a=3b$ thì $(ii)\Rightarrow a^2-a^3+18=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-y=9 \\ x+y=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$.

BT 590. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=16 \\ y(x^2+1)=2x(y^2+1) \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $xy \neq 0$. Đặt: $a = x + \dfrac{1}{x};\ b = y + \dfrac{1}{y}$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b} = 2 \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -2 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 4x + 1 = 0 \\ y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$$ (thỏa mãn điều kiện).

BT 591. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 4 \\ \dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{y}{y^2+1} = 1 \end{cases} \quad (i) \qquad (x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $xy \neq 0$. Đặt $a = x + \dfrac{1}{x};\ b = y + \dfrac{1}{y}$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a + b = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x; y) = \{(1; 1)\}$.

BT 592. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y + y^2x + 2y + x = 6xy \\ xy + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = 4 \end{cases} \quad (i) \qquad (x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0,\ y \neq 0$.

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + y + \dfrac{1}{y} = 6 \\ \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \end{cases} \quad (ii)$. Đặt $\begin{cases} a = x + \dfrac{1}{x} \\ b = y + \dfrac{1}{y} \end{cases}$.

$$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 6 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 - 2a \\ 2a^2 - 6a + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$ (thỏa mãn điều kiện).

BT 593. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2 = 8 \\ (x^3+y^3)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3 = 16 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $xy\neq 0$. Đặt $a=x+\dfrac{1}{y};\ b=y+\dfrac{1}{x}$ thì $(i)\Leftrightarrow\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ a^3+b^3=16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=4 \\ ab=4 \end{cases}\vee\begin{cases} a+b=-2-2\sqrt{3} \\ ab=4+4\sqrt{3} \end{cases}\vee\begin{cases} a+b=-2+2\sqrt{3} \\ ab=4-4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}\vee\begin{cases} x=\sqrt{3}-1+\sqrt{2\sqrt{3}} \\ y=\sqrt{3}-1-\sqrt{2\sqrt{3}} \end{cases}\vee\begin{cases} x=\sqrt{3}-1-\sqrt{2\sqrt{3}} \\ y=\sqrt{3}-1+\sqrt{2\sqrt{3}} \end{cases}.$$

BT 594. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Do $x=0$ thì (i) vô nghiệm nên hệ $\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=6 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right)=6 \\ \left(\dfrac{1}{x}+y\right)^2-2.\dfrac{y}{x}=5 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{y}{x} \\ b=\dfrac{1}{x}+y \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow\begin{cases} ab=6 \\ b^2-2a=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\vee\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}.$

BT 595. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0$ thì $(i)\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+1-\dfrac{3}{x}=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}.$

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases} a-3b+1=0 \\ a^2-5b^2+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}\vee\begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}\vee\begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}.$

BT 596. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+1+y\left(y+x\right)=4y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Do $y=0$ không là nghiệm $\left(i\right)$ nên hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+\left(y+x-2\right)=2 \\ \dfrac{x^2+1}{x}\left(y+x-2\right)=1 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{x^2+1}{y} \\ b=y+x-2 \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$.

BT 597. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+\dfrac{1}{xy}=2 \\ (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $xy\neq 0$. Đặt $a=x+\dfrac{1}{y}$; $b=y+\dfrac{1}{x}$ thì $\left(i\right)\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ a+b=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy-2y+1=0 \\ xy-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=y \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

BT 598. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=\dfrac{45}{4} \\ (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=\dfrac{9}{2} \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Đặt $a=x+\dfrac{1}{y}$; $b=y+\dfrac{1}{x}$ thì $\left(i\right)\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(a^2+b^2\right)=45 \\ 2\left(a+b\right)=9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]=45 \\ 2\left(a+b\right)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{9}{2} \\ ab=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\dfrac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy-3y+1=0\\2xy-3x+2=0\end{cases}\\\begin{cases}2xy-3y+2=0\\xy-3x+1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y\\x^2-3x+2=0\end{cases}\\\begin{cases}y=2x\\y^2-3y+2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\end{array}\right..$$

_BT 599._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy+x-1=3y\\x^2y-x=2y^2\end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên $(i)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y}+x-\dfrac{1}{y}=3\\\dfrac{x}{y}\left(x-\dfrac{1}{y}\right)=2\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}a=x-\dfrac{1}{y}\\b=\dfrac{x}{y}\end{cases}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\vee\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow(x;y)=\left\{(2;1);\left(-1;-\frac{1}{2}\right);\left(1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{2}\right)\right\}.$$

_BT 600._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3y^3+8=16y^3\\x(xy+2)=8y^2\end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên $(i)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+\left(\dfrac{2}{y}\right)^3=16\\\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{2x}{y}=8\end{cases}$ (ii).

Đặt $\begin{cases}a=x\\b=\dfrac{2}{y}\end{cases}$.

$$(ii)\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+b^3=16\\a^2b+2ab=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\{(2;1)\}$.

BT 601. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+1+y^2+xy=4y \\ x+y-2=\dfrac{y}{1+x^2} \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên xét $y\neq 0$.

Chia hai vế của phương trình thứ nhất cho $y\neq 0$, thì $(i)\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4 \\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$

Đặt $a=\dfrac{x^2+1}{y}$; $b=x+y$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ b-2=\dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $(x;y)=\left\{(1;2);(-2;5)\right\}$.

BT 602. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^4-2x^3+x^2)(1+y^2-2y)=16y \\ 2x^2y-2xy+y^2-10y+1=0 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên chia mỗi vế cho $y\neq 0$:

$(i)\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-x)^2\cdot\dfrac{(y-1)^2}{y}=16 \\ 2\cdot(x^2-x)^2+\dfrac{(y-1)^2}{y}=8 \end{cases}$ và đặt $\begin{cases} a=x^2-x \\ b=\dfrac{(y-1)^2}{y} \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2b=16 \\ 2a+b=8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1+\sqrt{5} \\ b=6-2\sqrt{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1-\sqrt{5} \\ b=6+2\sqrt{5} \end{cases}$.

$\Rightarrow (x;y)=(-1;3\pm 2\sqrt{2}),(2;3\pm 2\sqrt{2}),\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5+4\sqrt{3}}}{2};4-\sqrt{5}\pm 2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$.

Kết luận: $(x;y)=(-1;3\pm 2\sqrt{2}),(2;3\pm 2\sqrt{2}),\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5+4\sqrt{3}}}{2};4-\sqrt{5}\pm 2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)$.

BT 603. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2=-9xy \\ (x^2+1)(y^2+1)=-10xy \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Do $x=y=0$ không là nghiệm hệ nên xét $x\neq 0$, $y\neq 0$.

$(i)\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1+2x)\cdot(y^2+1+2y)=-9xy \\ (x^2+1)\cdot(y^2+1)=-10xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x^2+1}{x}+2\right)\cdot\left(\dfrac{y^2+1}{y}+2\right)=-9 \\ \dfrac{x^2+1}{x}\cdot\dfrac{y^2+1}{y}=-10 \end{cases}$.

Đặt $a=\dfrac{x^2+1}{x};\ b=\dfrac{y^2+1}{y}\cdot$ Khi đó: $(ii)\Leftrightarrow\begin{cases}(a+2)\cdot(b+2)=-9\\ ab=-10\end{cases}$

Giải hệ này, tìm được: $\begin{cases}a=-4\\ b=\dfrac{5}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}a=\dfrac{5}{2}\\ b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+1=-4x\\ y^2+1=\dfrac{5}{2}y\end{cases}\vee\begin{cases}x^2+1=\dfrac{5}{2}x\\ y^2+1=-4y\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\pm\sqrt{3}\\ \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ y=-2\pm\sqrt{3}\end{cases}.$$

Kết luận: $(x;y)=\left\{(-2\pm\sqrt{3};2);\left(-2\pm\sqrt{3};\dfrac{1}{2}\right);(2;-2\pm\sqrt{3});\left(\dfrac{1}{2};-2\pm\sqrt{3}\right)\right\}\cdot$

BT 604. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+xy-3x+y=0\\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0\end{cases}\quad(i)\qquad(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ là 1 nghiệm hệ. Xét $x\neq 0$:

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{y}{x}=3\\ x^2+3y+\dfrac{y^2}{x^2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}+y=3\\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2+y=5\end{cases}$$ (ii) và đặt $\begin{cases}a=x+\dfrac{y}{x}\\ b=y\end{cases}$ thì:

$(ii)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ a^2+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=-1\\ b=4\end{cases}\cdot$ Suy ra: $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\{(0;0);(1;1)\}\cdot$

BT 605. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2+4xy+y-2x=0 & (1)\\ y^4+8xy^2+4x^2+3y^2=0 & (2)\end{cases}\quad(i)\quad(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Khi $y=0\Rightarrow x=0$: thỏa mãn hệ nên $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ.

Khi $y\neq 0$ thì chia (1) cho y chia (2) cho $y^2\neq 0,$ ta được:

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}y-\dfrac{2x}{y}+4x+1=0\\ y^2+\dfrac{4x^2}{y^2}+8x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(y-\dfrac{2x}{y}\right)+(4x+1)=0\\ \left(y-\dfrac{2x}{y}\right)^2+3\cdot(4x+1)=0\end{cases}\qquad(ii)$$

Đặt $\begin{cases}a=y-\dfrac{2x}{y}\\ b=4x+1\end{cases}\cdot$ Khi đó: $(ii)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\ a^2+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\vee\begin{cases}a=3\\ b=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=2\end{array}\right.\end{cases}\cdot$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(0;0);(-1;1);(-1;2)\right\}\cdot$

BT 606. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x+y}+\sqrt{x+y}=2\\ \sqrt{x+y}+x-y=1\end{cases}\quad (i)\qquad (x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3x+y\ge 0\\ x+y\ge 0\end{cases}\cdot$ Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{3x+y}\ge 0\\ b=\sqrt{x+y}\ge 0\end{cases}\cdot$ Khi đó:

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ b+a^2-2b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7-\sqrt{21}}{2}\\ b=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y=\dfrac{35-7\sqrt{21}}{2}\\ x+y=\dfrac{15-3\sqrt{21}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-\sqrt{21}\\ y=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm là $S=(x;y)=\left\{\left(5-\sqrt{21};\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\right\}.$

BT 607. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5\\ \sqrt{2x+y}+x-y=2\end{cases}\quad (i)\qquad (x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $7x+y\ge 0,\ 2x+y\ge 0.$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{7x+y}\ge 0\\ b=\sqrt{2x+y}\ge 0\end{cases}$ thì hệ $(i)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ b+\dfrac{3}{5}a^2-\dfrac{8}{5}b^2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{15-\sqrt{77}}{2}\\ b=\dfrac{\sqrt{77}-5}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{7x+y}=\dfrac{15-\sqrt{77}}{2}\\ \sqrt{2x+y}=\dfrac{\sqrt{77}-5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+y=\dfrac{151-15\sqrt{77}}{2}\\ 2x+y=\dfrac{51-5\sqrt{77}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10-\sqrt{77}\\ y=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm là $S=(x;y)=\left\{\left(10-\sqrt{77};\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\right)\right\}.$

BT 608. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(xy+3)^2+(x+y)^2=8\quad(1)\\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4}\quad(2)\end{cases}\qquad (x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow x^2y^2+x^2+y^2+1=-8xy\Leftrightarrow(x^2+1)\cdot(y^2+1)=-8xy\quad(3)$

Do $x=0$ hoặc $y=0$ thì hệ vô nghiệm nên xét $x\ne 0,\ y\ne 0.$ Khi đó:

$(3)\Leftrightarrow\dfrac{x^2+1}{x}.\dfrac{y^2+1}{y}=-8\quad(4)$ và đặt $a=\dfrac{x}{x^2+1};\ b=\dfrac{y}{y^2+1}$ thì:

$$(2),(4) \Rightarrow \begin{cases} a+b=-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{ab}=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-1}{2} \\ b=\dfrac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{y^2+1}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2-\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ x=-1 \end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(-1;2\pm\sqrt{3});(2\pm\sqrt{3};-1)\right\}$.

BT 609. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $11x-y\ge 0,\ y\ge x$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{11x-y}\ge 0 \\ b=\sqrt{y-x}\ge 0 \end{cases}$ thì hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ 7b-2a^2+4b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt{11x-y}=2 \\ \sqrt{y-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x-y=4 \\ -x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

BT 610. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x-3y}+\sqrt{5-x+y}=7 \\ 3\sqrt{5-x+y}-\sqrt{2x-y-3}=1 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x\ge 3y,\ 5-x+y\ge 0,\ 2x-y-3\ge 0$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x-3y}\ge 0 \\ b=\sqrt{2x-y-3}\ge 0 \\ c=\sqrt{5-x+y}\ge 0 \end{cases}$ thì hệ $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+c=7 \\ 3c-b=1 \\ a^2+b^2+4c^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt{2x-3y}=3 \\ \sqrt{2x-y-3}=2 \\ \sqrt{5-x+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=9 \\ 2x-y=7 \\ -x+y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(3;-1)\right\}$.

BT 611. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y(1+y)+x^2y^2(2+y)+xy^3=30 \\ x^2y+x(1+y+y^2)+y-11=0 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} xy\cdot(x+y)\cdot(x+y+xy)=30 \\ xy\cdot(x+y)+x+y+xy=11 \end{cases}$ (ii). Đặt $\begin{cases} a=xy.(x+y) \\ b=x+y+xy \end{cases}\cdot$ Khi đó:

$$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} ab=30 \\ a+b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=6 \end{cases} \vee \begin{cases} a=6 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy\cdot(x+y)=5 \\ x+y+xy=6 \end{cases} \vee \begin{cases} xy\cdot(x+y)=6 \\ x+y+xy=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} xy=3 \\ x+y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} xy=1 \\ x+y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} xy=5 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \\ y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \\ y=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(2;1);(1;2);\left(\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2};\dfrac{5\mp\sqrt{21}}{2}\right)\right\}.$

BT 612. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x}+\sqrt{2y}=6 & (1) \\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{2y+9}=8 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0,\ y\ge 0.$

Lấy $\begin{cases} (1)+(2) \\ (2)-(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}+\sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}=14 \\ \sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}+\sqrt{2y+9}-\sqrt{2y}=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}+\sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}=14 \\ \dfrac{5}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}}+\dfrac{9}{\sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}}=2 \end{cases}$ (i). Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}>0 \\ b=\sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}>0 \end{cases}.$

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14 \\ \dfrac{5}{a}+\dfrac{9}{b}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=5 \\ b=9 \end{cases}$: thỏa điều kiện đặt ẩn phụ.

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}=7 \\ \sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}=7 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}=5 \\ \sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{242}{49} \\ y=\dfrac{200}{49} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm là $S=(x;y)=\left\{(2;8);\left(\dfrac{242}{49};\dfrac{200}{49}\right)\right\}.$

BT 613. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{8x^2-8xy+2x+2y^2-2}=\sqrt{x-1}+2x-y & (1) \\ 4x\sqrt{x-1}=17-y^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$ thì $(1)\Leftrightarrow \sqrt{2(x-1)+2(2x-y)^2}=2x-y+\sqrt{x-1}$ (3)

Đặt $a = 2x - y;\ b = \sqrt{x-1} \geq 0$ thì $(3) \Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + 2b^2} = a + b \Leftrightarrow a = b.$

Suy ra: $2x - y = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x-1} = y \Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x-1} + x - 1 = y^2$

Thế vào $(2) \Rightarrow 4x^2 + x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S = (x;y) = \{(2;3)\}\cdot$

BT 614. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \\ x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \end{cases}$ (i) $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Ta có: $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2.(y+1) + 2y - 22 = 0 \\ (x^2-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases}$ (ii). Đặt $\begin{cases} a = x^2 - 2 \\ b = y - 3 \end{cases}$

$$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)\cdot(b+4) + 2\cdot(b+3) = 22 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + 4\cdot(a+b) = 8 \\ (a+b)^2 - 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \{(\pm 2;3);(\pm\sqrt{2};5)\}\cdot$

BT 615. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + 2x^3 - 5x^2 + y^2 - 6x = 11 \\ \dfrac{3\sqrt{y^2-7} - 6}{\sqrt{y^2-7}} = x^2 + x \end{cases}$ (i) $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $|x| \geq \sqrt{7}$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(x^2+x-6) + (y^2-7) = 4 \\ 3\sqrt{y^2-7} - 6 = (x^2+x)\cdot\sqrt{y^2-7} \end{cases}$ (ii)

Đặt $\begin{cases} a = x^2 + x \geq -\dfrac{1}{4} \\ b = \sqrt{y^2 - y} \geq 0 \end{cases}$ thì $(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} a.(a-6) + b^2 = 4 \\ 3b - 6 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ \sqrt{y^2 - y} = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + x = 1 \\ \sqrt{y^2 - y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ y = \pm\sqrt{11} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = \pm 4 \end{cases}.$

Kết luận: So điều kiện, $S = (x;y) = \left\{(0;\pm\sqrt{11});(-1;\pm\sqrt{11});\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\pm 4\right)\right\}\cdot$

BT 616. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = \dfrac{8}{y^3} - \dfrac{8}{y} \\ y^2 + 4 = 5y^2(x^2 + 2x + 2) \end{cases}$ (i) $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $y \neq 0$. Ta có: $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3 - 16\cdot(x+1) = \left(\dfrac{2}{y}\right)^3 - 4\left(\dfrac{2}{y}\right) \\ 1 + \left(\dfrac{2}{y}\right)^2 = 5\left[(x+1)^2 + 1\right], \quad (*) \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = \dfrac{2}{y} \neq 0 \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 16a = b^3 - 4b \\ 1 + b^2 = 5.(a^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 4.(4a-b) \\ \uparrow \\ 4 = \boxed{b^2 - 5a^2} \end{cases}$

Suy ra: $a^3 - b^3 = (b^2 - 5a^2)\cdot(4a - b) \Leftrightarrow 21a^3 - 4ab^2 - 5a^2b = 0$

$\Leftrightarrow a.(21a^2 - 4b^2 - 5ab) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $7a = 4b$ hoặc $b = -3a.$

Với $a = 0,$ suy ra: $x = -1 \Rightarrow y = \pm 1.$

Với $7a = 4b,$ suy ra: $x + 1 = \dfrac{8}{7y}$ thì $(*) \Leftrightarrow \dfrac{124}{49y^2} + 4 = 0$: vô nghiệm.

Với $b = -3a,$ suy ra: $x + 1 = -\dfrac{2}{3y}$ thì $(*) \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{(-1;\pm 1); \left(-2;\dfrac{2}{3}\right); \left(0;-\dfrac{2}{3}\right)\right\}.$

_BT 617._ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases} \quad (i) \quad (x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} y.(x-1) - (x-1) = 2 \\ 4(x-1)^3 + y^3 - 6.(y+1) - 3.(x-1) = 0 \end{cases} \quad (ii).$ Đặt $\begin{cases} a = x - 1 \\ b = y \end{cases}.$

$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} ab - a = 2 \\ 4a^3 + b^3 - 6.(b+1) - 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \boxed{a+2} \\ \downarrow \\ 4a^3 + b^3 - 3.(2b + 2 + a) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = a + 2 \\ 4a^3 + b^3 - 3.(2b + ab) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \boxed{a+2} \\ \downarrow \\ 4a^3 + b^3 - 3b.(a+2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = a + 2 \\ 4a^3 + b^3 - 3ab^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = a + 2 \\ 4\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = a + 2 \\ \dfrac{a}{b} = -1 \vee \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = a+2 \\ a = -b \end{cases} \vee \begin{cases} ab = a+2 \\ b = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \\ b = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ b = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

Suy ra: $(x;y) = \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$, $(x;y) = \left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}; \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Kết luận: Tập nghiệm hệ $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right); \left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}; \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$.

BT 618. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x-1} - y(1+2\sqrt{2x-1}) = -8 \\ y^2 + y\sqrt{2x-1} + 2x = 13 \end{cases}$ (i) $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \geq 0 \\ b = y \end{cases} \Rightarrow 2x = a^2 + 1$.

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b.(1+2a) = -8 \\ b^2 + ab + a^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b) + 8 = 2ab \\ (a-b)^2 + 3ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \dfrac{a-b}{2} + 4 \\ 2.(a-b)^2 + 3.(a-b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ ab = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a - b = -\dfrac{3}{2} \\ ab = \dfrac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{61}-3}{4} \\ b = \dfrac{\sqrt{61}+3}{4} \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt{2x-1} = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{2x-1} = \dfrac{\sqrt{61}-3}{4} \\ y = \dfrac{\sqrt{61}+3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{43-3\sqrt{61}}{16} \\ y = \dfrac{\sqrt{61}+3}{4} \end{cases}$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{5}{2}; 2\right); \left(\dfrac{43-3\sqrt{61}}{16}; \dfrac{\sqrt{61}+3}{4}\right)\right\}$.

BT 619. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1} + \dfrac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{2x}{y} = 4 \end{cases}$ (i) $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $xy \neq 0$; $x^2 + y^2 \neq 1$. Đặt $a = x^2 + y^2 - 1$; $b = \dfrac{x}{y}$, $(ab \neq 0)$.

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} = 1 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 9 \\ b = 3 \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \mp 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(\pm1;\mp1);(\pm3;\pm1)\right\}$.

BT 620. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ \sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{12}{y} \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-y^2>0 \\ y>0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2-y^2} \\ b=x+y \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\left(b-\dfrac{a^2}{b}\right)$.

$(i)\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=12 \\ \dfrac{a}{2}\left(b-\dfrac{a^2}{b}\right)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=8 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=9 \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(5;3);(5;4)\right\}$.

BT 621. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 12x+3y-4\sqrt{xy}=16 \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y+5}=6 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} y\ge -5 \\ x\ge \dfrac{-5}{4} \\ xy\ge 0 \end{cases}$ thì $(i)\Leftrightarrow \begin{cases} 3(4x+y)-4\sqrt{xy}=16 \\ 4x+y+2\sqrt{4xy+5(4x+y)+25}=26 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=4x+y \\ b=4xy \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2\sqrt{b}=16 \\ a+2\sqrt{b+5a+25}=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=6 \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(1;4)\right\}$.

BT 622. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3xy^2=25 \\ x^2+6xy+y^2=10x+6y-1 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases}$ thì $(i)\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3-50=0 & (1) \\ 2a^2-8a-b^2-2b+1=0 & (2) \end{cases}$

Lấy: $(1)-6\cdot(2)\Rightarrow (a-4)^3=(-2-b)^3 \Leftrightarrow a=2-b$, suy ra: $x=3y$.

$(1)\Leftrightarrow 6b^2-12b-42=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+2\sqrt{2} \\ b=1-2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=1-2\sqrt{2} \\ b=1+2\sqrt{2} \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} x+y=1+2\sqrt{2} \\ x-y=1-2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=1-2\sqrt{2} \\ x-y=1+2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$.

Kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(1;2\sqrt{2});(1;-2\sqrt{2})\right\}$.

BT 623. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + xy + \dfrac{3}{2} = y^3 & (1) \\ (xy+2)^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2y + \dfrac{4}{x} & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0.$

$(2) \Leftrightarrow \left(xy + 2 - \dfrac{1}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow xy + 2 = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y = \dfrac{1-2x}{x^2}\cdot$

$(1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)^3 - \left(\dfrac{1-2x}{x^2}\right)^3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}$ $(*)$. Đặt $t = \dfrac{1}{x} \neq 0$ thì lúc đó:

$(*) \Leftrightarrow 6t^5 - 15t^4 + 8t^3 + 3t^2 + t = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow (2t-1)\cdot(6t^4 - 12t^3 + 2t^2 + 4t + 3) = 0.$

Với $t = \dfrac{1}{2}$, suy ra: $x = 2 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}\cdot$

Với $6t^4 - 12t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{36x^4 - 72x^3 + 12x^2 + 24x + 18}{6} = 0$

$\Leftrightarrow (6x^2 - 6x - 2)^2 + 14 = 0:$ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(2; -\dfrac{3}{4}\right)\right\}\cdot$

BT 624. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{46 - 2y(3 + 8x + 8y)} = 2x + 6 \\ 2\sqrt{4x+y} + x + 2y = 1 \end{cases}$ $(*)$ $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $4x + y \geq 0$ và $y\cdot(3 + 8x + 8y) \leq 23.$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot(x+2y)^2 + 6\cdot(4x+y) = 10 \\ 2\sqrt{4x+y} + x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 + 6b^2 = 10 \\ 2b + a = 1 \end{cases}$ với $\begin{cases} a = x + 2y \\ b = \sqrt{4x+y} \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 4x + y = 1 \end{cases}\cdot$ Suy ra: $x = \dfrac{3}{7}$ và $y = -\dfrac{5}{7}\cdot$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ cần tìm là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{3}{7}; -\dfrac{5}{7}\right)\right\}\cdot$

BT 625. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{7}{12} & (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{35}{12} & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

<u>*Lời giải*</u>. Điều kiện: $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases}$. Lấy $\begin{cases} (1)+(2) \\ (2)-(1) \end{cases}$, suy ra: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}} = \dfrac{7}{2} \\ \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$ (i)

Đặt $a = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} > 0;\ b = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} > 0$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a + \dfrac{1}{b} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{a} + b = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = 3 \\ \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{ \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3} \right); \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2} \right) \right\}$.

<u>BT 626.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2y^3}{x^4} - \dfrac{y^3}{x^3+5y^6} = \dfrac{9}{10x^2} \\ \sqrt{x^3+y^6}\left(\dfrac{x^4}{x^3+5y^6} + 2 \right) = \dfrac{22x^2}{5} \end{cases}$ (i)

<u>*Lời giải*</u>. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0;\ x^3 + 5y^6 \neq 0 \\ x^3 + y^6 \geq 0 \end{cases}$. Chia hai vế (i) cho $\dfrac{y^3}{x^4}$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \dfrac{x^4}{x^3+5y^6} = \dfrac{9x^2}{10y^3} & (1) \\ 2 + \dfrac{x^4}{x^3+5y^6} = \dfrac{22x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}} & (2) \end{cases} \xleftrightarrow[(2)\,-(1)]{(1)\,+\,(2)} \begin{cases} 2 = \dfrac{9x^2}{20y^3} + \dfrac{11x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}} \\ \dfrac{x^4}{x^3+5y^6} = \dfrac{11x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}} - \dfrac{9x^2}{20y^3} \end{cases}$$

$$\overset{\otimes}{\Rightarrow} \frac{2x^4}{x^3+5y^6} = \frac{121x^4}{25.(x^3+y^6)} - \frac{81x^4}{400y^6} \Leftrightarrow \frac{2}{x^3+5y^6} = \frac{121}{25.(x^3+y^6)} - \frac{81}{400y^6} \quad (3)$$

Chia hai vế cho $x^3 \neq 0$ và đặt $t = \dfrac{y^6}{x^3}$ thì $(3) \Leftrightarrow \dfrac{2}{1+5t} + \dfrac{121}{25(1+t)} - \dfrac{81}{400t}$

Suy ra: $t = \dfrac{1}{15} \Rightarrow y^6 = \dfrac{x^3}{15}$. Lúc này $(3) \Leftrightarrow 40\sqrt{x} + 15x\sqrt{x} = 22x\sqrt{15}$

Do đó: $(x;y) = \left(\dfrac{4}{15}; \pm\sqrt[6]{\dfrac{64}{50625}} \right); \left(\dfrac{80}{3}; \pm\sqrt[6]{\dfrac{102400}{81}} \right)$.

Kết luận: So điều kiện, suy ra: $S=(x;y)=\left\{\left(\frac{4}{15};\pm\sqrt[6]{\frac{64}{50625}}\right);\left(\frac{80}{3};\pm\sqrt[6]{\frac{102400}{81}}\right)\right\}$.

BT 627. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}+\dfrac{1}{xy}=1\\ \sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=2\sqrt{7}\end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0$ và $y\neq 0$.

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}6+\dfrac{x+y}{xy}=x+y\\ \sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=2\sqrt{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}+y-\dfrac{1}{y}=6\\ \sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}+\sqrt{\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2+2}=2\sqrt{7}\end{cases}$$

Đặt $a=x-\frac{1}{x};b=y-\frac{1}{y}$ thì hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\ \sqrt{a^2+2}+\sqrt{b^2+2}=2\sqrt{7}\end{cases}$: vô nghiệm.

Kết luận: Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

BT 628. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3x-y}{x^2-y^2}+3x+y=9\\ (x^2+y^2)\left[\dfrac{5}{(x^2-y^2)^2}+5\right]+2xy-\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)^2}=35\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x^2\neq y^2$.

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2\cdot(x-y)+(x+y)}{(x-y)\cdot(x+y)}+2\cdot(x+y)+(x-y)=9\\ 5\cdot(x^2+y^2)+2xy+\dfrac{5\cdot(x^2+y^2)-2xy}{(x-y)^2\cdot(x+y)^2}=35\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)+\left(x-y+\dfrac{1}{x-y}\right)=9\\ 3\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)^2+2\left(x-y+\dfrac{1}{x-y}\right)^2=45\end{cases}\quad(i)$$

Đặt $a=x+y+\frac{1}{x+y};\ b=x-y+\frac{1}{x-y},\ \left(|a|,|b|\geq 2\right)$ thì

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2+2b^2=45\\ 2a+b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}\Rightarrow(x;y)=\left(\frac{3}{2};\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};0\right).$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{\left(\frac{3}{2};\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};0\right)\right\}$.

BT 629. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x^2+y)\left[4x^4-3x^2+y(4x^2+y+6)\right]=8 \\ 3y-4x^2+2=0 \end{cases}$ (i)

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(i)\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2+y)\cdot\left[(2x^2+y)^2-3\cdot(x^2-2y)\right]=8 \\ (2x^2+y)+2\cdot(x^2-2y)=2 \end{cases}$ (ii). Đặt $\begin{cases} a=2x^2+y \\ b=x^2-2y \end{cases}$.

$(ii)\Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot(a^2-3b)=8 \\ a+2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} 2x^2+y=2 \\ x^2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=\left(\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5};\dfrac{2}{5}\right)$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ phương trình là $S=(x;y)=\left\{\left(\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5};\dfrac{2}{5}\right)\right\}$.

BT 630. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y+\sqrt{2y-x+1}=4xy^2+x-1 \\ x^3-6x^2y=8y^3-6 \end{cases}$ (i)

Lời giải. Điều kiện $2y-x+1\ge 0$.

$(i)\Leftrightarrow \begin{cases} 12xy^2=3(2y-x)+3\sqrt{2y-x+1}+3 \\ x^3-6x^2y-8y^3=-6 \end{cases}$

$\overset{\oplus}{\Rightarrow} -(2y-x)^3=3(2y-x)+3\sqrt{2y-x+1}-3,\ (ii)$. Đặt $t=2y-x$ thì

$(ii)\Leftrightarrow t^3+2t+3\sqrt{t+1}-3=0 \Leftrightarrow t\left(t^2+2+\dfrac{3}{\sqrt{t+1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow t=0\Rightarrow x=2y$ thì $(2)\Leftrightarrow y^3=\dfrac{1}{4}\Rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$: thỏa điều kiện.

BT 631. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $xy\ne 0$. Đặt: $a=x+\dfrac{1}{x};\ b=y+\dfrac{1}{y},\ \left(|a|\ge 2;|b|\ge 2\right)$ thì

$(i)\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2=53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=7 \end{cases} \vee \begin{cases} a=7 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow (x;y)=\left(-1;\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2};-1\right)$.

BT 632. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{2x^2+8y}=\dfrac{7-4y}{x^2+x} \\ \sqrt{x^3-y}=\dfrac{2y}{x(4x-1)} \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0;\ x \neq -1;\ x \neq 0;\ x \neq \dfrac{1}{4};\ x^3 \geq y$. Đặt $t = \sqrt{x^3 - y} \geq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow t = \frac{2\left(x^3 - t^2\right)}{4x^2 - x} \Leftrightarrow 4tx^2 - tx = 2x^3 - 2t^2 \Leftrightarrow \left(x - 2t\right)\left(2x^2 + t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2t \geq 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{x^3 - y} \Leftrightarrow x^2 = 4x^3 - 4y \Leftrightarrow 4y = 4x^3 - x^2.$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{8x^3} = \frac{7 - 4x^3 + x^2}{x^2 + x} \Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$: thỏa điều kiện.

BT 633. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{xy + 2} \end{cases}$ (i) $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ |y| \geq 1 \end{cases}$ thì $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x^2y^2 \\ x^2 + y^2 - xy + 2\sqrt{x^2y^2 - (x^2 + y^2) + 1} = 4 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = xy \\ b = x^2 + y^2 \end{cases}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 \\ b - a + 2\sqrt{a^2 - b + 1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 \\ a^2 - a - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt{2} \\ x = y = -\sqrt{2} \end{array}\right..$$

BT 634. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + 2y + 3} + \sqrt{9x + 10y + 11} = 10 \\ \sqrt{12x + 13y + 14} + \sqrt{28x + 29y + 30} = 20 \end{cases}$ (i)

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x + 2y + 3 \geq 0;\ 9x + 10y + 11 \geq 0 \\ 12x + 13y + 14 \geq 0;\ 28x + 29y + 30 \geq 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a = x + y + 1 \\ b = y + 2 \end{cases}$

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a + b} + \sqrt{9a + b} = 10 \quad (*) \\ \sqrt{12a + b} + \sqrt{28a + b} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\sqrt{a + b} + \sqrt{9a + b}\right) = 20 \\ \sqrt{12a + b} + \sqrt{28a + b} = 20 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{12a + b} + \sqrt{28a + b} = 2\left(\sqrt{a + b} + \sqrt{9a + b}\right)$ chia hai vế cho $\sqrt{b}$ được:

$\Leftrightarrow \sqrt{12\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1} + \sqrt{28\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1} = 2\sqrt{\dfrac{a}{b} + 1} + 2\sqrt{9\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1}$. Đặt $t = \dfrac{a}{b}$ thì

$$\Leftrightarrow \sqrt{12t + 1} + \sqrt{28t + 1} = 2\sqrt{t + 1} + 2\sqrt{9t + 1} \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{4}b$$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{9}{4}b} + \sqrt{\dfrac{49}{4}b} = 10 \Leftrightarrow 5\sqrt{b} = 10 \Leftrightarrow b = 4 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$: thỏa điều kiện.

BT 635. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)(\sqrt{x^3+2}+1)=\dfrac{3}{y} & (1) \\ x^2+x+1=y & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^3+2\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$. Lấy $(1).(2)\Rightarrow \left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x^3+2}+1\right)=3 \quad (i)$

Đặt $t=\sqrt{x^3+2}$ thì $(i)\Leftrightarrow \left(t^2-3\right)\left(t+1\right)=3 \Leftrightarrow \left(t-2\right)\left(t^2+3t+3\right)=0$

$\Leftrightarrow t=2\Rightarrow x=\sqrt[3]{2} \Rightarrow y=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ (thỏa mãn điều kiện).

BT 636. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2+xy=1 & (1) \\ (x-y)^2(\sqrt{3x^2-xy+2y^2+2}+1)=3 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $3x^2-xy+2y^2+2\ge 0$.

$(1)\Leftrightarrow 3x^2-xy+2y^2=1+\left(x-y\right)^2$ thì $(2)\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\left[\sqrt{3+\left(x-y\right)^2}+1\right]=3$

Đặt $t=\left(x-y\right)^2\ge 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow t\left(\sqrt{t+3}+1\right)=3$

$\Leftrightarrow t\sqrt{t+3}=3-t \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 3 \\ t^3+2t^2+6t=9 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} \left(x-y\right)^2=1 \\ 2x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y)=\left\{(0;-1);(0;1);\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right);\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{4}\right)\right\}$: thỏa mãn điều kiện.

BT 637. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=2 & (1) \\ 29\sqrt[3]{x^2-y^2}+\dfrac{72xy}{x-y}=4 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1;\ y\ge -1;\ x-y\ne 0$.

$(1)\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy+x+y+1}=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy+x+y+1}=2-\left(x+y\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\left(x+y\right)\ge 0 \\ 4\left(xy+x+y+1\right)=4-4\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\le 2 & (*) \\ \left(x-y\right)^2=8\left(x+y\right) \end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow 29\sqrt[3]{\left(x-y\right)\left(x+y\right)}+\dfrac{18\left[\left(x+y\right)^2-\left(x-y\right)^2\right]}{x-y}=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{29}{2}\left(x-y\right)+\dfrac{18\left[\dfrac{\left(x-y\right)^4}{64}-\left(x-y\right)^2\right]}{x-y}=4 \quad (i)$. Đặt $t=x-y$ thì

$(i) \Leftrightarrow 9t^3 - 112t - 108 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = -\frac{8}{3} \vee t = -\frac{4}{3}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y = -\frac{8}{3} \\ x + y = \frac{8}{9} \end{cases} \vee \begin{cases} x - y = -\frac{4}{3} \\ x + y = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$\Rightarrow (x;y) = (3;-1); \left(-\frac{8}{9}; \frac{16}{9}\right); \left(-\frac{5}{9}; \frac{7}{9}\right)$ (thỏa mãn điều kiện và thỏa $(*)$).

BT 638. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2 + 1 = x - y & (1) \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-2y} = 3y & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1;\ y \ge -1;\ x - y \ne 0$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+y} + \sqrt{x-2y} = \left(\sqrt{x+y}\right)^2 - \left(\sqrt{x-2y}\right)^2 \Leftrightarrow 1 = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-2y}$ (i)

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+y} \ge 0 \\ b = \sqrt{x-2y} \ge 0 \end{cases}$ thì $(i) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 - b^2 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ (a-b)(a+b) = 3y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 3y \end{cases} \Leftrightarrow 2a = 3y + 1 \Rightarrow 2\sqrt{x+y} = 3y + 1 \Leftrightarrow 4x = 9y^2 + 2y + 1$

$(1) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = 22$. So điều kiện: $(x;y) = (22;3)$.

BT 639. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 2\sqrt{y+2} = 3 \\ 4y + 8(x-2)\sqrt{x+2} + 7 = 0 \end{cases}$ (i) $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -2;\ y \ge -2$. Đặt: $a = \sqrt{x+2} \ge 0;\ b = \sqrt{y+2} \ge 0$.

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(a^2 - 2\right) - 2b = 3 \\ 4\left(b^2 - 2\right) + 8a\left(a^2 - 4\right) + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2a^2 - 7 \\ 4b^2 + 8a^3 - 32a + 7 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(2a^2 - 7\right)^2 + 8a^3 - 32a + 7 = 0 \Leftrightarrow a^4 + 2a^3 - 7a^2 - 8a + 14 = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a-2)\left(a^2 + 5a + 6\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases}$ (TM)

BT 640. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ (3x - 4x^3)(3y - 4y^3) = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ thì $(2) \Leftrightarrow 2\cos 3\alpha \sin 3\alpha = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 6\alpha = -1 \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 6\alpha = -1 \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \left\{-\dfrac{5\pi}{12};-\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{7\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12}\right\}.$$

$$\Rightarrow (x;y) = \left\{\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\pm\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right);\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\pm\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right);\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

BT 641. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1 \\ y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3} \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} |x|\le 1 \\ |y|\le 1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=\cos\beta \end{cases}$ với $\alpha,\beta\in[0;\pi]$.

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha+\sin\beta=1 \\ \cos\beta+\sin\alpha=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{\pi}{3} \\ \beta=\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (TM)$$

BT 642. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$ (i) $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{x}>0$ và $b=\sqrt{y}>0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{a}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ b-\dfrac{b}{a^2+b^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{a}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ bi-\dfrac{bi}{a^2+b^2}=\dfrac{4\sqrt{2}.i}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$\overset{\oplus}{\Rightarrow} a+bi+\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i$ $(**)$. Gọi $z=a+bi,\ (a;b>0)$.

$$(**) \Leftrightarrow z^2-2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i\right)z+1=0 \text{ có } \Delta'=-\dfrac{38}{21}+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}}i=\left(\dfrac{2}{\sqrt{21}}+\sqrt{2}i\right)^2$$

$$\Rightarrow z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{21}}+\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+\sqrt{2}\right).i \vee z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{21}}+\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}-\sqrt{2}\right).i.$$

$$\text{Do } a,b>0 \Rightarrow z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{21}}+\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+\sqrt{2}\right).i \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{21}} \\ b=\sqrt{y}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+\sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra: $x = \dfrac{11}{\sqrt{21}} + \dfrac{4\sqrt{7}}{21}$ và $y = \dfrac{22}{7} + \dfrac{8\sqrt{7}}{21}$.

BT 643. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x + 1 = y^2 - 2xy - x^2 \\ y^3 - 3yx^2 + y - 1 = y^2 + 2xy - x^2 \end{cases}$ (*) $(x; y \in □)$

Lời giải. Tập xác định: $D = □$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2 - y^2\right) - 2xy^2 + \left(x^2 - y^2\right) + 2xy - x + 1 = 0 & (1) \\ y\left(y^2 - x^2\right) - 2x^2y + \left(x^2 - y^2\right) - 2xy + y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - i.(2) \Rightarrow (x + yi)^3 + (1 - i)(x + yi)^2 - (x + yi) + 1 + i = 0 \qquad (**)$$

Đặt $z = x + yi,\ (x; y \in □)$ thì $(**) \Leftrightarrow z^3 + (1 - i)z^2 - z + 1 + i = 0$

$$\Leftrightarrow (z - i)(z^2 + z - 1 + i) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = i \\ z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{41}}}{4} \mp \dfrac{i}{8}(\sqrt{41} - 5)\sqrt{\dfrac{1}{2}(5 + \sqrt{41})} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (x; y) = (0; 1); \left(\dfrac{-2 \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{41}}}{4};\ \mp \dfrac{1}{8}\left(\sqrt{41} - 5\right)\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(5 + \sqrt{41}\right)}\right).$$

BT 644. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 & (1) \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} & (2) \end{cases}$ $(x; y \in □)$

Lời giải. Tập xác định: $D = □$.

$$(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = (-2y) + \sqrt{(-2y)^2 + 4} \Leftrightarrow f(x) = f(-2y)$$

Xét $f(t) = t + \sqrt{4 + t^2}$ có $f'(t) = \dfrac{\sqrt{4 + t^2} + t}{\sqrt{1 + t^2}} > \dfrac{|t| + t}{\sqrt{1 + t^2}} \geq 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên □ và có $f(x) = f(-2y) \Leftrightarrow x = -2y$.

$$(2) \Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \Leftrightarrow (x + 1)^3 + 2(x + 1) = \left(x^3 + 1\right) + \sqrt[3]{x^3 + 1}$$

$\Leftrightarrow g(x + 1) = g\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right)$ với $g(t) = t^3 + 2t$ có $g'(t) = 3t^2 + 2 > 0$

$\Rightarrow g(t)$ tăng trên □ và có $\Leftrightarrow g(x + 1) = g\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + 1} = x + 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow (x; y) = \{(-1; 2); (0; 0)\}$ $\quad (TM)$

BT 645. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x - 3)(x + 4) = y(y - 7) & (1) \\ \dfrac{y^2}{\sqrt{x - 1}} = \dfrac{x - 1}{\sqrt{2 - y}} & (2) \end{cases}$ $(x; y \in □)$

Lời giải. Điều kiện: $x > 1;\ y < 2$.

$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + 3(x-1) = (2-y)^2 + 3(2-y) \Leftrightarrow f(x-1) = f(2-y)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 3t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t) = 2t + 3 > 0,\ \forall t > 0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và có $f(x-1) = f(2-y) \Leftrightarrow x = 3 - y$.

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{\sqrt{2-y}} = \dfrac{2-y}{\sqrt{2-y}} \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -2 \Rightarrow x = 5 \end{array}\right.$ (thỏa đk).

BT 646. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 + 2y(x+1) + x^2 - 2x + 1 = 0 & (1) \\ \sqrt[4]{y+1} - \sqrt{x^4+1} + \sqrt{y+2} = x & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $y \ge -1$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 + 2y - 2x + 1$

$\Leftrightarrow (y+x)^2 + 2(y+x) + 1 = 4x \Leftrightarrow (y+x+1)^2 = 4x \ge 0$ (3)

$(2) \Leftrightarrow \sqrt[4]{y+1} + \sqrt{(\sqrt[4]{y+1})^4 + 1} = x + \sqrt{x^4+1} \Leftrightarrow f(\sqrt[4]{y+1}) = f(x)$.

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^4+1}$ trên $[0; +\infty)$ $f'(t) = 1 + \dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+1}} > 0\ \forall t \ge 0 \Rightarrow f(t)$ tăng trên $[0; +\infty)$.

Mà ta có $f\left(\sqrt[4]{y+1}\right) = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{y+1} \Leftrightarrow y + 1 = x^4$. Khi đó:

$(3) \Leftrightarrow \left(x^4 + x\right)^2 = 4x \Leftrightarrow x\left(x^7 + 2x^4 + x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x^7 + 2x^4 + x - 4 = 0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(x) = x^7 + 2x^4 + x - 4$ trên $[0;+\infty)$ có

$f'(x) = 7x^6 + 8x^3 + 1 > 0,\ \forall x \ge 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Ta lại có: $f(x) = 0 = f(1) \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \{(0;-1);(1;0)\}$.

BT 647. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} = 0 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ và $0 \le y \le 2$.

$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = (y-1)^3 - 3(y-1) \Leftrightarrow f(x) = f(y-1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[-1;1]$ có $f'(t) = 3.(t^2 - 1) \le 0,\ \forall t \in [-1;1]$.

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

Suy ra: $f(x) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y - 1$.

$(2) \Leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 = 4 \Rightarrow (x;y) = \left(\pm\sqrt{2\sqrt{2}-2}; 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$.

BT 648. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 + 3y = x^3 + 3x^2 + 6x + 4 & (1) \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 & (2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ và $0 \le y \le 2$.

$(1) \Leftrightarrow y^3 + 3y = (x+1)^3 + 3(x+1) \Leftrightarrow f(y) = f(x+1).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(y) = f(x+1) \Leftrightarrow y = x+1$ và $(2) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + 1 = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow t^2 = 2t \Leftrightarrow t = 2.$

Suy ra: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \{(0;1)\}\cdot$

BT 649. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^3 - 3x + (y-1)\sqrt{2y+1} = 0 & (1) \\ 2x^2 + x + \sqrt{-y(2y+1)} = 0 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -2y^2 - y \ge 0 \\ -2x^2 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le x; y \le 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le -2x \le 1 \\ 0 \le \sqrt{2y+1} \le 1 \end{cases}.$

$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2y+1})^3 - 3\sqrt{2y+1} = (-2x)^3 - 3.(-2x) \Leftrightarrow f(\sqrt{2y+1}) = f(-2x).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[0;1]$ có $f'(t) = 3(t^2 - 1) \le 0,\ \forall t \in [0;1].$

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[0;1]\cdot$

Suy ra: $f(\sqrt{2y+1}) = f(-2x) \Leftrightarrow \sqrt{2y+1} = -2x,$ với điều kiện: $x \le 0.$

$(2) \Rightarrow (x;y) = \left\{\left(0;-\dfrac{1}{2}\right);\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$: thỏa mãn điều kiện.

BT 650. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1} - y - 4y^3 = 0 & (1) \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 = 2y - 3 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

$(1) \Leftrightarrow 4y^3 + y = 4\cdot(\sqrt{2x-1})^3 + \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{2x-1}).$

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 + t$ có $f'(t) = 12t^2 + 1 > 0,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(y) = f(\sqrt{2x-1}) \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1} \ge 0 \Leftrightarrow y^2 = 2x - 1.$

$(1) \Leftrightarrow (2x-1)^2 - 2.(2x-1) + 2y^3 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (y^2 - 1)\cdot(y^2 + 2y) = 0.$ Suy ra: $(x;y) = \left\{\left(\dfrac{1}{2};0\right);(1;1)\right\}\cdot$

Kết luận: Sới điều kiện, tập nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{1}{2};0\right);(1;1)\right\}\cdot$

BT 651. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 & (1) \\ \sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt{y+2} = 5 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \le 2$ và $y \ge \dfrac{1}{2}\cdot$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} + (\sqrt{2-x})^3 = \sqrt{2y-1} + (\sqrt{2y-1})^3 \Leftrightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}).$

Xét hàm số $f(t) = t + t^3$ có $f'(t) = 1 + 3t^2 > 0,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x = 3-2y.$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{5-2y} + 2\sqrt{y+2} = 5,\ (i).$ Đặt $a = \sqrt[3]{5-2y};\ b = \sqrt{y+2} \ge 0$ thì

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 5 \\ a^3 + 2b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{65}}{4} \\ b = \dfrac{23 \mp \sqrt{65}}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-185 \mp 23\sqrt{65}}{16} \\ y = \dfrac{233 \pm 23\sqrt{65}}{32} \end{cases}.$$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ là $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = \dfrac{-185 \mp 23\sqrt{65}}{16} \\ y = \dfrac{233 \pm 23\sqrt{65}}{32} \end{cases}.$

BT 652. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x + 1 = (2y-3)\sqrt{y-2} & (1) \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{2};\ y \ge 2.$

$(1) \Leftrightarrow 2(2x+1)^3 + 2x + 1 = 2(\sqrt{y-2})^3 + \sqrt{y-2} \Leftrightarrow f(2x+1) = f(\sqrt{y-2}).$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(2x+1) = f(\sqrt{y-2}).\sqrt{y-2} = 2x+1 \Leftrightarrow y = 4x^2 + 4x + 3.$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{4x+2} + \sqrt{8x^2+8x+10} - 6 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$

Do $x = -\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của $f(x) = 0,$ nên với $x > -\dfrac{1}{2}$:

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x+2} + \sqrt{8x^2+8x+10} - 6$ trên $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ có:

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x+2}} + \dfrac{8x+4}{\sqrt{8x^2+8x+10}} > 0;\ \forall x > -\dfrac{1}{2}\cdot$ Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)\cdot$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm.

Mà $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ nên nghiệm duy nhất đó là $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=6.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};6\right)\right\}$.

BT 653. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x\sqrt{8x-4}-12y^2-5=4y^3+13y+\sqrt{18x-9} & (1)\\ 4x^2-8x+4\sqrt{2x-1}+2y^3+7y^2+2y=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x>\frac{1}{2}$.

$(1)\Leftrightarrow 4(y+1)^3+(y+1)=\left[4(2x-1)+1\right]\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow f(y+1)=f(\sqrt{2x-1}).$

Xét hàm số $f(t)=4t^3+t$ có $f'(t)=12t^2+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên ℝ.

Suy ra: $f(y+1)=f(\sqrt{2x-1})\Leftrightarrow y+1=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge -1\\ 2x=y^2+2y+2\end{cases}$.

$(2)\Leftrightarrow y\cdot(y+1)\cdot(y^2+5y+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-1\end{array}\right.$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(1;0);\left(\frac{1}{2};-1\right)\right\}$.

BT 654. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0 & (1)\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x\le 5;\ y\le 4;\ 2x+y+5\ge 0;\ 3x+2y+11\ge 0.$

$(1)\Leftrightarrow\left[3\cdot(5-x)+2\right]\sqrt{5-x}=\left[3.(4-y)+2\right]\sqrt{4-y}\Leftrightarrow f(\sqrt{5-x})=f(\sqrt{4-y}).$

Xét hàm số $f(t)=2t+3t^3$ có $f'(t)=2+9t^2>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên ℝ.

Suy ra: $f(\sqrt{5-x})=f(\sqrt{4-y})\Leftrightarrow\sqrt{5-x}=\sqrt{4-y}\Leftrightarrow y=x-1\ge 0.$

$(2)\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13;\ \forall x\in\left[-\frac{4}{3};5\right]$

$\Leftrightarrow 2\left[\sqrt{3x+4}-(x+2)\right]+3\left[\sqrt{5x+9}-(x+3)\right]=x^2+x$

$\Leftrightarrow\frac{-2(x^2+x)}{\sqrt{3x+4}+x+2}-\frac{3(x^2+x)}{\sqrt{5x+9}+x+3}-(x^2+x)=0$

$\Leftrightarrow(x^2+x)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3x+4}+x+2}+\frac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3}+1\right)=0\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$.

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(0;-1);(-1;-2)\right\}$.

BT 655. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2102-3x)\sqrt{4-x}+(6y-2009)\sqrt{3-2y}=0 & (1)\\ 2\sqrt{7x-8y}+3\sqrt{14x-18y}=x^2+6x+13 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x\le 4;\ y\le \dfrac{3}{2};\ 7x-8y\ge 0;\ 14x-18y\ge 0.$

$(1)\Leftrightarrow\left[3\cdot(3-2y)+2000\right]\cdot\sqrt{3-2y}=\left[3\cdot(4-x)+2000\right]\cdot\sqrt{4-x}$

$\Leftrightarrow 3\cdot(\sqrt[3]{3-2y})^3+2000\cdot\sqrt{3-2y}=3\cdot(\sqrt{4-x})^3+2000\cdot\sqrt{4-x}$

$\Leftrightarrow f(\sqrt{3-2y})=f(\sqrt{4-x}).$

Xét hàm số $f(t)=3t^3+2000t$ có $f'(t)=9t^2+2000>0$ nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{3-2y})=f(\sqrt{4-x})\Leftrightarrow\sqrt{3-2y}=\sqrt{4-x}\Leftrightarrow 2y=x-1.$

$(2)\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13$

$\Leftrightarrow 2\left[\sqrt{3x+4}-(x+2)\right]+3\left[\sqrt{5x+9}-(x+3)\right]=x^2+x$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2(x^2+x)}{\sqrt{3x+4}+x+2}-\dfrac{3(x^2+x)}{\sqrt{5x+9}+x+3}-(x^2+x)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x)\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{3x+4}+x+2}+\dfrac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3}+1\right)=0\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm là $S=(x;y)=\left\{\left(0;-\dfrac{1}{2}\right);(-1;-1)\right\}\cdot$

BT 656. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} & (1)\\ \sqrt{2y^2+1}-y=2-x & (2)\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\le 1$.

$(1)\Leftrightarrow 2y^3+y=2(\sqrt{1-x})^3+\sqrt{1-x}\Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{1-x}).$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ có $f'(t)=6t^2+1>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(y)=f(\sqrt{1-x})\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\ge 0\Leftrightarrow y^2=1-x.$ Thế vào (2) được:

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=2-x\Leftrightarrow\dfrac{2-x}{\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}}=2-x$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}}=1,\ \left(\text{do}: x\le 1\right)\Leftrightarrow\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=0.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm $S=(x;y)=\left\{(1;0)\right\}\cdot$

BT 657. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2x.(1+\sqrt{x^2+1}) = y+\sqrt{1+y^2} \\ \dfrac{4y-1}{\sqrt{1+3y}+\sqrt{2-y}}+4\sqrt{\dfrac{1}{xy}+3} = \dfrac{1}{xy}+8 \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

➢ ***Lời giải***. Điều kiện: $-\dfrac{1}{3} \le y \le 2$ và $xy \ne 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, suy ra: $x>0,\ y \ne 0$.

Từ phương trình hai, suy ra: $\left(\dfrac{1}{xy}+3\right)+4.\sqrt{\dfrac{1}{xy}+3}+4 = \dfrac{4y-1}{\sqrt{1+3y}+\sqrt{2-y}}-1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\dfrac{1}{xy}+3}+2\right)^2 = \dfrac{4y-1}{\sqrt{1+3y}+\sqrt{2-y}}-1>0 \Rightarrow 4y-1>\sqrt{1+3y}+\sqrt{2-y} \ge 0$

Suy ra: $y>\dfrac{1}{4}\cdot$ Do đó điều kiện là $\dfrac{1}{4}<y\le 2$ và $x>0$.

Chia hai vế của phương trình một cho y^2, được: $x+x.\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{y^2}+1}$

$\Leftrightarrow f(x) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)\cdot$ Do hàm này đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ nên $x=\dfrac{1}{y} \Leftrightarrow xy=1$.

Thế vào phương trình hai được: $4.(y-1) = (\sqrt{1+3y}-2)+(\sqrt{2-y}-1)$

$\Leftrightarrow 4(y-1) = \dfrac{3.(y-1)}{\sqrt{1+3y}+2}-\dfrac{y-1}{\sqrt{2-y}+1} \Leftrightarrow (y-1)\left(4+\dfrac{1}{\sqrt{2-y}+1}-\dfrac{3}{\sqrt{1+3y}+2}\right)=0$

Suy ra: $y=1 \Rightarrow x=1$.

Kết luận: So với điều kiện, hệ có nghiệm là $(x;y)=\{(1;1)\}\cdot$

BT 658. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+xy^2 = y^6+y^4 & (1) \\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{y^2+3} = 4 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

➢ ***Lời giải***. Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{3}\cdot$ Do $y=0$ không là nghiệm hệ nên:

$(1) \xleftrightarrow{\text{chia cho: } y^3 \ne 0} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\dfrac{x}{y} = y^3+y \Leftrightarrow f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(y).$

Xét hàm số $f(t)=t+t^3$ có $f'(t)=1+3t^2>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(y) \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}=y \Leftrightarrow x=y^2 \ge 0.$ Thế vào phương trình (2) được:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=4 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+3)}=6-2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=\pm 1 \\ x=33 \Rightarrow y=\pm\sqrt{33} \end{array}\right.$$

Kết luận: So điều kiện, tập nghiệm là $S=(x;y)=\left\{(1;1);(33;-\sqrt{33});(33;\sqrt{33})\right\}$.

BT 659. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y+y^3=x^6+2x^4 & (1) \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $y\ge -1$. Do $x=0$ không là nghiệm nên:

$$(1) \xleftrightarrow{\text{chia cho: } x^3\neq 0} 2.\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^3=2x+x^3 \Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right)=f(x).$$

Xét hàm số $f(t)=2t+t^3$ có $f'(t)=2+3t^2>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f\left(\frac{y}{x}\right)=f(x) \Leftrightarrow \frac{y}{x}=x \Leftrightarrow y=x^2\ge 0.$ Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow (x+2)\cdot\sqrt{x^2+1}=(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2+1)=(x+1)^4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow y=3.$$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(\sqrt{3};3);(-\sqrt{3};3)\right\}$.

BT 660. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x^2y=x^2-x+y+1 & (1) \\ x^3-9y^2+6(x-3y)-15=\sqrt[3]{6x^2+2} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow (x^2+1)\cdot(x-y-1)=0 \Leftrightarrow y=x-1$ và thế vào (2), ta được:

$$(2) \Leftrightarrow (x-1)^3+3(x-1)=(\sqrt[3]{6x^2+2})^3+3\sqrt[3]{6x^2+2} \Leftrightarrow f(x-1)=f(\sqrt[3]{6x^2+2}).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ có $f'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x-1)=f(\sqrt[3]{6x^2+2}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x^2+2}=x-1 \Leftrightarrow x^3-9x^2+3x=3$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3=2(x-1)^3 \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2}.(x-1) \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1} \Rightarrow y=\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}.$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của hệ là $S=(x;y)=\left(\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1};\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}\right)$.

BT 661. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y & (1) \\ y+1=2x^2+2xy\sqrt{1+x} & (2) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

$(1) \Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x} \Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{1-x}).$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ có $f'(t)=6t^2+1>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(y)=f(\sqrt{1-x})\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=y\geq 0.$

Thế vào (2) $\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$ (*) và đặt $x=\cos\alpha,\ \alpha\in\left[0;\pi\right].$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\in\left[0;\pi\right]\\ \sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\frac{3\pi}{10}\cdot$$

Suy ra: $x=\cos\frac{3\pi}{10}\Rightarrow y=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{10}\cdot$

Kết luận: So điều kiện, nghiệm hệ phương trình là $\left(x;y\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{10};\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{10}\right)\cdot$

BT 662. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-3)\sqrt{2-x}+y^3+y & (1)\\ x^3+3y^2-6=\sqrt{x+2} & (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\leq 2;\ y\geq\frac{1}{2}\cdot$

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{2-x}+(\sqrt{2-x})^3=\sqrt{2y-1}+(\sqrt{2y-1})^3\Leftrightarrow f(\sqrt{2-x})=f(\sqrt{2y-1}).$

Xét hàm số $f(t)=t+t^3$ có $f'(t)=1+3t^2>0,\ \forall t,$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(\sqrt{2-x})=f(\sqrt{2y-1})\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow x=3-2y.$

$(2)\Leftrightarrow\sqrt[3]{5-2y}+2\sqrt{y+2}=5,\ (i).$ Đặt $a=\sqrt[3]{5-2y};\ b=\sqrt{y+2}\geq 0$ thì

$$(i)\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b=5\\ a^3+2b^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=\dfrac{-3\pm\sqrt{65}}{4}\\ b=\dfrac{23\mp\sqrt{65}}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{-185\mp 23\sqrt{65}}{16}\\ y=\dfrac{233\pm 23\sqrt{65}}{32}\end{cases}.$$

Kết luận: Tập nghiệm hệ là $S=(x;y)=\left\{(-1;2);\left(\frac{-185\mp 23\sqrt{65}}{16};\frac{233\pm 23\sqrt{65}}{32}\right)\right\}.$

BT 663. Giải hệ PT: $\begin{cases}x^2-y^2+2\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+y^3=2y\sqrt{y-1}.(x+\sqrt[3]{x}) & (1)\\ x^4+\sqrt{x^3-x^2+1}=x.(y-1)^3+1 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}y\geq 1\\ x^3-x^2+1\geq 0\end{cases}.$

$(1)\Leftrightarrow(x+\sqrt[3]{x})^2+(y\sqrt{y-1})^2=2.(x+\sqrt[3]{x}).y.\sqrt{y-1}\Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x}=\sqrt{(y-1)^3}+\sqrt{y-1}$

$\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{x})=f(\sqrt{y-1})\Rightarrow\sqrt[3]{x}=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2=(y-1)^3\end{cases}.$

$(2) \Leftrightarrow x^4 = \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = x^3 + 1 \Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 - 1 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^4 - x^3 + x^2 - 1) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 + 1} + x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1).(x^3 + x + 1) = 0 \\ \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = 1 - x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$ hoặc $x = 1 \Rightarrow y = 2.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm cần tìm là $S = (x;y) = \left\{(0;1);(1;2)\right\}\cdot$

BT 664. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = (y-x)(xy+2) & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0,\ y \geq 0.$ Thế $2 = x^2 + y^2$ vào (1), ta được:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = (y-x)(xy + x^2 + y^2) = y^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 + \sqrt[4]{x} = y^3 + \sqrt[4]{y}$

$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$

$(2) \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1.$

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(1;1)\right\}\cdot$

BT 665. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3 - 2x^2y - x^4y^2} + x^4(1 - 2x^2) = y^4 \\ 1 + \sqrt{1 + (x-y)^2} = x^3(x^3 - x + 2y^2) \end{cases}$ (i)

Lời giải. Điều kiện: $3 - 2x^2y - x^4y^2 \geq 0.$

$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - (1 - x^2y^2)^2} + x^4 - 2x^6 - y^4 = 0 & (1) \\ 1 + \sqrt{1 + (x-y)^2} - x^6 + x^4 - 2x^2y^2 = 0 & (2) \end{cases}$

Lấy $(1) - (2) \Rightarrow \sqrt{4 - (1 - x^2y^2)^2} = 1 + \sqrt{1 + (x-y)^2} + (x^3 - y^2)^2$ (ii)

Do $\begin{cases} \sqrt{4 - (1 - x^2y^2)^2} \leq 2 \\ 1 + \sqrt{1 + (x-y)^2} + (x^3 - y^2)^2 \geq 2 \end{cases}$ nên (ii) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x^2y^2 \\ x - y = 0 \\ x^3 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của hệ là $(x;y) = (1;1).$

BT 666. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4 + \sqrt{x + y - 1} = \sqrt{x+1} + \sqrt{3y+6} & (1) \\ \sqrt{x^3 + x^2 + 4x + 4} = 8 - \sqrt{x^2 + 4}.\sqrt{3y+6} & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x^3 + x^2 + 4x + 4 \geq 0,\ y \geq -2;\ x \geq -1;\ x + y \geq 1.$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4}.(\sqrt{x+1} + \sqrt{3y+6}) = 8$ và có $\sqrt{x^2 + 4} \geq 2$ nên

$\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{3y+6} \leq 4$ (i) và $(1) \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{3y+6} \geq 4$ (ii)

$(i),(ii) \Rightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ cần tìm là $(x;y)=(0;1)$.

BT 667. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6\sqrt{x^3-6x+5}=\left(x+2-\dfrac{6}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right) & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{10-x}=y^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $0<x\le 10$ và $x^3-6x+5\ge 0$.

$(1)\Leftrightarrow 6x^2\sqrt{x^3-6x+5}=(x^2+2x-6)\cdot(x^3+4)$

Ta có: $(x^2+x-5)+(x-1)\overset{Cauchy}{\ge} 2\sqrt{(x-1)(x^2+x-5)} \Rightarrow x^2+2x-6\ge 2\sqrt{x^3-6x+5}$

Mà: $\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^3}{2}+4\overset{Cauchy}{\ge} 3\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{2}\cdot\dfrac{x^3}{2}\cdot 4}\Leftrightarrow x^3+4\ge 3x^3$

Lấy vế nhân vế, suy ra: $(x^2+2x-6)\cdot(x^3+4)\ge 6x^2\sqrt{x^3-6x+5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+x-5=x-1 \\ x^3=8 \end{cases}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=\pm\sqrt{3\sqrt{2}}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm của hệ là $(x;y)=(2;\pm\sqrt{3\sqrt{2}})$.

BT 668. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy}=4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)(x+y)}-1 \\ \sqrt{(x-\sqrt{xy+3x})^2+2(x+y+3)}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)(x+y)\ge 0;\ x\ge 0;\ y\ge -3$.

Phương trình thứ nhất $\Leftrightarrow 2x^2+xy+4y^2=4\sqrt{(2x-3y)x.(x+y).y}$

$\Leftrightarrow (4y^2+4xy)+(2x^2-3xy)=2\sqrt{(4y^2+4xy)\cdot(2x^2-3xy)}$ (1)

Đặt $a=4y^2+4xy;\ b=2x^2-3xy$ thì $(1)\Leftrightarrow a+b=2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a=b$.

Suy ra: $4y^2+4xy=2x^2-3xy\Leftrightarrow x=4y$ hoặc $y=-2x$.

Phương trình hai, suy ra: $\sqrt{x}+\sqrt{y+3}\ge\sqrt{2(x+y+3)}$

$\Leftrightarrow x+y+3+2\sqrt{x(y+3)}\ge 2(x+y+3)\Leftrightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y+3})^2\le 0$.

Do đó $\sqrt{x}-\sqrt{y+3}=0\Leftrightarrow x=y+3$ (2)

Từ (1), (2), suy ra: $\begin{cases} x=4y \\ x=y+3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=-2x \\ x=y+3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của hệ là $(x;y)=(4;1)$.

BT 669. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y+1)(x+y+xy+1)=12xy & (1)\\ y\sqrt{3x-2x^2-1}+x\sqrt{1+y-2y^2}+xy=1 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$ và $-\dfrac{1}{2}\le y\le 1$.

Với $(x+y+1)\cdot(x+y+1+xy)=0$: hệ đã cho vô nghiệm.

Với $(x+y+1)\cdot(x+y+1+xy)\ne 0$, khi đó: $(1)\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y+1}-\dfrac{1}{x+y+1+xy}=\dfrac{1}{12}\cdot$

Ta lại có: $\dfrac{1}{x+y+1}-\dfrac{1}{x+y+1+xy}\le \dfrac{1}{x+y+1}-\dfrac{4}{(x+y+2)^2}\cdot$

Xét $f(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}$ trên $\left[1;3\right]$, với $t=x+y+1$ thì được: $f(t)\le f(3)=\dfrac{1}{12}\cdot$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x+1=y+1\\ x+y+1=3\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1.$

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm hệ cần tìm là $S=(x;y)=\left\{(1;1)\right\}\cdot$

BT 670. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{y}{\sqrt{x}+y}-\dfrac{x}{(y+\sqrt{x})^2}=\dfrac{y^4}{(x+y^2)^2}\\ \sqrt{y+\sqrt{x-1}}=32(x-2y+1)\sqrt{2y-2}\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1,\ y\ge 1$.

Phương trình thứ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{y^2}+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}+1\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x}}{y}+1}\cdot$

Đặt $\begin{cases}a=\dfrac{x}{y}>0\\ b=y>0\end{cases}\cdot$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(b+1)^2}=\dfrac{1}{1+ab}$ (*)

Ta có: $\begin{cases}(ab+1)\cdot\left(\dfrac{a}{b}+1\right)\overset{Cauchy-Schwarz}{\ge}(a+1)^2\\ (ab+1)\cdot\left(\dfrac{b}{a}+1\right)\overset{Cauchy-Schwarz}{\ge}(b+1)^2\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(a+1)^2} \geq \dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{1}{ab+1} \\ \dfrac{1}{(b+1)^2} \geq \dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{1}{ab+1} \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế được: $\dfrac{1}{(a+1)^2} + \dfrac{1}{(b+1)^2} \geq \dfrac{a+b}{(a+b)\cdot(1+ab)} = \dfrac{1}{1+ab}$ (**)

Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} ab = \dfrac{a}{b} \\ ab = \dfrac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \Rightarrow x = y^2.$

Thế vào phương trình thứ hai được: $\sqrt{y+\sqrt{y^2-1}} = 32.(y-1)^2\sqrt{2y-2}$

$\Leftrightarrow y + \sqrt{y^2-1} = 2.(4y-4)^5$. Đặt $u = 4y-4 \geq 0$ và giải bằng phương pháp hàm số được nghiệm $u = 1$, suy ra: $(x;y) = \left(\dfrac{25}{16}; \dfrac{5}{4}\right)$.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm cần tìm của hệ là $(x;y) = \left(\dfrac{25}{16}; \dfrac{5}{4}\right)$.